Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(3), 1035-1044**
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123105

Hans汉斯

不含相邻 5^--圈的平面图的均匀染色

吴弦禧*，**黄丹君**

浙江师范大学，数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年2月13日；录用日期：2023年3月9日；发布日期：2023年3月16日

摘 要

图 G 的一个均匀 k-染色是指 G 的一个正常 k-点染色且满足任意两个色类的顶点数之差的绝对值至多为 1 。若 G 存在一个均匀 k-染色，则称 G 是均匀 k-可染的。本文将运用权转移方法证明：不含相邻 5^--圈的平面图是均匀 k-可染的，其中 $k \geq \max\{\Delta(G), 5\}$ 且 $\Delta(G)$ 是图 G 的最大度。

关键词

均匀 k-染色，平面图，圈

Equitable Coloring of Planar Graphs without Adjacent 5^--Cycles

Xianxi Wu*, **Danjun Huang**

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 13^{th}, 2023; accepted: Mar. 9^{th}, 2023; published: Mar. 16^{th}, 2023

Abstract

An equitable k-coloring of a graph G is a proper vertex coloring such that the difference

* 通讯作者。

文章引用: 吴弦禧, 黄丹君. 不含相邻 5^--圈的平面图的均匀染色[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1035-1044.
DOI: 10.12677/aam.2023.123105

in the order of any two color classes is at most one. The graph G is said to be equitably k-colorable if G has an equitable k-coloring. In this paper, we will prove that every planar graph without adjacent 5^--cycles is equitably k-colorable for $k \geq \max\{\Delta(G), 5\}$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G.

Keywords

Equitable k-Coloring, Planar Graph, Cycle

1. 引言

在本文中, 我们只考虑无向、有限的简单图. 对于一个给定的图 G, 我们用 $V(G), E(G)$, $|G|$, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ (简写为 Δ) 来分别表示图 G 的点集, 边集, 阶数, 最小度和最大度. 如果图 G 可以画在欧几里得平面上并且满足任意 2 条边只在端点处相交, 则称 G 为可平面图. 图 G 的这种特殊的平面画法称为平面图. 我们用 $F(G)$ 来表示平面图 G 的面集. 设 $x \in V(G) \cup F(G)$, 用 $d(x)$ 表示图 G 中点 (或面) x 的度. 如果一个点 v 满足 $d(v) = k$ ($d(v) \geq k$ 或 $d(v) \leq k$), 那么称点 v 为 k-点 (k^+-点或 k^--点). 类似地, 我们可以定义 k-面, k^+-面或 k^--面. 对于 $v \in V(G)$, 用 $N(v)$ 表示与点 v 相邻的所有顶点构成的集合. 显然, $\big|N(v)\big| = d(v)$. 对于 $f \in F(G)$, 若 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是面 f 的边界上的点 (允许顶点有重复), 则记 $f = [v_1v_2\cdots v_k]$. 如果一个 k-面 $f = [v_1v_2\cdots v_k]$ 满足 $d(v_i) = d_i$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, k$, 则 f 为 $(d_1, d_2, \cdots, d_k)$-面. 我们用 $n_i(f)$, $n_i(v)$, $f_i(v)$ 分别表示与面 f 关联的 i-点的个数, 与点 v 相邻的 i-点的个数, 与点 v 关联的 i-面的个数.

图 G 的一个正常 k-点染色是指一个映射 $\phi : V(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$, 使得对任意 2 个相邻的点 x 和 y 都有 $\phi(x) \neq \phi(y)$. 图 G 的点色数是使 G 有一个正常 k-点染色的最小正整数 k, 记作 $\chi(G)$. 对于图 G 的一个 k-点染色 ϕ, 用 V_i ($1 \leq i \leq k$) 表示图 G 中染颜色 i 的顶点组成的集合. 则每个 V_i ($1 \leq i \leq k$) 都是一个独立集. 若对任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ 都有 $\Big||V_i| - |V_j|\Big| \leq 1$, 则称 ϕ 是图G 的一个均匀 k-染色, 或称图G 是均匀 k-可染的. 图 G 的均匀色数是使 G 有一个均匀 k-染色的最小正整数 k, 记作 $\chi_e(G)$. 显然, $\chi_e(G) \geq \chi(G)$, 且不等式可以严格成立.

均匀染色的概念是由 Meyer [1]在 1973 年提出的, 同时, 他还提出了以下猜想.

猜想 1 [1] 若 G 是一个连通图, 且 G 既不是奇圈也不是完全图, 则 $\chi_e(G) \leq \Delta$.

但均匀染色的研究可追溯到 1964 年. Erdős [2]提出如下猜想.

猜想 2 [2] 对任意的 $k \geq \Delta$, 任意一个最大度为 Δ 的图都是均匀 $(k+1)$-可染的.

猜想 2 在 1970 年被 Hajnal 和 Szemerédi [3]所证实. 2010 年, Kierstead 和 Kostochka [4]应用算法分析对猜想 2 给出了一个新奇简短的证明. 1994 年, Chen, Lih 和 Wu [5]进一步提出了以下猜想.

猜想 3 [5] 若 G 是一个连通图, 且 G 既不是 K_m, C_{2m+1}, 也不是 $K_{2m+1,2m+1}$ $(m \geq 1)$, 则 G 是均匀 Δ-可染的.

Chen, Lih 和 Wu [5]还证明了猜想 3 对 $\Delta \leq 3$ 的图成立. Kierstead 和 Kostochka [6]将此结果改进到了 $\Delta \leq 4$. Chen, Lih [7] 和 Lih, Wu [8]分别证明了猜想 3 对树、二部图成立. Wang 和 Zhang [9]证明了猜想 3 对线图成立. Kostochka [10]证明了猜想 3 对外平面图成立, 并且还和 Nakprasit [11] 一起证明了猜想 3 对 $\Delta \geq 14d+1$ 的 d-退化图成立. 1998 年, Yap 和 Zhang [12]证明了猜想 3 对 $\Delta \geq 13$ 的平面图成立. Nakprasit [13]将文献 [12]的结果改进到了 $\Delta \geq 9$. 因此, 平面图族只剩下 $5 \leq \Delta \leq 8$ 的情况还没有解决.

2008 年, Zhu 和 Bu [14]证明了 $\Delta \geq 7$ 且不含 4-圈和 5-圈的平面图是均匀 Δ-可染的. 2014 年, Wang 和 Gui [15]进一步证明了该结论对 $5 \leq \Delta \leq 6$ 且不含 4-圈和 5-圈的平面图也成立. 由此得出了每一个不含 4-圈和 5-圈的平面图都是均匀 Δ-可染的. 2015 年, Zhu, Bu 和 Min [16]证明了不含 5-圈和弦 4-圈的平面图是均匀 k-可染的, 其中$k \geq \max\{\Delta, 8\}$. 2019 年, Dong 和 Wu [17]证明了不含弦 4-圈和弦 6-圈的平面图是均匀 k-可染的, 其中 $k \geq \max\{\Delta, 7\}$.

本文运用权转移方法证明了不含相邻 5^--圈的平面图是均匀 k-可染的, 其中 $k \geq \max\{\Delta, 5\}$. 结合文献 [5] 和文献 [6] 的结果可知, 不含相邻 5^--圈的平面图满足猜想 3.

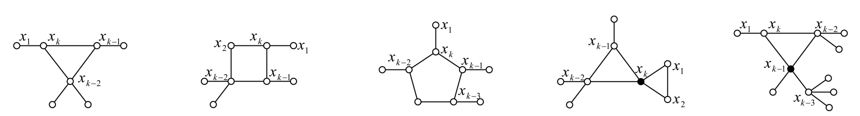
2. 结构引理

引理 1 [14] 令 $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subseteq V(G)$, 其中 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是图 G 中 k 个不同的点. 若 $G - S$ 是均匀 k-可染的, 且对任意 $1 \leq i \leq k$, 都有 $|N_G(v_i) - S| \leq k - i$, 则 G 是均匀 k-可染的.

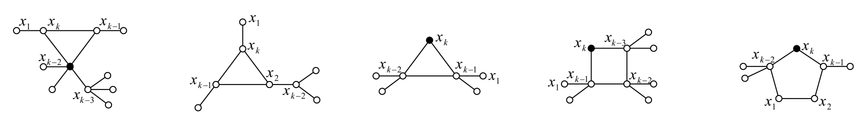
引理 2 [18] 3-圈和 5-圈不相邻的平面图是 3-退化的.

引理 3 [3,4] 对 $k \geq \Delta + 1$, 任意一个最大度为 Δ 的图都是均匀 k-可染的.

引理 4 若 G 是一个 $|G| \geq 5$ 且不含相邻 5^--圈的连通平面图, 则 G 包含图 1中的子图形之一.



H_1: $2 \leq d(x_{k-2}) \leq 4$, $2 \leq d(x_k)$, $d(x_{k-1}) \leq 3$. H_2: $2 \leq d(x_{k-2}) \leq 4$, $2 \leq d(x_k)$, $d(x_{k-1}) \leq 3$. H_3: $2 \leq d(x_k)$, $d(x_{k-1}) \leq 3$, $2 \leq d(x_{k-2})$, $d(x_{k-3}) \leq 3$. H_4: $2 \leq d(x_{k-1}) \leq 3$, $2 \leq d(x_{k-2}) \leq 4$. H_5: $2 \leq d(x_k) \leq 3$, $2 \leq d(x_{k-2})$, $d(x_{k-3}) \leq 4$.



H_6: $2 \leq d(x_{k-3}) \leq 4$, $2 \leq d(x_k)$, $d(x_{k-1}) \leq 3$. H_7: $2 \leq d(x_k) \leq 3$, $2 \leq d(x_{k-1})$, $d(x_{k-2}) \leq 3$. H_8: $3 \leq d(x_{k-1}) \leq 4$, $2 \leq d(x_{k-2}) \leq 4$. H_9: $3 \leq d(x_{k-1}) \leq 4$, $2 \leq d(x_{k-2})$, $d(x_{k-3}) \leq 4$. H_{10}: $2 \leq d(x_{k-1}) \leq 3$, $2 \leq d(x_{k-2}) \leq 4$.

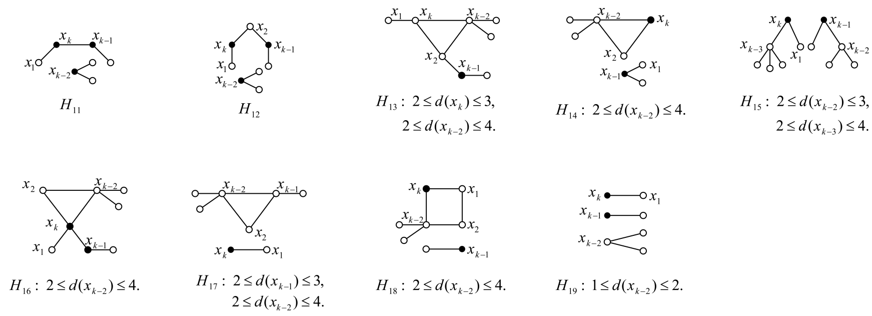


Figure 1. Figure $H_1 \sim H_{19}$ in Lemma 4

图 1. 引理 4 中的子图形 $H_1 \sim H_{19}$

图 1的每个子图形都满足: (1) 实心点的度数如图所示; (2) 空心点的度数除特别说明外可属于区间 $[d, \Delta]$ 中的任何整数, 其中 d 为图中空心点的度数; (3) 每一个子图形中, 标号为 x_k, x_{k-1}, x_{k-2} 的点不会相互重合; (4) 图中与 4-面相关联的点的顺序可以互换; (5) H_{10} 中与 5-面相关联的点的顺序可以互换.

证明 采用反证法, 假设引理 4 不成立. 令 G 是一个反例图. 即 G 是一个 $|G| \ge 5$ 且不含相邻 5^--圈的连通平面图, 但它不含子图形 $H_1 \sim H_{19}$ 中的任何一个. 因此, G 有性质 $P1$.

P1. $f_3(v) + f_4(v) + f_5(v) \le \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$.

我们运用权转移方法来推出矛盾. 首先, 在 $V(G) \cup F(G)$ 上定义一个初始权函数 w: 对 $v \in V(G)$, 令 $w(v) = 2d(v) - 6$; 对 $f \in F(G)$, 令 $w(f) = d(f) - 6$. 根据欧拉公式 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ 和握手定理 $\sum\limits_{v \in V(G)} d(v) = \sum\limits_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$, 有

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = \sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 6) = -12.$$

接着, 我们给出一些权转移规则, 并且按照这套规则对图中的点和面重新分配权. 当权转移过程结束后, 会得到一个新的权函数 w', 并且权转移过程中所有点和面的权和保持不变.

对于 $x, y \in V(G) \cup F(G)$, 我们用 $\tau(x \to y)$ 表示 x 转给 y 的权. 定义如下的权转移规则:

R1. 设 $v \in V(G)$ 且 f 是与点 v 关联的 3-面.

R1.1 假设 $d(v) = 4$. 当 f 是 $(3, 4, 4)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = \frac{3}{2}$; 当 f 是 $(4, 5^+, 5^+)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = 0$; 否则, 令 $\tau(v \to f) = 1$.

R1.2 假设 $d(v) = k \ge 5$. 当 f 是 $(3^-, 3^-, k)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = 3$; 当 f 是 $(3^-, 4, k)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = 2$; 当 f 是 $(4^-, 5^+, k)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = \frac{3}{2}$; 否则, 令 $\tau(v \to f) = 1$.

R2. 设 $v \in V(G)$ 且 f 是与点 v 关联的 4-面.

R2.1 假设 $d(v) = 4$. 当 f 是 $(3, 4, 4, 4)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = \frac{2}{3}$; 当 f 是 $(2, 4, 4, 5^+)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = \frac{1}{4}$; 当 f 是 $(2, 4, 5^+, 5^+)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = 0$; 否则, 令 $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$.

R2.2 假设 $d(v) = k \ge 5$. 当 f 是 $(2, 4, 4, k)$-面时, 令 $\tau(v \to f) = \frac{3}{2}$; 否则, 令 $\tau(v \to f) = 1$.

R3. 设 $v \in V(G)$ 且 f 是与点 v 关联的 5-面.

R3.1 假设 $d(v)=4$. 当 f 关联 2-点时, 令 $\tau(v \to f)=\frac{1}{4}$; 否则, 令 $\tau(v \to f)=\frac{1}{2}$.

R3.2 假设 $d(v) \geq 5$, 令 $\tau(v \to f)=\frac{1}{2}$.

R4. 每个 4^{+}-点给相邻的 2-点转 1.

由引理 2 可知, $\delta(G) \leq 3$. 根据 $\delta(G)$ 的值, 我们分以下几种情况讨论：

情况 1 $\delta(G)=3$.

此时执行的权转移规则为 $R1 \sim R3$.

因为 G 不含子图形 $H_1 \sim H_3$, 所以图 G 具有如下性质.

断言 1.1 G 中的 3-面都是 $(3,3,5^{+})$-面, $(3,4^{+},4^{+})$-面, 或 $(4^{+},4^{+},4^{+})$-面.

断言 1.2 G 中的 4-面都是 $(3,3,5^{+},5^{+})$-面, $(3,4^{+},4^{+},4^{+})$-面, 或 $(4^{+},4^{+},4^{+},4^{+})$-面.

断言 1.3 G 中的 5-面都是 $(3^{+},3^{+},3^{+},4^{+},4^{+})$-面.

下面我们通过两个断言来证明对 $\forall\, x \in V(G) \cup F(G)$, 有 $w'(x) \geq 0$.

断言 1.4 $\forall\, v \in V(G)$, 有 $w'(v) \geq 0$.

证明 假设 $d(v)=k$. 令 $v_1, \cdots, v_k$ 是 v 的邻点且在平面上依顺时针方向排列. 令 f_i 是以 vv_i 和 vv_{i+1} 为边界边的面, 其中 $1 \leq i \leq k$ 且 $v_{k+1}=v_1$.

假设 $k=3$. 则 $w'(v)=w(v)=0$.

假设 $k=4$. 则 $w(v)=2$. 由 $P1$ 知, $f_3(v)+f_4(v)+f_5(v) \leq 2$. 若 $f_3(v)=2$, 则 $f_4(v)=f_5(v)=0$. 由 G 不含 H_4 知 v 不与 $(3,4,4)$-面关联. 由 R1，$w'(v) \geq 2-2\times 1=0$. 若 $f_3(v)=1$, 则 $f_4(v)+f_5(v) \leq 1$. 若 v 与 $(3,4,4)$-面关联, 不妨设为 f_1. 由 G 不含 H_5 知 $d(v_3) \geq 5$ 且 $d(v_4) \geq 5$. 因此 v 不与 $(3,4,4,4)$-面关联. 由 $R1 \sim R3$, $w'(v) \geq 2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=0$. 若 v 不与 $(3,4,4)$-面关联, 由 $R1 \sim R3$, $w'(v) \geq 2-1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. 若 $f_3(v)=0$, 则 $f_4(v)+f_5(v) \leq 2$. 由 $R2 \sim R3$, $w'(v) \geq 2-2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

假设 $k=5$, 则 $w(v)=4$. 由 $P1$ 知, $f_3(v)+f_4(v)+f_5(v) \leq 2$. 若 $f_3(v)=2$, 则 $f_4(v)=f_5(v)=0$. 若 v 与 $(3,3,5)$-面关联, 不妨设为 f_1. 由 G 不含 H_6 知 $d(v_i) \geq 5$ $(i \in \{3,4,5\})$. 则与 v 关联的另一个 3-面必为 $(5,5^{+},5^{+})$-面. 由 R1，$w'(v) \geq 4-3-1=0$. 若 v 不与 $(3,3,5)$-面关联, 由 R1, $w'(v) \geq 4-2\times 2=0$. 若 $f_3(v)=1$, 则 $f_4(v)+f_5(v) \leq 1$. 由 $R1 \sim R3$, $w'(v) \geq 4-3-1=0$. 若 $f_3(v)=0$, 则 $f_4(v)+f_5(v) \leq 2$. 由 $R2 \sim R3$, $w'(v) \geq 4-2\times 1=2$.

假设 $k \geq 6$, 则 $w(v)=2k-6$. 由 $P1$ 知, $f_3(v)+f_4(v)+f_5(v) \leq \lfloor\frac{k}{2}\rfloor$. 若 v 与 $(3,3,k)$-面关联, 不妨设为 f_1. 由 G 不含 H_7 知 $d(v_i) \geq 4$ $(i \in \{3,4,\cdots,k\})$. 与 v 关联的其他 3-面必为 $(k,4^{+},4^{+})$-面. 由 $R1 \sim R3$, $w'(v) \geq 2k-6-3-\frac{3}{2}(\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1) \geq 2k-\frac{15}{2}-\frac{3}{4}k=\frac{5}{4}k-\frac{15}{2} \geq 0$. 若 v 不与 $(3,3,k)$-面关联, 则由 $R1 \sim R3$, $w'(v) \geq 2k-6-2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor \geq 2k-6-2\times\frac{k}{2}=k-6 \geq 0$. □

断言 1.5 对每个 $f \in F(G)$ 都有 $w'(f) \geq 0$.

证明 假设 $d(f) = 3$. 则 $w(f) = -3$. 由断言 1.1 知, f 是 $(3,3,5^+)$-面, $(3,4^+,4^+)$-面, 或 $(4^+,4^+,4^+)$-面. 若 f 是 $(3,3,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+3 = 0$. 若 f 是 $(3,4,4)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+2\times\frac{3}{2} = 0$. 若 f 是 $(3,4,5^+)$- 面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+1+2 = 0$. 若 f 是 $(3,5^+,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+2\times\frac{3}{2} = 0$. 若 f 是 $(4,4,4^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+3\times 1 = 0$. 若 f 是 $(4,5^+,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+2\times\frac{3}{2} = 0$. 若 f 是 $(5^+,5^+,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+3\times 1 = 0$.

假设 $d(f) = 4$. 则 $w(f) = -2$. 由断言 1.2 知, f 是 $(3,3,5^+,5^+)$-面, $(3,4^+,4^+,4^+)$-面, 或 $(4^+,4^+,4^+,4^+)$- 面. 若 f 是 $(3,3,5^+,5^+)$-面,由 R2, $w'(f) \geq -2+2\times 1 = 0$. 若 f 是 $(3,4,4,4)$-面, 由 R2, $w'(f) \geq -2+3\times\frac{2}{3} = 0$. 若 f 是 $(3,4^+,4^+,5^+)$-面, 由 R2, $w'(f) \geq -2+2\times\frac{1}{2}+1 = 0$. 若 f 是 $(4^+,4^+,4^+,4^+)$-面, 由 R2, $w'(f) \geq -2+4\times\frac{1}{2} = 0$.

假设 $d(f) = 5$. 则 $w(f) = -1$. 由断言 1.3 知, f 是 $(3^+,3^+,3^+,4^+,4^+)$-面. 由 R3, $w'(f) \geq -1+2\times\frac{1}{2} = 0$.

假设 $d(f) \geq 6$. 则 $w'(f) = w(f) \geq 0$. □

综上讨论可知, $\forall\ x \in V(G)\cup F(G)$, 都有 $w'(x) \geq 0$. 因此, $-12 = \sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} w(x) = \sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} w'(x) \geq 0$, 矛盾. 因此, 反例不存在, 即引理 4 成立.

情况 2 $\delta(G) = 2$, 且 G 中至多存在 2 个 2-点.

此时执行的权转移规则同情况 1 .

由于图 G 不含有子图形 H_2, $H_8 \sim H_{10}$, 所以图 G 具有如下性质.

断言 2.1 G 中与 2-点关联的 3-面是 $(2,2^+,5^+)$-面.

断言 2.2 G 中与 2-点关联的 4-面是 $(2,3^-,5^+,5^+)$-面, $(2,4^+,4^+,5^+)$-面.

断言 2.3 G 中与 2-点关联的 5-面是 $(2,3^-,5^+,5^+,5^+)$-面, $(2,4^+,4^+,4^+,4^+)$-面.

除了 2-点及其关联的面, 对每个 $x \in V(G)\cup F(G)$, 同情况 1 类似可证 $w'(x) \geq 0$. 对于 2-点关联的面, 有如下断言.

断言 2.4 对每个 2-点关联的面 $f \in F(G)$ 都有 $w'(f) \geq 0$.

假设 $d(f) = 3$, 则 $w(f) = -3$. 由断言 2.1 知, f 是 $(2,2^+,5^+)$-面. 若 f 为 $(2,3^-,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+3 = 0$. 若 f 为 $(2,4,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+1+2 = 0$. 若 f 为 $(2,5^+,5^+)$-面, 由 R1, $w'(f) \geq -3+2\times\frac{3}{2} = 0$.

假设 $d(f) = 4$, 则 $w(f) = -2$. 由断言 2.2 知, f 是 $(2,3^-,5^+,5^+)$-面, $(2,4^+,4^+,5^+)$-面. 若 f 为 $(2,3^-,5^+,5^+)$-面, 由 R2, $w'(f) \geq -2+2\times 1 = 0$. 若 f 为 $(2,4,4,5^+)$-面, 由 R2, $w'(f) \geq -2+2\times\frac{1}{4}+\frac{3}{2} = 0$. 若 f 为 $(2,4^+,5^+,5^+)$-面, 由 R2, $w'(f) \geq -2+2\times 1 = 0$.

假设 $d(f)=5$, 则 $w(f)=-1$. 由断言 2.3 知, f 是 $(2,3^-,5^+,5^+,5^+)$-面, $(2,4^+,4^+,4^+,4^+)$-面. 若 f 为 $(2,3^-,5^+,5^+,5^+)$-面, 由 R3, $w'(f)\geq -1+3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 若 f 为 $(2,4^+,4^+,4^+,4^+)$-面, 由 R3, $w'(f)\geq -1+4\times\frac{1}{4}=0$. □

综上讨论可知, 除了 2-点, $\forall\, x\in V(G)\cup F(G)$, 都有 $w'(x)\geq 0$. 因此, $-12=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} w(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} w'(x)\geq 2\times(-2)=(-4)$, 矛盾. 因此, 反例不存在, 即引理 4 成立.

情况 3 $\delta(G)=2$, 且 G 中至少存在 3 个 2-点.

此时执行的权转移规则为 $R1\sim R4$.

由于 G 不含有子图形 H_2, $H_8\sim H_{14}$, 则 G 具有如下性质.

断言 3.1 与 2-点关联的 3-面为 $(2,3^+,5^+)$-面.

断言 3.2 与 2-点关联的 4-面为 $(2,3,5^+,5^+)$-面或 $(2,4^+,4^+,5^+)$-面.

断言 3.3 与 2-点关联的 5-面为 $(2,3,5^+,5^+,5^+)$-面或 $(2,4^+,4^+,4^+,4^+)$-面.

断言 3.4 两个 2-点不相邻.

断言 3.5 任何 3^+-点 v 至多与 1 个 2-点邻.

断言 3.6 设 v 是与 2-点邻的 k-点 $(k\geq 4)$, 则 v 不与 $(3^-,4^-,k)$-面关联.

设 v 是 2-点, 若点 v 与 3-点相邻, 则称点 v 为特殊 2-点. 否则, 称点 v 为普通 2-点. 由 G 不含子图形 H_{15} , 则下列断言成立.

断言 3.7 图中至多存在一个特殊 2-点.

下面我们通过两个断言来证明 $\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} w'(x)\geq -2$.

断言 3.8 对于特殊 2-点 v, $w'(v)\geq -2$; 对于普通 2-点或 3^+-点 v, $w'(v)\geq 0$.

证明 假设 $d(v)=k$. 令 $v_1,\cdots,v_k$ 是 v 的邻居且在平面上依顺时针方向排列. 令 f_i 是以 vv_i 和 vv_{i+1} 为边界边的面, 其中 $1\leq i\leq k$ 且 $v_{k+1}=v_1$.

假设 $k=2$, 则 $w(v)=-2$. 若 v 为普通 2-点, 则 $n_{4^+}(v)\geq 2$. 由 $R4$, $w'(v)\geq -2+2\times 1=0$. 若 v 为特殊 2-点, 则 $w'(v)\geq -2$. 假设 $k=3$, 则 $w'(v)=w(v)=0$. 所以下面考虑 $k\geq 4$. 由断言 3.5 知, $n_2(v)\leq 1$. 若 $n_2(v)=0$, 则同情况 1 类似可证 $w'(v)\geq 0$. 下面考虑 $n_2(v)=1$, 不妨设 $d(v_1)=2$.

假设 $k=4$, 则 $w(v)=2$. 由 $P1$ 知, $f_3(v)+f_4(v)+f_5(v)\leq 2$. 由断言 3.1 知, $d(f_1)\geq 4$ 且 $d(f_4)\geq 4$. 因此, $f_3(v)\leq 1$. 若 $f_3(v)=1$, 则 $f_4(v)+f_5(v)\leq 1$. 由 G 不含 H_{16} 知与 v 关联的 3-面必为 $(4,5^+,5^+)$-面. 由 $R1\sim R4$, $w'(v)\geq 2-1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. 若 $f_3(v)=0$, 则 $f_4(v)+f_5(v)\leq 2$. 当 $f_4(v)+f_5(v)=2$ 时, 则 f_1 或 f_4 为 4-面或 5-面, 不妨设为 f_1. 由断言 3.2 知, f_1 为 $(2,4,4^+,5^+)$-面或 5-面. 由 $R2\sim R3$ 知 $\tau(v\to f_1)\leq\frac{1}{4}$. 由 $R2\sim R4$, $w'(v)\geq 2-1-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$. 当 $f_4(v)+f_5(v)\leq 1$ 时, 由 $R2\sim R4$, $w'(v)\geq 2-1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

假设 $k=5$, 则 $w(v)=4$. 由 $P1$ 知, $f_3(v)+f_4(v)+f_5(v)\le 2$. 由断言 3.6 知, v 不与 $(3^-,4^-,5)$-面关联. 因此, 由 $R1$ 知 v 至多给关联的 3-面转 $\frac{3}{2}$. 从而由 $R1\sim R4$ 知, $w'(v)\ge 4-1-\frac{3}{2}(f_3(v)+f_4(v)+f_5(v))\ge 4-1-\frac{3}{2}\times 2=0$.

假设 $k\ge 6$, 则 $w(v)=2k-6$. 由 $P1$ 知, $f_3(v)+f_4(v)+f_5(v)\le\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$. 由断言 3.6 知, v 不与 $(3^-,4^-,k)$-面关联. 由 $R1$ 知 v 至多给关联的 3-面转 $\frac{3}{2}$. 由 $R1\sim R4$, $w'(v)\ge 2k-6-1-\frac{3}{2}\times\lfloor\frac{k}{2}\rfloor\ge 2k-7-\frac{3}{4}k=\frac{5}{4}k-7>0$. □

断言 3.9 对每个 $f\in F(G)$ 都有 $w'(f)\ge 0$.

证明 假设 $d(f)\ge 6$, 则 $w'(f)=w(f)\ge 0$. 下面考虑 $3\le d(f)\le 5$. 若面 f 与 2-点关联, 则同情况 2 类似可证. 若面 f 不与 2-点关联, 则同情况 1 类似可证. □

综上讨论可知, 除特殊 2-点外,对 $\forall x\in V(G)\cup F(G)$, 有 $w'(x)\ge 0$. 由断言 3.7 知图中至多存在一个特殊 2-点. 因此, $-12=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)\ge -2$, 矛盾. 因此, 反例不存在, 即引理 4 成立.

情况 4 $\delta(G)=1$.

由于 G 不含子图形 H_{17} 和 H_{18} , 因此图 G 具有如下性质.

断言 4.1 G 中的任何 3-面都是 $(3^-,5^+,5^+)$-面或 $(4^+,4^+,4^+)$- 面.

断言 4.2 G 中与 2-点关联的 4-面为 $(2,5^+,5^+,5^+)$-面.

由于 1-点可能会关联一个非正常 5-面, 我们用 w_s' 来表示 1-点及其关联的非正常 5-面的新权和.

子情形 4.1 G 中存在 1 个 1-点, 至多 2 个 2-点.

此时执行的权转移规则同情况 2 . 显然, 除了 1-点及其关联的非正常 5-面以及 2-点外, 我们可以保证对每个 $x\in V(G)\cup F(G)$, 有 $w'(x)\ge 0$. 而 $w_s'\ge -4+(-1)=-5$. 因此, $-12=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)\ge w_s'+2\times(-2)=-9$, 矛盾. 因此, 反例不存在, 即引理 4 成立.

子情形 4.2 G 中存在 1 个 1-点, 至少 3 个 2-点.

此时执行的权转移规则同情况 3 . 显然, 除了 1-点及其关联的非正常 5-面以及特殊 2-点外, 我们可以保证对每个 $x\in V(G)\cup F(G)$, 有 $w'(x)\ge 0$. 而 $w_s'\ge -4+(-1)=-5$. 因此, $-12=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)\ge w_s'+(-2)=-7$, 矛盾. 因此, 反例不存在, 即引理 4 成立.

子情形 4.3 G 中存在 2 个 1-点.

由 G 不含有子图形 H_{19} , 则 G 中不存在其他的 2^--点, 均为 3^+-点. 此时执行的权转移规则同情况 1 . 显然, 除了 1-点及其关联的非正常 5-面外, 我们可以保证对每个 $x\in V(G)\cup F(G)$, 有 $w'(x)\ge 0$. 而 $w_s'\ge 2\times(-5)=-10$. 因此, $-12=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)}w'(x)\ge w_s'\ge$

-10, 矛盾. 因此, 反例不存在, 即引理 4 成立. □

3. 主要定理的证明

定理 1 若 G 是一个不含相邻 5^--圈的平面图, 则对任意 $k \geq \max\{\Delta, 5\}$, 图 G 是均匀 k- 可染的.

证明 采用反证法. 假设 G 是点数最少的反例图. 若 G 的每个连通分支至多 4 个点, 则 $\Delta \leq 3$. 则对任意 $k \geq \max\{\Delta, 5\} = 5 > \Delta + 1$, 由引理 3 知, 图 G 是均匀 k-可染的. 若 G 有一个连通分支至少 5 个点, 则由引理 4 知, 图 G 至少包含 $H_1 \sim H_{19}$ 的一个子图形. 下面寻找有 k 个顶点的子集 S.

若 G 包含子图形 H_i, $i \in \{2, 4, 7, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18\}$, 令 $S' = \{x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_2, x_1\}$.

若 G 包含子图形 H_i, $i \in \{3, 5, 6, 9, 15\}$, 令 $S' = \{x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3}, x_1\}$.

若 G 包含子图形 H_i, $i \in \{1, 8, 11, 19\}$, 令 $S' = \{x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_1\}$.

下面从 S' 出发构造集合 S. 由引理 2 知 G 是 3-退化的, 所以 $G - S'$ 也是 3-退化的. 在 $G - S'$ 中取最小度点, 然后在所得的子图中再取最小度点, $\cdots$, 这样重复取点, 我们可以得到集合 $S = \{x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots x_2, x_1\}$.

容易验证, 对 $\forall\ x_i \in S$, $1 \leq i \leq k$ 有 $|\ N_G(x_i) - S\ | \leq k - i$.

令 $H = G - S \subseteq G$, $V(H) \subseteq V(G)$, 则 $\Delta(H) \leq \Delta$. 若 $\Delta(H) < \Delta$, 则 $k \geq \max\{\Delta, 5\} \geq \Delta \geq \Delta(H) + 1$. 则由引理 3 知, H 是均匀 k-可染的. 若 $\Delta(H) = \Delta$, 则由 G 的极小性知, H 是均匀 k-可染的. 由引理 1 可知, G 是均匀 k-可染的. □

推论 1 每一个 $\Delta \geq 5$ 且不含相邻 5^--圈的平面图是均匀 Δ-可染的.

结合推论 1 以及文献 [5] 和 [6] 的结果, 我们可以得到以下结论.

定理 2 每一个不含相邻 5^--圈的平面图满足猜想 3.

参考文献

[1] Meyer, W. (1973) Equitable Coloring. *The American Mathematical Monthly*, **80**, 920-922. https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993408

[2] Erdős, P. (1964) Problem 9. In: Fielder, M., Ed., *Theory of Graphs and Its Applications*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 159.

[3] Hajnal, A. and Szemerédi, E. (1970) Proof of a Conjecture of P. Erdős. In: Erdős, P., Rényi, A. and Sós, V., Eds., *Combinatorial Theory and Its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 601-623.

[4] Kierstead, H.A., Kostochka, A.V., Mydlarz, M. and Szemerédi, E. (2010) A Fast Algorithm for Equitable Coloring. *Combinatorica*, **30**, 217-224. https://doi.org/10.1007/s00493-010-2483-5

[5] Chen, B.L., Lih, K.W. and Wu, P.L. (1994) Equitable Coloring and the Maximum Degree. *European Journal of Combinatorics*, **15**, 443-447. https://doi.org/10.1006/eujc.1994.1047

[6] Kierstead, H.A. and Kostochka, A.V. (2012) Every 4-Colorable Graph with Maximum Degree 4 Has an Equitable 4-Coloring. *Journal of Graph Theory*, **71**, 31-48. https://doi.org/10.1002/jgt.20630

[7] Chen, B.L. and Lih, K.W. (1994) Equitable Coloring of Trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **61**, 83-87. https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1032

[8] Lih, K.W. and Wu, P.L. (1996) On Equitable Coloring of Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **151**, 155-160. https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00092-W

[9] Wang, W.F. and Zhang, K.M. (2000) Equitable Colorings of Line Graphs and Complete r-Partite Graphs. *Journal of Systems Science and Complexity*, **13**, 190-194.

[10] Kostochka, A.V. (2002) Equitable Colorings of Outerplanar Graph. *Discrete Mathematics*, **258**, 373-377. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00538-1

[11] Kostochka, A.V. and Nakprasit, K. (2003) Equitable Colorings of k-Degenerate Graphs. Combinatorics, *Probability and Computing*, **12**, 53-60. https://doi.org/10.1017/S0963548302005485

[12] Yap, H.P. and Zhang, Y. (1998) Equitable Colorings of Planar Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **27**, 97-105.

[13] Nakprasit, K. (2012) Equitable Colorings of Planar Graphs with Maximum Degree at Least Nine. *Discrete Mathematics*, **312**, 1019-1024. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.11.004

[14] Zhu, J.L. and Bu, Y.H. (2008) Equitable List Colorings of Planar Graphs without Short Cycles. *Theoretical Computer Science*, **407**, 21-28. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.04.018

[15] 王维凡, 桂浩. 不含4-和5-圈的平面图的均匀染色[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(1): 1-6.

[16] Zhu, J.L., Bu, Y.H. and Min, X. (2015) Equitable List-Coloring for C_5-Free Plane Graphs without Adjacent Triangles. *Graphs and Combinatorics*, **31**, 795-804. https://doi.org/10.1007/s00373-013-1396-7

[17] Dong, A.J. and Wu, J.L. (2019) Equitable Coloring and Equitable Choosability of Planar Graphs without Chordal 4- and 6-Cycles. *Discrete Mathematics Theoretical Computer Science*, **21**, 1-21.

[18] Sittitrai, P. and Nakprasit, K. (2022) Planar Graphs without Mutually Adjacent 3-, 5-, and 6-Cycles Are 3-Degenerate. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 112942. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.112942