Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(3), 1077-1082
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123109

Schwarz导数及其相关性质

金禹含*，王侨祎，纪宏佳，李玉新

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年2月15日；录用日期：2023年3月11日；发布日期：2023年3月20日

摘 要

本文梳理了Schwarz导数的概念和性质，并给出其带有拉格朗日型余项的泰勒展开，和拉格朗日插值及余项，最后提出一种高阶Schwarz导数的新定义以建立与普通导数的联系。

关键词

Schwarz导数，拉格朗日型余项，高阶Schwarz导数

Schwarz Derivative and Related Properties

Yuhan Jin*, Qiaoyi Wang, Hongjia Ji, Yuxin Li

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Feb. 15th, 2023; accepted: Mar. 11th, 2023; published: Mar. 20th, 2023

Abstract

In this paper, the concept and properties of Schwarz derivative are reviewed, and the Taylor expansion with Lagrangian coterms, Lagrangian interpolation and coterms are given. Finally, a new definition of higher order Schwarz derivative is proposed to establish a relationship with ordinary derivatives.

Keywords

Schwarz Derivative, Lagrangian Type Remainder, Higher Order Schwarz Derivative

*通讯作者。

文章引用: 金禹含, 王侨祎, 纪宏佳, 李玉新. Schwarz 导数及其相关性质[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1077-1082.
DOI: 10.12677/aam.2023.123109

1. 引言

Schwarz 导数也称对称导数，是一种弱于普通导数的推广形式，在数学分析和动力系统上有着广泛的应用，本文借助 Schwarz 导数，给出带有拉格朗日型余项的泰勒展开，和拉格朗日插值及余项，并给出一种高阶 Schwarz 导数的新定义以建立与普通导数的联系。

2. Schwarz 导数的概念

定义 1 (Schwarz 导数)设 f 在 x_0 空心邻域 $U^{\circ}(x_0,\delta)$ 上有定义，若

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

存在，则称其为 f 在 $x=x_0$ 处的 Schwarz 导数，记为 $f^{[1]}(x_0)$。

3. Schwarz 导数的性质[1]

定理 1 若 f 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=f^{[1]}(x_0)$。

此处略去定理 1 证明过程，需要注意的是，该定理的逆命题不成立，可以给出反例，$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处导数不存在，而 Schwarz 导数 $f^{[1]}(0)=0$。

定理 2 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点 Schwarz 导数存在，则 $f(x)\pm g(x)$ 在 x_0 点 Schwarz 导数也存在，且有

$$\left(f(x_0)\pm g(x_0)\right)^{[1]}=f^{[1]}(x_0)\pm g^{[1]}(x_0)$$

定理 3 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点连续，且 Schwarz 导数存在，则 $f(x)g(x)$ 和 $\frac{f(x)}{g(x)}\left(g(x_0)\neq 0\right)$ 在 x_0 点 Schwarz 导数也存在，且有

$$\left(f(x)g(x)\right)^{[1]}_{x=x_0}=f^{[1]}(x_0)g(x_0)+f(x_0)g^{[1]}(x_0)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{[1]}_{x=x_0}=\frac{f^{[1]}(x_0)g(x_0)-f(x_0)g^{[1]}(x_0)}{g^2(x_0)}$$

定理 2 和定理 3 说明 Schwarz 导数在一定条件下具有四则运算性质，其证明已有参考文献[2]给出，此处不进行赘述。

定理 4 (Roll 中值定理)设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 Schwarz 可导，且 $f(a)=f(b)=0$，则存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得 $f^{[1]}(x_1)\geq 0,\ f^{[1]}(x_2)\leq 0$。

定理 5 (Lagrange 中值定理)设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 Schwarz 可导，则存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得

$$f^{[1]}(x_1)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f^{[1]}(x_2)$$

定理 6 (Cauchy 中值定理)设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 Schwarz 可导，且对任意的 $x\in(a,b)$，

有 $g^{[1]}(x)\neq 0$，且 $g(x)$ 为凸函数，则存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得

$$\frac{f^{[1]}(x_1)}{f^{[1]}(x_1)}\leq\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\leq\frac{f^{[1]}(x_2)}{g^{[1]}(x_2)}$$

4. 带有拉格朗日型余项的泰勒展开

定理 7 设存在邻域 $U(a,\delta)$，f 在 $U(a,\delta)$ 上 $n-1$ 阶可导，$f^{(n-1)}$ 在 $U(a,\delta)$ 上 1 阶 Schwarz 可导，则，存在 $\xi,\eta\in U(a,\delta)$，满足

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+\frac{f^{(i-1)^{[1]}}(\xi)}{n!}(x-a)^n\leq f(x)\leq\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+\frac{f^{(i-1)^{[1]}}(\eta)}{n!}(x-a)^n$$

证明 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+k(x-a)^n,$$

令

$$g(t)=f(t)-\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i+k(t-a)^n\right),$$

则 $g(t)$ 在 $U(a,\delta)$ 上 $n-1$ 阶可导，$g^{(n-1)}(t)$ 在 $U(a,\delta)$ 上 1 阶 Schwarz 可导。

对 $g(t)$ 进行推导，有

$$g^{(j)}(a)=f^{(j)}(a)-f^{(j)}(a)=0,i=0,1,2,\cdots,n-1,$$

$$g(x)=f(x)-\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+k(x-a)^n\right)=0,$$

特别的，有 $g(a)=g(x)=0$，对 $g(t)$ 应用 Roll 中值定理，则存在 x_1，使得 $g'(x_1)=0$。因此，又有 $g'(a)=g'(x_1)=0$，再用一次 Roll 中值定理，则存在 x_2，使得 $g''(x_2)=0$。以此类推，应用 $n-1$ 次 Roll 中值定理，最终可得，存在 x_{n-1}，使得 $g^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(x_{n-1})=0$。

在 $U(a,\delta)$ 上，$g^{(n-1)}(t)$ 满足 Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理的条件，故存在 $\xi,\eta\in U(a,\delta)$，使得

$$g^{(n-1)^{[1]}}(\xi)\leq\frac{g^{(n-1)}(a)-g^{(n-1)}(x_{n-1})}{a-x_{n-1}}\leq g^{(n-1)^{[1]}}(\eta),$$

而 $g^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(x_{n-1})=0$，则

$$g^{(n-1)^{[1]}}(\xi)\leq 0,\ g^{(n-1)^{[1]}}(\eta)\geq 0,$$

即

$$f^{(n-1)^{[1]}}(\xi)-n!k\leq 0,\ f^{(n-1)^{[1]}}(\eta)-n!k\geq 0$$

两式联立，解出 k 的范围是

$$\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\xi)}{n!}\leq k\leq\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\eta)}{n!},$$

因此，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+\frac{f^{(i-1)^{[1]}}(\xi)}{n!}(x-a)^n\le f(x)\le\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+\frac{f^{(i-1)^{[1]}}(\eta)}{n!}(x-a)^n$$

5. 拉格朗日插值及余项

定理 8 设 f 在 $[a,b]$ 上 $n-1$ 阶可导，$f^{(n-1)}$ 在 (a,b) 上 1 阶 Schwarz 可导，则存在唯一的 $n-1$ 次多项式 $p(x)$ 满足 $p(x_i)=f(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，且存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，满足

$$p(x)+\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\xi)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\le f(x)\le p(x)+\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\eta)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

证明 根据多项式插值定理，可以说明 $n-1$ 次多项式 $p(x)$ 的存在性和唯一性，下面仅给出定理后半部分余项表达式的证明，设

$$f(x)=p(x)+k\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

令

$$g(t)=f(t)-\left(p(t)+k\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right)$$

则 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上 $n-1$ 阶可导，$g^{(n-1)}(t)$ 在 (a,b) 上 1 阶 Schwarz 可导。

根据 $g(t)$ 的定义，可知 $g(x_i)=g(x)=0(i=1,2,\cdots,n$ 且 $x_i\ne x)$，根据 Roll 中值定理，每个小区间上都存在一点 $y_m(m=1,2,\cdots,n)$，满足 $g'(y_m)=0$，再用一次 Roll 中值定理，则存在 $z_n(n=1,2,\cdots,n-1)$，满足 $g''(z_n)=0$，以此类推，应用 $n-1$ 次 Roll 中值定理，最终得到，存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，满足 $g^{(n-1)}(\xi)=g^{(n-1)}(\eta)=0$。

在 $[a,b]$ 上，$g^{(n-1)}(t)$ 满足 Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理的条件，故存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$g^{(n-1)^{[1]}}(\xi)\le\frac{g^{(n-1)}(\xi)-g^{(n-1)}(\eta)}{\xi-\eta}\le g^{(n-1)^{[1]}}(\eta),$$

而 $g^{(n-1)}(\xi)=g^{(n-1)}(\eta)=0$，则

$$g^{(n-1)^{[1]}}(\xi)\le 0,\ g^{(n-1)^{[1]}}(\eta)\ge 0,$$

即

$$f^{(n-1)^{[1]}}(\xi)-n!k\le 0,\ f^{(n-1)^{[1]}}(\eta)-n!k\ge 0,$$

两式联立，解出 k 的范围是

$$\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\xi)}{n!}\le k\le\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\eta)}{n!},$$

因此，

$$p(x)+\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\xi)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\le f(x)\le p(x)+\frac{f^{(n-1)^{[1]}}(\eta)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

6. 高阶 Schwarz 导数的新定义[3]

在参考文献[4]中已给出 n 阶 Schwarz 导数的定义，设 f 在 x_0 空心邻域 $U^\circ(x_0,\delta)$ 上有定义，若

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{[n-1]}(x+h)-f^{[n-1]}(x-h)}{2h}$$

存在，则称其为 f 在 $x=x_0$ 处的 n 阶 Schwarz 导数，记为 $f^{[n]}(x_0)$。该定义下，n 阶 Schwarz 导数与 n 阶导数不一定相等，为建立 n 阶 Schwarz 导数与 n 阶导数之前的关系，本文中给出一种 n 阶 Schwarz 导数的新定义，在该定义下，n 阶 Schwarz 导数与 n 阶导数相等。

定义 2 (n 阶 Schwarz 导数) 设 f 在 x_0 空心邻域 $U^\circ(x_0,\delta)$ 上有定义，若

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k f\left(\left(n-2k\right)h+x_0\right)}{(2h)^n}$$

存在，则称其为 f 在 $x=x_0$ 处的 n 阶 Schwarz 导数，记为 $f^{[n]}(x_0)$。

定理 9 若 f 在 $x=x_0$ 处存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$，则 f 在 $x=x_0$ 处存在新定义下的 n 阶 Schwarz 导数 $f^{[n]}(x_0)$，且有 $f^{(n)}(x_0)=f^{[n]}(x_0)$。

证明 首先证明以下结论成立，

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k(n-2k)^m=\begin{cases}0, 0\le m\le n-1\\ 2^n n!, m=n\end{cases}$$

将式子进行变形，有

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k(n-2k)^m=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\sum_{s=0}^{m}C_m^s n^{m-s}(-2k)^s=\sum_{s=0}^{m}C_m^s n^{m-s}(-2)^s\sum_{k=0}^{n}k^sC_n^k(-1)^k,$$

定义算子 $D(f)=xf'$，用算子 D 作用于等式 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$，得到

$$D\left((1+x)^n\right)=D\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k\right)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kx^k,$$

以此类推，作用 s 次，有

$$D^s\left((1+x)^n\right)=D^s\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k\right)=\sum_{k=0}^{n}k^sC_n^kx^k, 0\le s\le n,$$

当 $x=-1$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{n}k^sC_n^k(-1)^k=D^s\left((1+x)^n\right)=\begin{cases}0, 0\le s\le n-1\\ (-2)^n n!, s=n\end{cases},$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k(n-2k)^m=\sum_{s=0}^{m}C_m^s n^{m-s}(-2)^s\sum_{k=0}^{n}k^sC_n^k(-1)^k=\begin{cases}0, 0\le m\le n-1\\ 2^n n!, m=n\end{cases}$$

下面证明 $f^{(n)}(x_0)=f^{[n]}(x_0)$。

对 Schwarz 导数的新定义进行变形，有

$$
\begin{aligned}
f^{[n]}\left(x_0\right) &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k f\left((n-2k)h+x_0\right)}{(2h)^n} \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^{n-1} f^{(n-1)}\left((n-2k)h+x_0\right)}{2^n n!h} (n-1\text{次洛必达法则}) \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^{n-1} \left(f^{(n-1)}\left((n-2k)h+x_0\right)-f^{(n-1)}\left(x_0\right)\right)}{2^n n!h} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^n f^{(n)}\left(x_0\right)}{2^n n!} = f^{(n)}\left(x_0\right).
\end{aligned}
$$

该定理证明中，组合数的证明参考《清疏数学竞赛》。

7. 总结

Schwarz 导数作为导数概念的推广，在数学分析和动力系统中被广泛应用。本文从 Schwarz 导数的概念和性质出发，给出其带有拉格朗日型余项的泰勒展开式和拉格朗日插值余项的推导，并提出一种 Schwarz 高阶导数的新定义，将导数的性质推广到 Schwarz 导数上来。

参考文献

[1] 梁波, 王玉斌. 对称导数及其相关理论[J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2004, 25(4): 351-354.

[2] 王云. 对称导数的四则运算法则[J]. 遵义师范学院学报, 2012, 14(2): 121-122.

[3] 杨刚, 武燕, 王宇翔. 数值分析 (清华·李庆扬·第四版) 全析精解[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007.

[4] 李宏奕. 关于对称导数的中值定理及其逆问题[J]. 广州广播电视大学学报, 2013(1): 4.