

Legendre谱方法求解第二类Fredholm积分方程

董帅鑫¹, 陈冲^{2*}

¹西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充

²西华师范大学公共数学学院, 四川 南充

收稿日期: 2023年2月15日; 录用日期: 2023年3月11日; 发布日期: 2023年3月20日

摘要

本文提出了非奇异的第二类Fredholm积分方程求解的Legendre谱方法。首先作积分变换, 然后应用Legendre-Gauss求积公式与级数展开法分别对积分项与未知函数做近似, 再对变换后的积分方程求近似解, 并进行误差分析, 最后通过数值算例, 验证了该方法的可行性与有效性。

关键词

第二类Fredholm积分方程, Legendre-Gauss求积公式, 级数展开法

The Legendre Spectral Method for Numerical Solution of the Second Fredholm Integral Equation

Shuaixin Dong¹, Chong Chen^{2*}

¹College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

²College of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Feb. 15th, 2023; accepted: Mar. 11th, 2023; published: Mar. 20th, 2023

Abstract

In this paper, a Legendre spectral method for solving the second Fredholm integral equation is presented. Firstly, the integral transformation is performed, and then the Legendre-Gauss qua-

*通讯作者。

drative formula combined with series expansion method are used to approximate the integral term and the unknown function, and then the approximate solution of the transformed integral equation is obtained, and the error analysis is carried out. Finally, the feasibility and effectiveness of the method are verified by numerical examples.

Keywords

Fredholm Integral Equation of the Second Kind, Legendre-Gauss Quadrative Formula, Series Expansion Method

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

积分方程是现代数学研究的一个关注点, 随着时间的发展, 积分方程在现代社会中应用的重要性越发的突显出来, 生产及生活实践中抽象概括出的许多模型要么是积分方程, 要么是可以转化为积分方程来求解。但是大部分积分方程求解较为复杂, 这就使得众多的专家学者对此进行了深入的研究, 提出了许多行之有效的解决方案, 目前主要的解决方法有 Nyström 法[1] [2]、小波法[3] [4]、配置法[5] [6] [7]、神经网络法[8]、迭代法[9]等。

本文将介绍谱方法在求解积分方程中的应用。谱方法的优秀之处在于其具有“无穷阶收敛性”, 即如果积分方程的解是充分光滑的, 那么谱方法的收敛阶是无穷阶的[10]。目前对于积分项的处理方法中有 Gauss 求积公式与 Lagrange 插值相结合的模式[11] [12] [13], 本文将应用 Gauss 求积公式与函数的级数展开法相结合的方法对第二类非奇异积分方程进行研究。

考虑第二类 Fredholm 积分方程[14], 形如

$$u(x) + \int_a^b k(x,s)u(s)ds = g(x), \quad x \in [a,b] \quad (1)$$

其中 $k(x,s)$ 为连续核函数, 自由项 $g(x)$ 为连续函数, $u(x)$ 是未知密度函数。

2. Legendre 谱方法

首先, 对方程(1)式应用作积分变换

$$s = s(x,\theta) = \frac{b-a}{2}\theta + \frac{a+b}{2}, \quad \theta \in [-1,1] \quad (2)$$

化为

$$u(x) + \int_{-1}^1 \tilde{k}(x,s(x,\theta))u(s(x,\theta))d\theta = g(x), \quad \theta \in [-1,1] \quad (3)$$

其中

$$\tilde{k}(x,s(x,\theta)) = \frac{1}{2}k(x,s(x,\theta)).$$

其次, 对(3)式进行离散化。将函数 $u(x)$ 在 Legendre-Gauss 点上利用级数展开法展开, 得到

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=0}^N a_j u_j(x), \quad j=0,1,\dots,N \quad (4)$$

其中 a_j 为系数, $u_j(x)$ 为 Legendre 多项式的基函数。

假设(3)式在 Legendre-Gauss 点 $\{x_i\}_{i=0}^N$ 上成立, 其中

$$x_i = \cos \frac{i}{N} \pi, \quad i=0,1,\dots,N$$

则有

$$u(x_i) + \int_{-1}^1 \tilde{k}(x_i, s(x_i, \theta)) u(s(x_i, \theta)) d\theta = g(x_i), \quad i=0,1,\dots,N \quad (5)$$

将(4)式代入(5)式, 得

$$\sum_{j=0}^N a_j u_j(x_i) + \int_{-1}^1 \tilde{k}(x_i, s(x_i, \theta)) \sum_{j=0}^N a_j u_j(s(x_i, \theta)) d\theta = g(x_i), \quad i=0,1,\dots,N \quad (6)$$

对(6)式应用 Legendre-Gauss 求积公式, 有

$$\sum_{j=0}^N a_j \left(u_j(x_i) + \sum_{p=0}^N \tilde{k}(x_i, s(x_i, \theta_p)) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p \right) = g(x_i), \quad i=0,1,\dots,N \quad (7)$$

(7)式可化为矩阵方程 $\mathbf{KA} = \mathbf{G}$, 其中

$$\mathbf{K} = u_j(x_i) + \sum_{p=0}^N \tilde{k}(x_i, s(x_i, \theta_p)) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p$$

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$$

$$\mathbf{G} = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)]^T, \quad i, j=0,1,\dots,N$$

最后, 求解方程组(7)式。

3. 预备知识

本节中的引理均基于 Jacobi 多项式。首先, 给定区间

$$\Lambda = [-1, 1]$$

然后定义 \mathcal{P}_N 为次数不超过 N 次的 Jacobi 多项式空间。设 $u_j(x)$ 为 j 次多项式, 其中 $j=0,1,\dots,N$, 即

$$\mathcal{P}_N = \text{span}\{u_0(x), u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

Jacobi 多项式的权函数为

$$\omega^{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

其中 $\alpha, \beta > -1$, 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, Jacobi 多项式将转变为 Legendre 多项式。

加权空间[15]定义为:

$$L_{\omega^{\alpha, \beta}}^2(\Lambda) = \left\{ u : u \text{ 是可测函数, 且 } \|u\|_{L_{\omega^{\alpha, \beta}}^2(\Lambda)} < \infty \right\}$$

其中

$$\|u\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)} = \left(\int_{-1}^1 \omega^{\alpha,\beta}(x) u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

此外, 定义空间[16]

$$H^m_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda) = \{v : D^k u \in L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda), 0 \leq k \leq m\}$$

有范数[17]

$$\|u\|_{H^{m:N}_{\omega^{\alpha,\beta}}} = \left(\sum_{k=0}^m \|D^k u\|_{\omega^{\alpha,\beta}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$D^k u = \frac{d^k u}{dx^k}$$

半范数定义为[17]

$$|u|_{H^{m:N}_{\omega^{\alpha,\beta}}} = \left(\sum_{k=\min(m,N+1)}^m \|D^k u\|_{\omega^{\alpha,\beta}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\omega^{\alpha,\beta}(x)=1$ 时, $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)$, $H^m_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)$ 和 $\|\cdot\|_{\omega^{\alpha,\beta}}$ 分别用 $L^2(\Lambda)$, $H^m(\Lambda)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示. 定义正交投影算子 $\Pi_N^{\alpha,\beta} : L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}_N$, 对任意的 $u \in L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)$, $u_N \in \mathcal{P}_N$, 满足

$$(\Pi_N^{\alpha,\beta} u, u_N)_{\omega^{\alpha,\beta}} = (u, u_N)_{\omega^{\alpha,\beta}}.$$

引理 1 [18] 假设函数 $u \in L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)$, 存在与 u 无关的常数 C , 使得

$$\|\Pi_N^{\alpha,\beta} u\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)} \leq C \|u\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)}, \quad \|\Pi_N^{\alpha,\beta} u\|_{\infty} \leq C \|u\|_{\infty}$$

引理 2 [16] 对任意的函数 $u \in L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)$, 且 $m \geq 1$, 存在与 u 无关的常数 C , 使得

1) 当 $\alpha, \beta > -1$ 时, 有

$$\|u - \Pi_N^{\alpha,\beta} u\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)} \leq CN^{-m} |u|_{H^{m:N}_{\omega^{\alpha,\beta}}}.$$

2) 当 $-1 < \alpha, \beta < 0$ 时, 有

$$\|u - \Pi_N^{\alpha,\beta} u\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} |u|_{H^{m:N}_{\omega^{\alpha,\beta}}}.$$

引理 3 [19] 使用 $N+1$ 个 Legendre-Gauss 点的 Gauss 求积公式来离散内积 (u, ϕ) 得 $(u, \phi)_{\omega^{\alpha,\beta}, N}$, 其中函数 $u \in L^m_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)$, 且常数 $m \geq 1$, $\phi \in \mathcal{P}_N$, 则存在无关的常数 C , 有

$$\left| \int_{-1}^1 u(x) \phi(x) \omega^{\alpha,\beta}(x) dx - (u, \phi)_{\omega^{\alpha,\beta}, N} \right| \leq CN^{-m} |u|_{H^{m:N}_{\omega^{\alpha,\beta}}} \|\phi\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)}$$

成立。

引理 4 (Gronwall 不等式[16]) 设常数 $C \geq 0$, 且 $E(x)$ 是非负可积函数, 满足

$$E(x) \leq C \int_{-1}^x E(s) ds + G(x), \quad x \in [-1, 1],$$

其中 $G(x)$ 是可积函数, 且

$$\|E\|_{L^p_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)} \leq C \|G\|_{L^p_{\omega^{\alpha,\beta}}(\Lambda)}, \quad p \geq 1.$$

4. 误差分析

本节将对文中所提出的 Legendre 谱方法在模 $\|\cdot\|_{L^2(\Lambda)}$ 与 $\|\cdot\|_{\infty}$ 下进行误差分析, 需将方程转化为算子形式与内积形式表述。

首先将(3)式转化为算子方程, 有

$$u + Ku = g \quad (8)$$

其中

$$Ku = \int_{-1}^1 \tilde{k}(x, s(x_i, \theta)) u(s(x, \theta)) d\theta$$

Legendre 谱方法的近似解 u_N 满足下列格式

$$(u_N, v_N)_{\omega} + (\Pi_N^{\alpha,\beta} K u_N, v_N)_{\omega} = (\Pi_N^{\alpha,\beta} g, v_N)_{\omega} \quad (9)$$

其中 v_N 为 \mathcal{P}_N 空间的任意 Legendre 多项式。

设

$$I(x) = Ku_N - K_N u_N = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} k(x_i, s(x_i, \theta_p)) u_N(s(x_i, \theta_p)) - \sum_{p=0}^N \frac{1}{2} k(x_i, s(x_i, \theta_p)) u_N(s(x_i, \theta_p)) \omega_p \quad (10)$$

其中 $i = 0, 1, \dots, N$ 。有

$$(u_N, v_N)_{\omega} + (\Pi_N^{\alpha,\beta} K u_N - \Pi_N^{\alpha,\beta} I(x), v_N)_{\omega} = (\Pi_N^{\alpha,\beta} g, v_N)_{\omega} \quad (11)$$

使得

$$u_N + (\Pi_N^{\alpha,\beta} K u_N - \Pi_N^{\alpha,\beta} I(x)) = \Pi_N^{\alpha,\beta} g \quad (12)$$

为了便于考察 Legendre 谱方法的误差, 引入辅助解 $\tilde{u}_N \in \mathcal{P}_N$, 有

$$(\tilde{u}_N, v_N)_{\omega, N} + (K \tilde{u}_N, v_N)_{\omega, N} = (g, v_N)_{\omega, N} \quad (13)$$

从而有

$$(\tilde{u}_N, v_N)_{\omega} + (\Pi_N^{\alpha,\beta} K \tilde{u}_N, v_N)_{\omega} = (\Pi_N^{\alpha,\beta} g, v_N)_{\omega}$$

即

$$\tilde{u}_N + \Pi_N^{\alpha,\beta} K \tilde{u}_N = \Pi_N^{\alpha,\beta} g \quad (14)$$

定理 4.1 设函数 u 与函数 \tilde{u}_N 分别是(8)式与(14)式的解, 如果 $u \in H^m(\Lambda)$, 则有

$$\|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} |u|_{H^m}, \quad \|u - \tilde{u}_N\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} |u|_{H^m}$$

证明 首先证明 $\|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} |u|_{H^m}$ 。

(8)式与(14)式作差得

$$u - \tilde{u}_N + Ku - \Pi_N^{\alpha,\beta} K \tilde{u}_N = g - \Pi_N^{\alpha,\beta} g \quad (15)$$

其中 $Ku - \Pi_N^{\alpha,\beta} K \tilde{u}_N$ 变形为

$$\begin{aligned}
& Ku - \Pi_N^{\alpha, \beta} K \tilde{u}_N \\
&= Ku - \Pi_N^{\alpha, \beta} K \tilde{u}_N + \Pi_N^{\alpha, \beta} Ku - \Pi_N^{\alpha, \beta} K \tilde{u}_N \\
&= Ku - \Pi_N^{\alpha, \beta} K \tilde{u}_N + K(u - \tilde{u}_N) - (K(u - \tilde{u}_N) - \Pi_N^{\alpha, \beta} K(u - \tilde{u}_N)) \\
&= g - \Pi_N^{\alpha, \beta} g - (u - \Pi_N^{\alpha, \beta} \tilde{u}_N) + K(u - u_N) - (K(u - \tilde{u}_N) - \Pi_N^{\alpha, \beta} K(u - \tilde{u}_N))
\end{aligned}$$

设 $e = u - \tilde{u}_N$, 则可表示为

$$Ku - \Pi_N^{\alpha, \beta} K \tilde{u}_N = g - \Pi_N^{\alpha, \beta} g - (u - \Pi_N^{\alpha, \beta} \tilde{u}_N) + Ke - (Ke - \Pi_N^{\alpha, \beta} Ke) \quad (16)$$

将(16)式代入到(15)式, 有

$$e = (u - \Pi_N^{\alpha, \beta} u_N) - Ke + (Ke - \Pi_N^{\alpha, \beta} Ke) = J_1 - Ke + J_2$$

其中

$$\begin{aligned}
J_1 &= u - \Pi_N^{\alpha, \beta} \tilde{u}_N \\
J_2 &= Ke - \Pi_N^{\alpha, \beta} Ke \\
Ke &= \int_{-1}^1 \tilde{k}(x, s(x, \theta)) e(s(x, \theta)) d\theta
\end{aligned}$$

从而有

$$|e| \leq |J_1| + |Ke| + |J_2| \quad (17)$$

根据引理 4, 得

$$\|e(x)\|_{L^2(\Lambda)} \leq C(\|J_1\|_{L^2(\Lambda)} + \|J_2\|_{L^2(\Lambda)})$$

对于 $\|J_1\|_{L^2(\Lambda)}$ 根据引理 2, 有

$$\|J_1\|_{L^2(\Lambda)} = \|u - \Pi_N^{\alpha, \beta} u\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} |u|_{H^m}$$

对于 $\|J_2\|_{L^2(\Lambda)}$ 不妨取 $m=1$, 有 $|\cdot|_{H^1} = |\cdot|_H = \|\cdot\|_{L^2(\Lambda)}$, 所以

$$\|J_2\|_{L^2(\Lambda)} = \|Ke - \Pi_N^{\alpha, \beta} Ke\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} |Ke|_{H^1} = CN^{-1} \|Ke\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-1} \|e\|_{L^2(\Lambda)}$$

综上所述, 当 N 足够大时, 使得 $CN^{-1} < 1$, 有

$$\|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} |u|_{H^m} \quad (18)$$

下面证明 $\|u - \tilde{u}_N\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} |u|_{H^m}$ 。

由于 $|e| \leq |J_1| + |Ke| + |J_2|$, 且根据 Gronwall 不等式, (17)式有

$$\|e(x)\|_{\infty} \leq C(\|J_1\|_{\infty} + \|J_2\|_{\infty})$$

对于 $\|J_1\|_{\infty}$ 根据引理 2, 有

$$\|J_1\|_{\infty} = \|u - \Pi_N^{\alpha, \beta} u\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} |u|_{H^m}$$

对于 $\|J_2\|_{\infty}$ 同理, 取 $m=1$, 有

$$\|J_2\|_{\infty} = \|Ke - \Pi_N^{\alpha, \beta} Ke\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} |Ke|_{H^1} = CN^{-1} \|Ke\|_{\infty} \leq CN^{-\frac{1}{4}} \|e(s(x, \theta))\|_{\infty}$$

综上所述, 当 N 足够大时, 使得 $CN^{-\frac{1}{4}} < 1$, 有

$$\|u - \tilde{u}_N\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} \|u\|_{H^m} \quad (19)$$

定理 4.2 设函数 u 是(3)式的解, 且 $u \in H^m(\Lambda)$, 函数 u_N 为(9)式的 Legendre 谱方法的逼近解, 则下列误差估计式成立

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} \|u\|_{H^{m:N}} + CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u\|_{L^2(\Lambda)}$$

$$\|u - u_N\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} \|u\|_{H^{m:N}} + CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u\|_{\infty}$$

证明首先用(12)式减去(14)式, 有

$$u_N - \tilde{u}_N + \Pi_N^{\alpha, \beta} (Ku_N - K\tilde{u}_N) - \Pi_N^{\alpha, \beta} I(x) = 0$$

设 $E = u_N - \tilde{u}_N$, 即

$$E + \Pi_N^{\alpha, \beta} KE - \Pi_N^{\alpha, \beta} I(x) = 0$$

变形得

$$E = -\Pi_N^{\alpha, \beta} KE + \Pi_N^{\alpha, \beta} I(x) = KE - KE - \Pi_N^{\alpha, \beta} KE + \Pi_N^{\alpha, \beta} I(x) = -KE + Q + \Pi_N^{\alpha, \beta} I(x)$$

其中 $Q = KE - \Pi_N^{\alpha, \beta} KE$ 。

因为

$$|E| \leq |KE| + |Q| + |\Pi_N^{\alpha, \beta} I(x)| \quad (20)$$

所以, 根据引理 4, 有

$$\|E\|_{L^2(\Lambda)} \leq \|Q\|_{L^2(\Lambda)} + \|\Pi_N^{\alpha, \beta} I(x)\|_{L^2(\Lambda)}$$

其中

$$\|Q\|_{L^2(\Lambda)} = \|KE - \Pi_N^{\alpha, \beta} KE\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} \|E\|_{H^m}$$

$$\begin{aligned} \|\Pi_N^{\alpha, \beta} I(x)\|_{L^2(\Lambda)} &= \|\Pi_N^{\alpha, \beta} (Ku_N - K_N u_N)\|_{L^2(\Lambda)} \leq C \|Ku_N - K_N u_N\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u_N\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u\|_{L^2(\Lambda)}. \end{aligned}$$

所以, 当 N 足够大时, 有

$$\|u_N - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u\|_{L^2(\Lambda)} \quad (22)$$

根据三角不等式, 同时结合引理 1 与(21)式和(22)式, 有

$$\|u - u_N\|_{\infty} \leq \|u - \tilde{u}_N\|_{\infty} + \|u_N - \tilde{u}_N\|_{\infty} \leq CN^{\frac{3}{4}-m} \|u\|_{H^{m:N}} + CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u\|_{\infty}$$

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq \|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Lambda)} + \|u_N - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} \|u\|_{H^{m:N}} + CN^{-m} \left| k(x, s(x, \theta)) \right|_{H^m} \|u\|_{L^2(\Lambda)}$$

5. 数值算例

例 1 [14]求积分方程

$$u(x) + \int_0^1 x(e^{xs} - 1)u(s)ds = g(x) \quad (23)$$

的近似解, 其中 $g(x) = e^x - x$, 精确解为 $u(x) \equiv 1$ 。

解 利用本文提出的 Legendre 谱方法, 先将根据(2)式, 将积分区间 $[0,1]$ 化为 $[-1,1]$, 即

$$u(x) + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x(e^{xs(x,\theta)} - 1)u(s(x,\theta))d\theta = g(x), \quad \theta \in [-1,1]$$

对上式根据(3)式离散化后, 取

$$x_i = \cos \frac{i}{N} \pi, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

应用(5)式和(6)式, 有

$$\sum_{j=0}^N a_j \left(u_j(x_i) + \sum_{p=0}^N \frac{1}{2} x \left(e^{x_i s(x_i, \theta_p)} - 1 \right) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p \right) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (24)$$

将(24)式转化为矩阵形式, 有 $\mathbf{KA} = \mathbf{G}$, 其中

$$\mathbf{K} = u_j(x_i) + \sum_{p=0}^N \frac{1}{2} x \left(e^{x_i s(x_i, \theta_p)} - 1 \right) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p$$

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T, \quad \mathbf{G} = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)]^T, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

当 $N = 2$ 时, 应用 MATLAB 计算有

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1.2355 & -0.6224 & 0.3931 \\ 1.000 & -0.000 & -0.5000 \\ 1.3951 & 1.0469 & 0.4139 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = (1.2355 \quad 1.000 \quad 1.3951)^T$$

从而有

$$\mathbf{A} = (1.000 \quad 0.000 \quad -0.000)^T$$

进而, 近似解为 $\tilde{u}(x) = 1$ 。

在文献[14]中的近似解为

$$\tilde{u}(x) = e^x - x(0.6666e^{0.5x} + 0.1666e^x) - 0.1668x$$

若取节点

$$x_0 = 0.0, \quad x_1 = 0.2, \quad x_3 = 0.4, \quad x_4 = 0.6, \quad x_5 = 0.8, \quad x_6 = 1.0$$

则 Legendre 谱方法与 Simpson 方法所得近似解分别与精确解的对比见表 1 与图 1。

由表 1 可知, 当 $N = 2$ 时, 比较本文提出的方法的绝对误差与文献[14]提出的 Simpson 方法的绝对误差可以发现, 本文所提出的方法的绝对误差比文献[14]中的误差要小得多。

由图 1 可知, 当 $N = 2$ 时, 仅在节点为 $x_0 = 0.0$ 时, 本文提出的 Legendre 谱方法与文献[14]提出的 Simpson 方法, 二者结果与精确解一致, 但随着节点的变动, 越接近 1, Simpson 方法误差越大, 而 Legendre 谱方法的误差依然很小, 这是由于 Legendre 谱方法选取的节点是非等距的, 且代数精度为 $2n + 1$, Simpson 方法选取的节点是等距节点, 且代数精度为 n , 这也很好的说明了本文提出的 Legendre 谱方法要优于文献[14]提出的 Simpson 方法。

Table 1. Example 1 Error comparison between the Legendre spectral method and Simpson method for $N = 2$
表 1. 例 1 $N = 2$ 时, Legendre 谱方法近似解与 Simpson 方法近似解的误差对比表

节点	精确解	本文结果	Simpson 方法结果	本文绝对误差	Simpson 方法绝对误差
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	0	0.000000
0.2	1.000000	1.000000	1.000042	0	4.231e-6
0.4	1.000000	1.000000	1.000015	0	1.4668e-5
0.6	1.000000	1.000000	1.000010	0	1.0276e-5
0.8	1.000000	1.000000	0.999921	0	7.9441e-5
1.0	1.000000	1.000000	0.999578	0	4.21523e-4

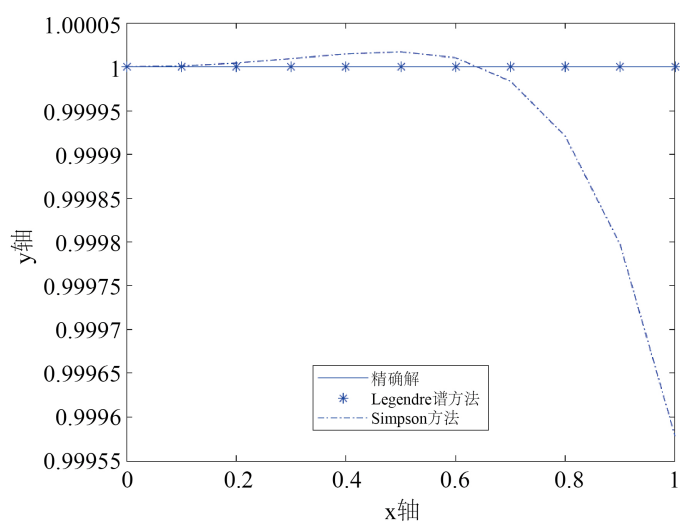


Figure 1. Example 1 Error comparison chart between the Legendre spectral method and Simpson method for $N = 2$

图 1. 例 1 $N = 2$ 时, Legendre 谱方法近似解与 Simpson 方法近似解的误差对比图

例 2 [14] 求积分方程

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 u(s) ds = g(x) \quad (25)$$

的近似解, 其中 $g(x) = e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$, 精确解为 $u(x) = e^x$ 。

解 利用本文提出的 Legendre 谱方法, 先将根据(2)式, 将积分区间 $[0,1]$ 化为 $[1,1]$, 即

$$u(x) - \int_{-1}^1 \frac{1}{4} u(s(x,\theta)) d\theta = g(x), \quad \theta \in [-1,1]$$

对上式根据(3)式离散化后, 取

$$x_i = \cos \frac{i}{N} \pi, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

应用(5)式和(6)式, 有

$$\sum_{j=0}^N a_j \left(u_j(x_i) - \frac{1}{4} \sum_{p=0}^N u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p \right) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (26)$$

将(26)式转化为矩阵形式, 有 $\mathbf{KA} = \mathbf{G}$, 其中

$$\mathbf{K} = u_j(x_i) - \frac{1}{4} \sum_{p=0}^N u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p$$

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T, \quad \mathbf{G} = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)]^T, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

当 $N = 2$ 时, 应用 MATLAB 计算有

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0.5000 & -1.0246 & 0.4000 \\ 0.5000 & 0.2500 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5246 & 0.4000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = (-0.3983 \quad 0.1409 \quad 1.3106)^T$$

从而有

$$\mathbf{A} = (1.1836 \quad 1.1030 \quad 0.3503)^T$$

进而, 近似解为

$$\tilde{u}(x) = 1.1836 + 1.1030x + 0.3503 \times \frac{3x^2 - 1}{2}$$

对(25)式应用 Simpson 方法[14], 近似解为

$$\tilde{u}(x) = e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + 0.8597x$$

若取节点

$$x_0 = 0.0, \quad x_1 = 0.2, \quad x_3 = 0.4, \quad x_4 = 0.6, \quad x_5 = 0.8, \quad x_6 = 1.0$$

则 Legendre 谱方法与 Simpson 方法所得近似解分别与精确解的对比见表 2 与图 2。

由表 2 可知, 当 $N = 2$ 时, 比较本文提出的方法的绝对误差与文献[14]提出的 Simpson 方法的绝对误差可以发现, 本文所提出的方法的绝对误差比文献[14]中的误差要小得多。

由图 2 可知, 当 $N = 2$ 时, 本文提出的 Legendre 谱方法与文献[14]提出的 Simpson 方法, 二者结果与精确解相比较发现, 虽然随着节点的变动, 越往后走, Simpson 方法误差逐渐减小, 但是总体来看, 本文提出的 Legendre 谱方法相比较文献[14]提出的 Simpson 方法更具有优势。

Table 2. Example 2 Error comparison between the Legendre spectral method and Simpson method for $N = 2$

表 2. 例 2 $N = 2$ 时, Legendre 谱方法近似解与 Simpson 方法近似解的误差对比表

节点	精确解	本文结果	Simpson 方法结果	本文绝对误差	Simpson 方法绝对误差
0.0	1.0000	1.0084	0.1409	0.0084	0.8591
0.2	1.2214	1.2500	0.4702	0.0286	0.7512
0.4	1.4918	1.5337	0.8486	0.0419	0.6433
0.6	1.8221	1.8594	1.2868	0.0373	0.5353
0.8	2.2255	2.2272	1.7982	0.0016	0.4274
1.0	2.7182	2.6370	2.3988	0.0813	0.3194

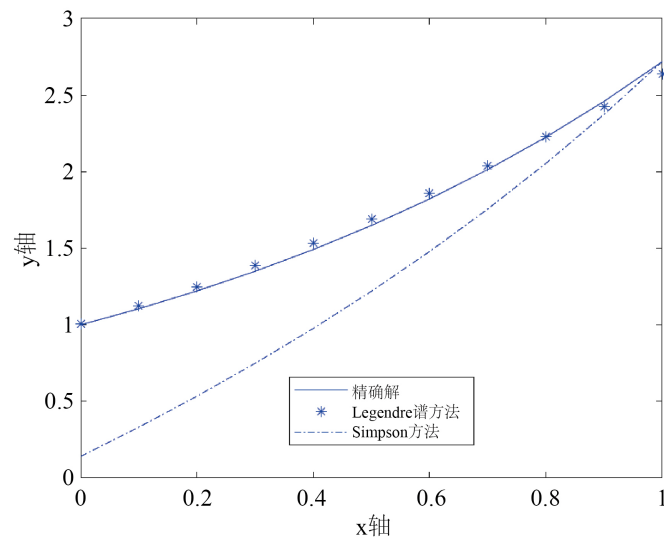


Figure 2. Example 2 Error comparison chart between the Legendre spectral method and Simpson method for $N = 2$

图 2. 例 2 $N = 2$ 时, Legendre 谱方法近似解与 Simpson 方法近似解的误差对比图

例 3 求积分方程

$$u(x) = \int_{-1}^1 (xs^2 - x)u(s)ds + g(x) \quad (27)$$

的数值解, 其中 $g(x) = \frac{4}{3}x + 1$, 精确解为 $u(x) \equiv 1$ 。

解 利用本文提出的 Legendre 谱方法, 取

$$x_i = \cos \frac{i}{N} \pi, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

应用(5)式和(6)式, 有

$$\sum_{j=0}^N a_j \left(u_j(x_i) - \sum_{p=0}^2 \left(x(s(x_i, \theta_p))^2 - x \right) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p \right) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (28)$$

将(26)式转化为矩阵形式, 有 $\mathbf{KA} = \mathbf{G}$, 其中

$$\mathbf{K} = u_j(x_i) - \sum_{p=0}^2 \left(x(s(x_i, \theta_p))^2 - x \right) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p$$

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T, \quad \mathbf{G} = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)]^T$$

当 $N = 2$ 时, 应用 MATLAB 计算有

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8889 & 0.6667 & 0.1778 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = (2.0000 \quad 0.8889 \quad 0.0000)^T$$

从而有

$$\mathbf{A} = (1.000 \quad 0.000 \quad 0.000)^T$$

进而, 近似解为 $\tilde{u}(x) = 1$ 。

对(27)式应用 Simpson 方法[14], 近似解为 $\tilde{u}(x) = 0.5333x + 1$ 。

若取节点

$$x_0 = 0.0, x_1 = 0.2, x_3 = 0.4, x_4 = 0.6, x_5 = 0.8, x_6 = 1.0$$

则 Legendre 谱方法与 Simpson 方法所得近似解分别与精确解的对比见表 3。

Table 3. Example 3 Error comparison between the Legendre spectral method and Simpson method for $N = 2$

表 3. 例 3 $N = 2$ 时, Legendre 谱方法近似解与 Simpson 方法近似解的误差对比表

节点	精确解	本文结果	Simpson 方法结果	本文绝对误差	Simpson 方法绝对误差
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0	0.0000
0.2	1.0000	1.0000	1.1067	0	0.1067
0.4	1.0000	1.0000	1.2133	0	0.2133
0.6	1.0000	1.0000	1.3140	0	0.3140
0.8	1.0000	1.0000	1.4266	0	0.4266
1.0	1.0000	1.0000	1.5333	0	0.5333

由表 3 可知, 当 $N = 2$ 时, 比较本文提出的方法的绝对误差与文献[14]提出的 Simpson 方法的绝对误差可以发现, 本文所提出的方法的绝对误差比文献[14]中的误差要小得多。

例 4 求积分方程

$$u(x) + \int_0^1 (x^2 s + x s^2) u(s) ds = g(x) \quad (29)$$

的近似解, 其中 $g(x) = x$, 精确解为 $u(x) = -\frac{80}{359}x^2 + \frac{300}{359}x$ 。

解 利用本文提出的 Legendre 谱方法, 先将根据(2)式, 将积分区间 $[0, 1]$ 化为 $[1, 1]$, 即

$$u(x) + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (x^2 s(x, \theta) + x s^2(x, \theta)) u(s(x, \theta)) d\theta = g(x), \quad \theta \in [-1, 1]$$

对上式根据(3)式离散化后, 取

$$x_i = \cos \frac{i}{N} \pi, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

应用(5)式和(6)式, 有

$$\sum_{j=0}^N a_j \left(u_j(x_i) + \sum_{p=0}^N \frac{1}{2} (x_i^2 s(x_i, \theta_p) + x_i s^2(x_i, \theta_p)) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p \right) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (30)$$

将(30)式转化为矩阵形式, 有 $\mathbf{KA} = \mathbf{G}$, 其中

$$\mathbf{K} = u_j(x_i) + \sum_{p=0}^N \frac{1}{2} \left(x_i^2 s(x_i, \theta_p) + x_i \left(\frac{1}{2} s^2(x_i, \theta_p) \right) \right) u_j(s(x_i, \theta_p)) \omega_p$$

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$$

$$\mathbf{G} = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)]^T, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

对(30)式进行数值分析, $\|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}$ 与 $\|u - u_N\|_\infty$ 的 Legendre 谱方法的误差估计对比见表 4。

Table 4. Example 4 Error analysis of the Legendre spectral Method

表 4. 例 4 Legendre 谱方法误差分析

N	2	4	6	8	10
$\ u - u_N\ _{L^2(\Lambda)}$	1.4131e-15	1.4131e-15	1.4131e-15	2.3773e-15	1.0014e-15
$\ u - u_N\ _\infty$	9.9920e-16	9.9920e-16	0	8.1210e-16	9.9920e-16

由表 4 可以看出, 由于本文所提出方法是基于 Legendre 多项式零点的 Gauss 求积公式的, 核函数 $k(x, s) = x^2s + xs^2$ 在节点处收敛速度较快, 且对未知函数部分做近似处理, 所以在 $N = 2$ 时, 本文所提出的方法误差已经比较小, 在后续的 $N = 4$, $N = 6$, $N = 8$, $N = 10$ 的情况时, 误差波动幅度不大。例如在 $N = 4$ 和 $N = 8$ 时, 见表 5 和表 6。

Table 5. Example 4 Legendre approximate solution and error of spectral method for $N = 4$

表 5. 例 4 $N = 4$ 时, Legendre 谱方法近似解及误差

节点	精确解	$N = 4$	结对误差
0.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.2	0.158217270194986	0.158217270194986	0.0000000000000000
0.4	0.298607242339833	0.298607242339832	9.99200722162641e-16
0.6	0.421169916434540	0.421169916434540	0.0000000000000000
0.8	0.525905292479109	0.525905292479108	9.99200722162641e-16
1.0	0.612813370473538	0.612813370473538	0.0000000000000000

Table 6. Example 4 Legendre spectral Method approximate solution and error for $N = 8$

表 6. 例 4 $N = 8$ 时, Legendre 谱方法近似解解及误差

节点	精确解	$N = 8$	绝对误差
0.0	0.0000000000000000	-8.121003610813205e-16	8.1210036108132e-16
0.2	0.158217270194986	0.158217270194986	0.0000000000000000
0.4	0.298607242339833	0.298607242339833	0.0000000000000000
0.6	0.421169916434540	0.421169916434541	9.9920072216264e-16
0.8	0.525905292479109	0.525905292479109	0.0000000000000000
1.0	0.612813370473538	0.612813370473540	1.99840144432528e-15

6. 总结

本文利用 Legendre 谱方法对第二类 Fredholm 积分方程的解法做了新的探究, 并对其进行了误差分析, 说明了该方法的可行性与有效性, 并且在数值算例中与 Simpson 方法做了比较。

基金项目

国家自然科学基金青年基金项目: (11801456); 博士启动基金项目: (17E083)。

参考文献

- [1] Barrera, D., Bartoň, M., Chiarella, I. and Remogna, S. (2022) On Numerical Solution of Fredholm and Hammerstein Integral Equations via Nyström Method and Gaussian Quadrature Rules for Splines. *Applied Numerical Mathematics*, **174**, 71-88. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.01.009>
- [2] Allouch, C., Remogna, S., Sbibih, D. and Tahrichi, M. (2021) Superconvergent Methods Based on Quasi-Interpolating Operators for Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Applied Mathematics and Computation*, **404**, Article ID: 126227. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126227>
- [3] Luo, X. and Huang, J. (2021) Daubechies Wavelet Method for Second Kind Fredholm Integral Equations with Weakly Singular Kernel. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **29**, 1023-1035.
- [4] Lakestani, M., Saray, B.N. and Dehghan, M. (2011) Numerical Solution for the Weakly Singular Fredholm Integro-Differential Equations Using Legendre Multiwavelets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 3291-3303. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.01.043>
- [5] Abdou, M.A., Elhamaky, M.N., Soliman, A.A. and Mosa, G.A. (2021) The Behaviour of the Maximum and Minimum Error for Fredholm-Volterra Integral Equations in Two-Dimensional Space. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, **24**, 2049-2070. <https://doi.org/10.1080/09720502.2020.1814497>
- [6] Wang, K.Y. and Wang, Q.S. (2014) Taylor Collocation Method and Convergence Analysis for the Volterra-Fredholm Integral Equations. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, **260**, 294-300. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.09.050>
- [7] Ramma, A.G. (2009) A Collocation Method for Solving Integral Equations. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, **2**, 222-228. <https://doi.org/10.1504/IJCSM.2009.027874>
- [8] Jafarian, A. and Nia, S.M. (2014) Artificial Neural Network Approach to the Fuzzy Abel Integral Equation Problem. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **27**, 83-91. <https://doi.org/10.3233/IFS-130980>
- [9] 陈国林, 陈冲. 基于泛函修正平均法的第二类积分方程的改进迭代法[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1728-1738.
- [10] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 48-49.
- [11] Abdel-Aty, M.A., Abdou, M.A. and Soliman, A.A. (2022) Solvability of Quadratic Integral Equations with Singular Kernel. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **57**, 12-25. <https://doi.org/10.3103/S1068362322010022>
- [12] Rahmoune, A. (2021) On the Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind over Infinite Intervals. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **66**, 129-148. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01428-2>
- [13] Sahu, P.K. and Saha Ray, S. (2015) Legendre Spectral Collocation Method for Fredholm Integro-Differential-Difference Equation with Variable Coefficients and Mixed Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **268**, 575-580. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.118>
- [14] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 3-105.
- [15] 罗秀红. 非线性弱奇异 Fredholm 积分方程的 Jacobi 谱 Galerkin 法[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京工业大学, 2018.
- [16] Tao, X., Xie, Z.Q. and Zhou, X.J. (2011) Spectral Petrov-Galerkin Methods for the Second Kind Volterra Type Integro-Differential Equations. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, **4**, 216-236. <https://doi.org/10.4208/nmtma.2011.42s.6>
- [17] 袁志强. Volterra 型积分微分方程的谱 Galerkin 迭代方法[D]: [硕士学位论文]. 湘潭: 湘潭大学, 2016.
- [18] Douglas, J., Dupont, T. and Wahlbin, L. (1974) The Stability in L^q of the L^2 -Projection into Finite Element Function Spaces. *Numerische Mathematik*, **23**, 193-197. <https://doi.org/10.1007/BF01400302>
- [19] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A. (2006) Spectral Methods Fundamentals in Single Domains. Springer-Verlag, Berlin, 296-297.