Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(3), 1100-1113**
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123112

绝对破产情形下经典风险模型的最优分红和注资问题

李　帅

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2023年2月17日；录用日期：2023年3月13日；发布日期：2023年3月21日

摘　要

本文在绝对破产情形下考虑了经典风险模型的最优分红与注资问题。一方面当保险公司产生赤字时可向银行进行贷款，获得的保费将用来偿还银行，一旦盈余过程低于绝对破产线则破产发生。另一方面公司可采用存在比例交易费的注资以使股东权益最大化。本文的目的是最大化预期累积贴现分红与预期贴现注资成本之差的期望。我们给出了该模型下值函数$V(x)$的定义并对其进行刻画，证明了值函数$V(x)$满足的基本性质。然后通过动态规划原理建立$V(x)$满足的HJB方程，进而证明为该HJB方程的几乎处处解，并证明了验证定理。

关键词

最优分红问题，HJB方程，注资，绝对破产

Optimal Dividend and Capital Injection of the Classical Risk Model under Absolute Ruin

Shuai Li

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Feb. 17th, 2023; accepted: Mar. 13th, 2023; published: Mar. 21st, 2023

Abstract

In this paper, we consider the optimal dividend and capital injection of the classical risk model

文章引用: 李帅. 绝对破产情形下经典风险模型的最优分红和注资问题[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1100-1113.
DOI: 10.12677/aam.2023.123112

under Absolute Ruin. On the one hand, when the insurance company has a deficit, it will make loans to the bank, and the premiums obtained will be used to repay the bank loans. Once the surplus process is below the absolute ruin line, bankruptcy will occur. On the other hand, the company can use the capital injection with proportional transaction fee for maximizing shareholders' equity. The purpose of this paper is to maximize the expected difference between the expected cumulative discount dividend and the expected discounted capital injection cost. We give the definition of the value function $V(x)$ under this model and describe it and prove the basic properties that the value function $V(x)$ satisfies. Then, we establish the satisfying HJB equation through the principle of dynamic programming and prove the solution of the HJB equation almost everywhere, and prove the verification theorem.

Keywords

Optimal Dividend Problem, HJB Equation, Capital Injection, Absolute Ruin

1. 引言

分红问题最早可以追溯到 1957 年 De Finetti [1]首次提出——最优分红策略应使得破产前的期望分红最大化，并证明了最优策略为障碍策略。起初学者们对于分红的研究并不多，直到二十世纪九十年代学者们将随机控制理论应用到保险风险模型中，关于最优分红问题的研究才开始呈现爆发式增长。但这时的研究多数围绕着扩散模型展开，例如，Assumsen and Taksar (1997) [2]、Sethi and Taksar (2002) [3]、Cadenillas *et al.* (2006) [4]等文献。在经典风险模型下，由于索赔额分布具有任意性，给值函数的求解带来了很大困难。一直到 2005 年前后，分红问题才有了实质性进展。Azcue and Muler (2005) [5]在经典风险模型中加入了再保险控制，利用粘性解理论找出最优分红策略为波段策略。随后越来越多的研究者将各种保险经济因素加入到了经典风险模型中。关于分红问题发展的详细介绍可参见 Albrecher and Thonhauser (2009) [6]的综述和 Azcue and Muler (2014) [7]。

当保险公司产生赤字时股东可能会通过一些融资手段来弥补赤字从而控制风险。在现有文献中常见的两种融资手段是向银行贷款和注资。在公司的盈余为负时，保险公司可以向银行进行贷款以维持公司正常经营，获得的保费将用来偿还银行。然而当盈余小于一定的某个值时，盈余过程则无法回到 0 以上，绝对破产在这一刻发生。Gerber (1971) [8]为经典风险模型引入借贷利率下的绝对破产概率。Dickson and Egidio dos Reis (1997) [9]利用模拟的方法来估计经典风险模型中的绝对破产概率。Cai (2007) [10]讨论了经典风险模型中的 Gerber-Shiu 函数，随后众多学者将分红问题加入模型中，讨论了不同分红策略下和不同风险模型中的最优分红问题。Yuen 等人(2008) [11]考虑了带有借贷利率和恒定分红障碍的经典风险模型，并推导出找出 Gerber-Shiu 期望贴现惩罚函数的积分微分方程。Peng 和 Liu (2016) [12]研究障碍分红策略下经典风险模型的绝对破产问题。Luo *et al.* (2019) [13]在阈值分红策略下研究了该问题。Wang 和 He (2020) [14]讨论了跳扩散模型下带有借贷利率的最优分红问题，并表明最优分红策略为障碍型。

另一种常见的融资手段是注资。股东在公司盈利时享受分红，因此也应在盈余为负时承担赤字。Dickson 和 Waters (2004) [15]提出允许股东在盈余低于零时注资，公司持续经营甚至永不破产[16] [17]，

也都是在永不破产的经典风险模型下研究最优策略。然而这种无限注资的情况并不符合经济学原理，为最大化公司的价值，股东应有选择的进行注资，当盈余过程小于某个临界值时，将不再进行注资公司发生破产。例如[18] [19] [20]去掉了无限注资这一约束条件，在此情形下公司可能发生破产，并在不同的模型中研究了的最优分红注资问题。在近期的研究成果中 Xu 和 Woo (2020) [21]对 Scheer 和 Schmidli (2011) [16]模型进行了修改，研究了破产时支付罚金的最优分红和注资问题，并证明了特定情况下带状策略的最优性。Schmidili (2021) [22]研究了具有 Erlang 的更新模型的分红和注资问题。但关于注资的研究大多数是在盈余过程为负这一条件下进行的，而股东为了获得更多的分红就有可能在盈余过程为正时注资，因此本文将去掉这一约束条件。

目前在现有文献中对于经典风险模型的最优分红问题更多的讨论只涉及注资或借贷一方面，尚未有文献同时考虑注资和借贷控制对于最优分红问题的影响。而为使股东利益最大化，股东应该可以自由的选择注资和借贷区间。那么股东何时选择注资何时选择借贷就成为一个值得研究的问题。本文在经典风险模型下同时考虑注资和借贷对最优分红问题的影响，此时注资的大小不再等于公司亏损的大小，且每次注资需要支付一定比例的交易费用，在这一模型下寻求最优的分红与注资策略使得最大化预期累积贴现分红与预期贴现注资成本之差的期望。

本文的结构如下：第二章建立引入了借贷和注资的经典风险模型，给出该模型下值函数$V(x)$的定义。第三章分析证明了值函数$V(x)$和可行策略的性质。第四章对动态规划方程进行证明，并推导出$V(x)$满足的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman)方程。第五章证明了验证定理。

2. 模型介绍

给定完备的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，Ω是具有左右极限的路径的集合，$\mathcal{F}_t$是一个完备σ-代数流。设带借贷利率的经典风险模型的盈余过程为：

$$X_t = x + \int_0^t \left(c + \delta X_s \mathbf{1}_{\{X_s<0\}}\right) \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{1}$$

其中，x 代表的是初始余额，$c \ge 0$为保费收入率，$\{N_t, t \ge 0\}$是强度为$\lambda > 0$的泊松过程，表示到时间 t 为止的索赔次数。$\{Y_i, i \ge 1\}$为第 i 次索赔额的大小，且是独立同分布的非负随机变量序列。其分布函数为 F，具有正均值μ。$\{N_t, t \ge 0\}$与$\{Y_i, i \ge 1\}$相互独立。当保险公司出现赤字时，我们允许保险公司向银行借一笔钱，贷款利率为$\delta > 0$，公司获得的保费将用来偿还银行的贷款。我们假设公司的贷款是连续动态的，若 t 时刻 $X_t < 0$，公司需要贷款$|X_t|$来弥补赤字，此时公司的盈余满足：

$$\mathrm{d}X_t = \left(c + \delta X_s \mathbf{1}_{\{X_s<0\}}\right)\mathrm{d}t - \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right)$$

当$X_t > -\dfrac{c}{\delta}$时盈余过程是递增的，收取的保费收入能够偿还贷款利息，盈余过程将可能恢复正值，而当$X_t \le -\dfrac{c}{\delta}$时保费收入不足以偿还利息，保险公司面临破产，因此$-\dfrac{c}{\delta}$被定义为绝对破产线。

接着我们加入分红和带比例交易费用的注资控制。对于给定的任意控制策略$\pi = \{L_t, I_t\}$，L_t为在控制策略π下到时刻 t 为止累积的分红量。I_t为在控制策略π下到时刻 t 为止累积的注资量，$k > 1$表示比例交易费用，盈余增加 I 则需要支付 kI，此时受控盈余过程表示为

$$X_t^\pi = x + \int_0^t \left(c + \delta X_s^\pi \mathbf{1}_{\{X_s<0\}}\right)\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - L_t + I_t \tag{2}$$

相应的绝对破产时刻为

$$\tau^{\pi} := \inf\left\{t \ge 0 : X_{t^+}^{\pi} \le -\frac{c}{\delta}\right\}$$

我们称控制策略 π 是可许策略，如果满足以下条件：

1) L_t^{π} 是关于 $\mathcal{F}_{t-}$ 适应的左连续右极限的递增过程。且分红不会导致公司破产，$L_t \le X_t + I_t + \dfrac{c}{\delta}$，$L_0 = 0$。

2) I_t^{π} 是关于 $\mathcal{F}_{t-}$ 适应的左连续右极限的递增过程，注资与分红不同时发生，$I_0 = 0$。

记 Π, Π_x 为所有可于策略的集合以及初始盈余为 x 的所有可许策略的集合。在可行控制策略 π 下，我们的目标是最大化预期累积贴现分红与预期贴现注资成本之差的期望：

$$V^{\pi}(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s\right] \tag{3}$$

这里 $\beta > 0$ 表示固定的贴现率。值函数定义为：

$$V(x) := \sup_{\pi \in \Pi_x} V^{\pi}(x). \tag{4}$$

我们的目标是寻找最优的控制策略 π^*，使得 $V(x) = V^{\pi^*}(x)$。

3. 值函数和可行策略的性质

3.1. 值函数的性质

引理 3.1.1：值函数 V 是非负的，并且满足：

$$x + \frac{c}{\beta + \lambda} \le V(x) \le x + \frac{c}{\beta} + \frac{c}{\delta} \tag{5}$$

证明：

首先证明下界。假设初始时刻立即支付 $x + \dfrac{c}{\delta}$ 作为分红，则 $V(x) \ge x + \dfrac{c}{\delta}$

接着证明上界。当 $x > -\dfrac{c}{\delta}$ 时，考虑一种极端情形可行策略 π：公司没有索赔发生，对于任意 $\varepsilon > 0$，首先将 $x + \dfrac{c}{\delta} - \varepsilon$ 作为瞬时分红分给股东，之后以保费收入率进行分红，则

$$V(x) \le x + \frac{c}{\delta} - \varepsilon + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta t} c\mathrm{d}t\right] = x + \frac{c}{\beta} + \frac{c}{\delta} - \varepsilon$$

由于 ε 的任意性，可得 $x + \dfrac{c}{\delta} \le V(x) \le x + \dfrac{c}{\beta} + \dfrac{c}{\delta}$。

引理 3.1.2：值函数 V 是非减的，局部 Lipschitz 连续的。对任意 $y > x > -\dfrac{c}{\delta}$，满足

$$y - x \le V(y) - V(x) \le V(y)\left[1 - \mathrm{e}^{-(\beta+\lambda)t_0(x,y)}\right] \tag{6}$$

其中

$$t_0(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{c}, & y > x \ge 0 \\ \dfrac{1}{\delta}\ln\dfrac{c}{\delta x + c} + \dfrac{y}{c}, & y > 0 > x > -\dfrac{c}{\delta} \\ \dfrac{1}{\delta}\ln\dfrac{\delta y + c}{\delta x + c}, & 0 \ge y > x > -\dfrac{c}{\delta} \end{cases}$$

证明：

首先我们证明下界。对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 及策略 $\pi\in\Pi_x$，使得 $V_\pi(x)>V(x)$.我们定义一个策略 $\pi_1\in\Pi_y$：初始时刻立即支付分红 $y-x$，接下来以 π 策略进行分红注资，则有：

$$V(y)\ge y-x+V^\pi(x)\ge y-x+V(x)-\varepsilon$$

故可以得到 $V(y)-V(x)\ge y-x$。

接下来证明上界。定义盈余过程从 x 首次到 y 的时间为 $t(x,y)$。对于任意 $\varepsilon>0$，存在可行策略 π_2，使得 $V^{\pi_2}(y)\ge V(y)-\varepsilon$。定义可行策略 π_2'：在公司盈余首次到达 y 前既不分红也不注资，不发生索赔时所需时间记作 $t_0(x,y)$；当公司的盈余第一次到达 y 之后，策略与 π_2 相同。我们得到

$$\begin{aligned}V(x)&\ge V^{\pi_2'}(x)\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta t(x,y)}\mathbf{1}_{\{\tau_1\ge t_0(x,y)\}}\right]V^{\pi_2}(y)\\&\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta t_0(x,y)}\mathrm{e}^{-\lambda t_0(x,y)}\right]V^{\pi_2}(y)\ge\mathrm{e}^{-(\beta+\lambda)t_0(x,y)}V(y)-\varepsilon\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，我们得到，$V(y)-V(x)\le V(y)\left[1-\mathrm{e}^{-(\beta+\lambda)t_0(x,y)}\right]$，所以 V 是局部 Lipschitz 连续的。

3.2. 可行策略

引理 3.2.1：令 $\mathbb{U}_x$ 与 $\mathbb{V}_x$ 分别为定义于 $\mathbb{R}_+$ 上的非减左连右极的函数 $\alpha_1(t)$ 与 $\alpha_2(t)$ 的集合，满足：$\alpha_1(0)=0,\alpha_2(0)=0$ 且当 $t\ge0$ 时，$\alpha_1(t)\le X_t=x+\int_0^t\left(c+\delta X_s\mathbf{1}_{\{X_s<0\}}\right)\mathrm{d}s+\alpha_2(t)+\frac{c}{\delta}$，一个策略 $(L_t,I_t)\in\Pi$ 是可行的，当且仅当存在两个 $\mathcal{B}\left(-\frac{c}{\beta},+\infty\right)\times\mathbb{R}_+$ -可测的函数 $\alpha_1(x,t)$ 和 $\alpha_2(x,t)$ 满足：1) 对所有的 $x>-\frac{c}{\delta}$，$\alpha_1(x,\cdot)\in\mathbb{U}_x,\alpha_2(x,\cdot)\in\mathbb{V}_x$。2) $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -可测函数 $\alpha_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}(\omega,t)$ 和 $\alpha_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}(\omega,t)$ 满足：对任意 $\omega\in\Omega$ 和 $n=1,2,\cdots$，$\alpha_1^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{U}_{X_{\tau_n}}^L,\alpha_2^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{V}_{X_{\tau_n}}^I$。使得

$$L_t=\begin{cases}\alpha_1^*(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ L_{\tau_n}+\alpha_1^{(n)}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{7}$$

$$I_t=\begin{cases}\alpha_2^*(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ I_{\tau_n}+\alpha_2^{(n)}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{8}$$

证明：

首先证明充分性，显然，(7)、(8)式定义的策略是可行的。接下来是必要性。注意到 $\mathcal{F}_t$ 是一个跳流，即对于 $t\in\mathbb{R}_+$，$n=0,1,\cdots$，

$$\mathcal{F}_t\cap\{\tau_n\le t<\tau_{n+1}\}=\mathcal{F}_{\tau_n}\cap\{\tau_n\le t<\tau_{n+1}\},$$

其中，

$$\mathcal{F}_0=\sigma\{X_0\},\quad\mathcal{F}_{\tau_n}=\sigma\{X_0;\tau_1,Y_1;\cdots;\tau_n,Y_n\},\quad n=1,2,\cdots$$

定理中，对任意 $n=1,2,\cdots$，存在 $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -可测函数 $\alpha_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}(\omega,t)$ 使得(7)式成立，$\alpha_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}(\omega,t)$ 使得(8)式成立。在这种情况下，由 $\mathcal{F}_0=\sigma\{X_0\}$。根据 Doob 可测性定理可知，存在 $\mathcal{B}\left(-\frac{c}{\beta},+\infty\right)\times\mathbb{R}_+$ -可测的函数 $\alpha_1(x,t)$、$\alpha_2(x,t)$ 使得 $L_t=\alpha_1^*(X_0,t),I_t=\alpha_2^*(X_0,t),t<\tau_1$。特别地，$\alpha_1^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{U}_{X_{\tau_n}}^L,\alpha_2^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{V}_{X_{\tau_n}}^I$。

4. 动态规划原理和 HJB 方程

4.1. 动态规划原理

定理 4.1.1：对于任意的 $x > -\frac{c}{\delta}$ 和停时 T，$V(x)$ 满足如下方程：

$$V(x) = \sup_{\pi\in\Pi_x} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{T\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_0^{T\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s + \mathrm{e}^{-\beta(T\wedge\tau_1)}V\left(X_{T\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right] \tag{9}$$

证明：

我们证明对于某些固定的时间 $t \ge 0$ 该式成立。当 $x > -\frac{c}{\delta}$，

$$V(x,t) = \sup_{\pi\in\Pi_x} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s + \mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]$$

一方面，任取一个可行策略 $\pi = \{L_s, I_s\} \in \Pi_x$，则

$$V^{\pi}(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s\right] + \mathbb{E}_x\left[\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s\right],$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_1)}\mathbb{E}_x\left[\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta(s-t\wedge\tau_1)}\mathrm{d}L_s - k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\beta(s-t\wedge\tau_1)}\mathrm{d}I_s\right) \mid X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right]\right] \\
&\le \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right].
\end{aligned}$$

所以 $V^{\pi}(x) \le V(x,t)$，由于可行策略 π 的任意性，$V(x) \le V(x,t)$。

另一方面，给定 $\forall\varepsilon > 0$ 取可行策略 $\pi = \{L_s, I_s\} \in \Pi_x$，使得

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s - k\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s + \mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}\right)\right] \ge V(x,t) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$V(x)$ 在 $\left(-\frac{c}{\delta}, \infty\right)$ 是递增且连续的，则可以找到递增数列 $-\frac{c}{\delta} = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ 使得若 $y \in [x_i, x_{i+1})$，有：

$$V(y) - V(x_i) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

对于 $i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 成立。取可行策略 $\pi_i = \{L_i, I_i\}$ 使得 $V(x_i) - V^{\pi_i}(x_i) < \frac{\varepsilon}{4}$。定义一个新策略 $\bar{\pi} = \{\bar{L}_s, \bar{I}_s\}$：

- 如果 $\tau_1 \le t$ 且 $\tau_1 = \tau^{\pi}$，令 $\bar{\pi} = \pi$，$s \ge 0$。
- 如果 $\tau_1 \le t$ 且 $\tau_1 < \tau^{\pi}$ 或 $\tau_1 > t$，在 $s \in (0, t\wedge\tau_1]$ 令 $\bar{\pi} = \pi$；当 $X_{t\wedge\tau_1}^{\pi} \in [x_i, x_{i+1})$ 时，在 $s \in \left[t\wedge\tau_1, \tau^{\pi_i}\right]$ 上令 $\bar{\pi} = \pi_i$。

注意到对于 $-\frac{c}{\delta} < x \le y$，有 $\Pi_x \subseteq \Pi_y$。由上述定义方法可知策略 $\bar{\pi}$ 可行若 $X_t^{\bar{\pi}} \in [x_i, x_{i+1})$ 有

$$V^{\bar{\pi}}\left(X_t^{\bar{\pi}}\right) = V^{\pi_i}(x_i) \ge V(x_i) - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

根据(10)和(11)有

$$\begin{aligned}&V(x,t)-V^{\bar{\pi}}(x)\\&\le \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]-V_{\bar{\pi}}(x)+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]-\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V_{\bar{\pi}}\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\bar{\pi}}\right)\right]+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

再根据ε的任意性，有$V(x,t)\le V(x)$，综上可得$V(x)=V(x,t)$。因此，动态规划原理成立。

4.2. HJB 方程

接下来我们启发式地推导 HJB 方程。我们假设$V(x)$是绝对光滑的。对任意可行策略π，$h>0$我们令$v_h^{\pi}=h\wedge\inf\left\{t:X_t^{\pi}\notin(x-h,x+h)\right\}$。$v_h^{\pi}<\infty$，且当$h\to 0$时$v_h^{\pi}\to 0$。此时对于停时$v_h^{\pi}$，满足动态规划原理：

$$V^{\pi}(x)=\sup_{\pi\in\Pi_x}\mathbb{E}_x\left[\int_0^{v_h^{\pi}\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{v_h^{\pi}\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s+\mathrm{e}^{-\delta\left(v_h^{\pi}\wedge\tau_1\right)}V\left(X_{v_h^{\pi}\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]$$

应用 Ito 公式于$\mathrm{e}^{-\delta\left(v_h^{\pi}\right)}V\left(X_{v_h^{\pi}}^{\pi}\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\beta v_h^{\pi}}V\left(X_{v_h^{\pi}}^{\pi}\right)=&V(x)-\int_0^{v_h^{\pi}}\beta\mathrm{e}^{-\beta s}V\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\mathrm{d}s+\int_0^{v_h^{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta s}cV'\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\mathrm{d}s\\&+\int_0^{v_h^{\pi}}\delta X(s)\mathbf{1}_{\{X(s)<0\}}\mathrm{e}^{-\beta s}V'\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\mathrm{d}s+\sum_{\substack{X_{s-}^{\pi}\ne X_s^{\pi}\\0\le s\le v_h^{\pi}}}\mathrm{e}^{-\beta s}\left[V\left(X_s^{\pi}\right)-V\left(X_{s-}^{\pi}\right)\right]\\&+\sum_{\substack{X_{s+}^{\pi}\ne X_s^{\pi}\\0\le s\le v_h^{\pi}}}\mathrm{e}^{-\beta s}\left[V\left(X_s^{\pi}\right)-V\left(X_{s+}^{\pi}\right)\right]\end{aligned}$$

$X_{s-}^{\pi}\ne X_s^{\pi}$发生在索赔时，有索赔引起的跳满足：

$$M_{t\wedge v_h^{\pi}}=\sum_{\substack{X_{s-}^{\pi}\ne X_s^{\pi}\\0\le s\le v_h^{\pi}}}\mathrm{e}^{-\beta s}\left[V\left(X_s^{\pi}\right)-V\left(X_{s-}^{\pi}\right)\right]-\lambda\int_0^{v_h^{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta s}\left[V\left(X_{s^-}^{\pi}-y\right)-V\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\right]\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s$$

$M_t\wedge v_h^{\pi}$为 0 初值的鞅。$X_{s+}^{\pi}\ne X_s^{\pi}$发生在注资时

$$\sum_{\substack{X_{s+}^{\pi}\ne X_s^{\pi}\\0\le s\le v_h^{\pi}}}\mathrm{e}^{-\beta s}\left[V\left(X_s^{\pi}\right)-V\left(X_{s+}^{\pi}\right)\right]=\int_0^{v_h^{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}V(x)\ge&\mathbb{E}_x\left[-\int_0^{v_h^{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s+\mathrm{e}^{-\beta\left(v_h^{\pi}\right)}V\left(X_{v_h^{\pi}}^{\pi}\right)\right]\\&=V(x)-\int_0^{v_h^{\pi}}\beta\mathrm{e}^{-\beta s}V\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\mathrm{d}s+\int_0^{v_h^{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta s}cV'\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\mathrm{d}s+\int_0^{v_h^{\pi}}\delta X(s)\mathbf{1}_{\{X(s)<0\}}\mathrm{e}^{-\beta s}V'\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\mathrm{d}s\\&-\lambda\int_0^{v_h^{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta s}\left[V\left(X_{s^-}^{\pi}-y\right)-V\left(X_{s^-}^{\pi}\right)\right]\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

令$h\to 0$，我们得到

$$\left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x)-(\lambda+\beta)V(x)+\lambda\int_0^{\infty}V(x-y)\mathrm{d}F(y)\le 0$$

定义

$$\tilde{\mathcal{L}}f(x) := \left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)f'(x)-(\lambda+\beta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x),$$

其中，$\mathcal{G}f(x)=\int_0^\infty f(x-y)\mathrm{d}F(y)$。

定义一个新策略 π_1：如果保险公司立即分红 a，即盈余由 x 减为 $x-a$。此后由最优策略进行分红注资，则 $V(x)\geq V(x-a)+a$。所以 $V'(x)\geq 1$。

定义一个策略 π_2：如果保险公司立即进行注资 b，即盈余由 x 变为 $x+b$。此后由最优策略进行分红注资，则 $V(x)\geq V(x+b)-kb$。所以 $V'(x)\leq k$。

设首次分红时刻为 τ_1^L，首次注资时刻为 τ_1^I，当 $\tau_1^L=0$ 时，有 $V'(x)=1$；当 $\tau_1^I=0$ 时，有 $V'(x)=k$；当当 $\tau_1^L>0,\tau_1^I>0$ 时，有 $\tilde{\mathcal{L}}V(x)=0$。因此，可以写出 QVI 不等式：

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{L}}V(x)\leq 0,\\&1-V'(x)\leq 0,\\&k-V'(x)\geq 0,\\&\tilde{\mathcal{L}}V(x)\left(1-V'(x)\right)\left(V'(x)-k\right)=0\end{aligned}\tag{12}$$

也可以写成

$$\max\left\{\tilde{\mathcal{L}}V(x),1-V'(x),V'(x)-k\right\}=0,x>-\frac{c}{\delta}\tag{13}$$

命题 4.2.1：值函数 V 是 HJB 方程(13)的几乎处处解。

证明：

对于任意固定的 $x>-\frac{c}{\delta}$ 和 $\alpha_1\in\mathbb{U}_x,\alpha_2\in\mathbb{V}_x$，定义 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，$\phi_x^\alpha(t):=x+\int_0^t\left(c+\delta\phi^\alpha(s)\mathbf{1}_{\{\phi^\alpha(s)<0\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha_1(t)+\alpha_2(t)$ 和 $v^\alpha(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}\alpha_1(s)-k\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}\alpha_2(s)$，显然，$\phi_x^\alpha(t)$ 是左连右极的。根据引理 3.2.1，对于策略 $(L,I)\in\Pi_x$，有

$$L_t=\alpha_1(x,t),0\leq t<\tau_1.$$

$$I_t=\alpha_2(x,t),0\leq t<\tau_1.$$

因此，可将(9)写成如下形式：

$$V(x)=\sup_{\alpha\in\mathbb{U}_x}\mathbb{E}_x\left[v^\alpha(t\wedge\tau_1)+\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^\pi\right)\right].\tag{14}$$

所以，

$$V(x)\geq\mathbb{E}_x\left[v^\alpha(t\wedge\tau_1)+\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^\pi\right)\right]$$

令 $t\to 0$，

$$V(x)\geq v^\alpha(0_+)+V\left(\phi_x^\alpha(0_+)\right)=\Delta_+\alpha_1(0)-k\Delta_+\alpha_2(0)+V\left(x-\Delta_+\alpha_1(0)+\Delta_+\alpha_2(0)\right).$$

- 当初始时刻只发生分红时，此时 $\Delta_+\alpha_1(0)>0$，$\Delta_+\alpha_2(0)=0$，$V(x)\geq\Delta_+\alpha_1(0)+V\left(x-\Delta_+\alpha_1(0)\right)$，令 $\Delta_+\alpha_1(0)\to 0$，得 $V'(x)\geq 1$。
- 当初始时刻只产生注资时，此时 $\Delta_+\alpha_1(0)=0$，$\Delta_+\alpha_2(0)>0$，$V(x)\geq V\left(x+\Delta_+\alpha_2(0)\right)-k\Delta_+\alpha_2(0)$，令 $\Delta_+\alpha_2(0)\to 0$，得 $V'(x)\leq k$。

我们定义

$$\varphi(x,t)=x+\int_0^t\left(c+\delta\varphi(x,t)\mathbf{1}_{\{\varphi(x,t)<0\}}\right)\mathrm{d}s$$

由(14)式可以看出，取某个 $h>0$，

$$\begin{aligned}V(x)&\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(h\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{h\wedge\tau_1}\right)\right]\\&\ge\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)h}V(\varphi(x,h))+\int_0^h\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)s}\int_0^{\infty}V(\varphi(x,h)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s-V(x)\\&=\frac{V(\varphi(x,h)-V(x))}{h}-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)h}\right)V(\varphi(x,h))}{h}+\frac{\int_0^h\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)s}\int_0^{\infty}V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s}{h}.\end{aligned}$$

根据 V 的绝对连续性，可知 $V'(x)$ 几乎处处存在，令上式中的 $h\to0$，可以得到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{V(\varphi(x,h))-V(x)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{V(\varphi(x,h))-V(x)}{\varphi(x,h)-x}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\varphi(x,h)-x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(x,h)-V(x)}{V(\varphi(x,h))-x}\left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)=\left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x)\end{aligned}$$

几乎处处成立，所以

$$0\ge\left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x)-(\lambda+\beta)V(x)+\lambda\int_0^{\infty}V(x-y)\mathrm{d}F(y).$$

即 $\tilde{\mathcal{L}}V(x)\le0$。令 $\mathbb{O}=\{x:V'(x)=1,k\}$，$\mathbb{C}=\left(-\frac{c}{\delta},\infty\right)\setminus\mathbb{O}$。根据前面的推导可以看出，区域 $\mathbb{O}$ 中发生了干涉。取 $x\in\mathbb{C}$，当某个 $h>0$ 足够小时，对于初始余额为 $x'\in(x-ph,x+ph)\subset\mathbb{C}$ 时，初始时刻立即分红注资不是最优的，因此可以得到

$$\begin{aligned}V(x)&=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(h\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{h\wedge\tau_1}\right)\right]\\&=\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)h}V(\varphi(x,h))+\int_0^h\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)s}\int_0^{\infty}V(\varphi(x,h)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s-V(x)\\&=\frac{V(\varphi(x,h)-V(x))}{h}-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)h}\right)V(\varphi(x,h))}{h}+\frac{\int_0^h\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)s}\int_0^{\infty}V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s}{h}.\end{aligned}$$

由于 V 是连续且线性有界的，当 $h\to0$ 时右极限存在，因此下式在 $\mathbb{C}$ 上几乎处处成立

$$0=\left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x)-(\lambda+\beta)V(x)+\lambda\mathcal{G}V(x)$$

即 $\tilde{\mathcal{L}}V(x)=0$，再由 $\left(-\frac{c}{\delta},\infty\right)=\mathbb{O}\cup\mathbb{C}$ 可以得到

$$\tilde{\mathcal{L}}V(x)(1-V'(x))(V'(x)-k)=0$$

在 $x>-\frac{c}{\delta}$ 上几乎处处成立。因此，$V(x)$ 是 HJB 方程(13)的几乎处处解。定理得证。

令 $f(x)$ 为非减的、局部 Lipschitz 连续的 HJB 方程(13)的几乎处处解。令

$$\mathbb{A}^*=\left\{x>-\frac{c}{\delta}:f'(x)=1,\tilde{\mathcal{L}}f(x)=0\right\},$$

$$\mathbb{B}^*=\left\{x>-\frac{c}{\delta}:f'(x)=1,\tilde{\mathcal{L}}f(x)<0\right\},$$

$$\mathbb{I}^* = \left\{ x > -\frac{c}{\delta} : f'(x) = k, \tilde{\mathcal{L}} f(x) < 0 \right\},$$

$$\mathbb{Z}^* = \left\{ x > -\frac{c}{\delta} : f'(x) = k, \tilde{\mathcal{L}} f(x) = 0 \right\},$$

$$\mathbb{C}^* = \left\{ x > -\frac{c}{\delta} : 1 < f'(x) < k, \tilde{\mathcal{L}} f(x) = 0 \right\},$$

且 $x > -\frac{c}{\delta}$ 时，

$$a(x) := \min \arg \max_{-\frac{c}{\delta} < u \le x} \left\{ f(u) - u \right\},$$

组成的集合即为 $\mathbb{A}^*$。

$$z(x) := \max \arg \min_{-\frac{c}{\delta} \le u \le x} \left\{ f(u) - ku \right\}$$

组成的集合即为 $\mathbb{Z}^*$。

$$\beta^*(x) = \begin{cases} x - a(x), & x \in \mathbb{B}^*, \\ 0, & x \notin \mathbb{B}^*. \end{cases}$$

$$\eta^*(x) = \begin{cases} z(x) - x, & x \in \mathbb{I}^*, \\ 0, & x \notin \mathbb{I}^*. \end{cases}$$

定义 $\pi^* = \left(L_t^*, I_t^* \right)$：

$$L_t^* = \begin{cases} \alpha_1^*(X_0, t), & 0 \le t \le \tau_1 \\ L_{\tau_n} + \alpha_1^*\left(X_{\tau_n}, t - \tau_n\right), & \tau_n < t \le \tau_{n+1}, n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{15}$$

$$I_t^* = \begin{cases} \alpha_2^*(X_0, t), & 0 \le t \le \tau_1 \\ I_{\tau_n} + \alpha_2^*\left(X_{\tau_n}, t - \tau_n\right), & \tau_n < t \le \tau_{n+1}, n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\alpha_1^*(x,t) := \sum_{0 \le s < t} \beta^*\left(\phi_x^{\alpha^*}(s) \right) + \int_0^t c \mathbf{1}_{\left\{ \phi_x^{\alpha^*}(s) \in \mathbb{A}^* \right\}} \mathrm{d}s.$$

$$\alpha_2^*(x,t) := \sum_{0 \le s < t} \eta^*\left(\phi_x^{\alpha^*}(s) \right).$$

$$\phi_x^{\alpha^*}(t) := x + \int_0^t \left(c + \delta \phi^{\alpha^*}(s) \mathbf{1}_{\left\{ \phi^{\alpha^*}(s) < 0 \right\}} \right) \mathrm{d}s - \alpha_1^*(t) + \alpha_2^*(t),$$

显然，$\alpha^*(x,t) = \left(\alpha_1^*(x,t), \alpha_2^*(x,t) \right)$，$\alpha_1^*(x,t) \in \mathbb{U}_x, \alpha_2^*(x,t) \in \mathbb{V}_x$，且 $\pi^* \in \Pi_x$。

5. 验证定理

定理 5.1.1：假设非减的且绝对连续的函数 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ 是方程(13)的一个解，满足 $f(x) \le x + \frac{c}{\beta} + \frac{c}{\delta}$ 那么(15)，(16)式定义的策略 π^* 是最优策略，函数 $f = V_{\pi^*} = V$。

证明：

考虑策略 $\pi=(L,I)\in\Pi_x$，τ_n 和 τ_{n+1} 之间的受控盈余过程对应的系统为

$$\phi_x^{(n)}(t)=x+\int_0^t\left(c+\delta\phi^{(n)}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi^{(n)}(s)<0\right\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha_1^{(n)}(t)+\alpha_2^{(n)}(t).$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\beta t}f\left(X_t^\pi\right)=f(x)&+\sum_{n=0}^{N_t}\left[\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_{n+1})}f\left(X_{t\wedge\tau_{n+1}-}^\pi\right)-\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)\right]\\&+\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}\left[f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)-f\left(X_{\tau_n-}^\pi\right)\right].\end{aligned}$$

根据分部积分法

$$\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau_{n+1})}f\left(X_{t\wedge\tau_{n+1}-}^\pi\right)-\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)=\int_{[\tau_n,t\wedge\tau_{n+1}]}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{(n)}(s-\tau_n)\right)-\int_{\tau_n}^{t\wedge\tau_{n+1}}\beta\mathrm{e}^{-\beta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\beta t}f\left(X_t^\pi\right)=f(x)&+\sum_{n=0}^{N_t}\int_{[\tau_n,t\wedge\tau_{n+1}]}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{(n)}(s-\tau_n)\right)\\&-\int_0^t\beta\mathrm{e}^{-\beta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s+\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}\left[f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)-f\left(X_{\tau_n-}^\pi\right)\right].\end{aligned}$$

定义过程 M

$$M_t=\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}\left[f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)-f\left(X_{\tau_n-}^\pi\right)\right]-\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\beta s}\left[(\mathcal{G}f-f)\left(X_s^\pi\right)\right]\mathrm{d}s.$$

注意到，$X_t^\pi\le m(t):=\inf\left\{y\ge x:y\in\mathbb{A}^*\cup\mathbb{B}^*\right\}$，$f(x)$ 是非负和非减的，对所有的 $t\ge0$，有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}\left|f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)-f\left(X_{\tau_n-}^\pi\right)\right|\right]\le\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\beta\tau_n}f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)\right]\\&\le f\left(m(t)\right)\mathbb{E}_x\left[N_t\right]\le\left(m(t)+\frac{c}{\beta}+\frac{c}{\delta}\right)\mathbb{E}_x\left[N_t\right]<\infty.\end{aligned}$$

可知过程 M 是一个零初值的鞅。因此，

$$\mathrm{e}^{-\beta t}f\left(X_t^{\pi^*}\right)=f(x)+\sum_{n=0}^{N_t}\int_{[0,t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n]}\mathrm{e}^{-\beta(\tau_n+s)}\mathrm{d}\mathcal{A}^{(n)}f\left(X_{\tau_n}^\pi,s\right)-\int_0^t\beta\mathrm{e}^{-\beta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s+M_t$$

其中：

$$\mathcal{A}^{(n)}f(x,t):=f\left(\phi_x^{(n)}(t)\right)-f(x)+\lambda\int_0^t\left[(\mathcal{G}f-f)\left(\phi_x^{(n)}(s)\right)\right]\mathrm{d}s.$$

在式子两边同时加上 $\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s$ 后，再取期望，得到，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\left(t\wedge\tau^\pi\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^\pi}^\pi\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s\right]\\&=f(x)+\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{N_{t\wedge\tau^\pi}}\int_{[0,t\wedge\tau^L\wedge\tau_{n+1}-\tau_n]}\mathrm{e}^{-\beta(\tau_n+s)}\left(\mathrm{d}\mathcal{A}^{(n)}f\left(X_{\tau_n}^\pi,s\right)+\mathrm{d}v^{(n)}(s)\right)\right]-\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\beta\mathrm{e}^{-\beta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s\right]\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $v^{(n)}(t)=\mathbb{E}_x\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}\alpha_1^{(n)}(s)-k\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}\alpha_2^{(n)}(s)\right]$。对于 $x\in\left(-\frac{c}{\delta},\infty\right)$，令

$$\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}} f(t)=\mathcal{A}^{\alpha^{(n)}} f\left(X_{\tau_n}^{\pi},t\right)+v^{\alpha^{(n)}}(t)-\beta\int_0^t f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)\mathrm{d}s$$

考虑其勒贝格分解

$$\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi^*}}^{\alpha^{(n)}} f(t)=\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi^*}}^{\alpha^{(n)}} f\right)^{c}(t)+\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi^*}}^{\alpha^{(n)}} f\right)^{pd}(t),$$

其中，$\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi^*}}^{\alpha^{(n)}} f\right)^{c}(t)$ 和 $\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi^*}}^{\alpha^{(n)}} f\right)^{pd}(t)$ 分别表示其连续部分和纯离散部分。f 是局部 Lipschitz 连续的函数，所以 f 绝对连续和几乎处处可微。因此存在一个密度函数 g 使得 $f(y)-f(x)=\int_x^y g(u)\mathrm{d}u$ 和 $g(x)=f'(x)$ 几乎处处成立。因此可以得到，

$$\left(c+\delta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)g(x)-(\lambda+\beta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x)=\tilde{\mathcal{L}}f(x), a.e.$$

和 $1-g(x)\le 0, g(x)-k\ge 0$ 由于 f 几乎处处满足 HJB 方程(13)，有

$$\begin{aligned} d\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}} f\right)^{c}(t)=&\int_0^t\left[1-V'\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)\right]L_c\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(c+\delta\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)<0\right\}}\right)g\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)\\ &-(\lambda+\beta)f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)+\lambda\mathcal{G}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)\mathrm{d}s\\ &\le 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} d\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}} f\right)^{pd}(t)=&\sum_{0\le s<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s+)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(s)\right)+\Delta_+\alpha_1^{(n)}(s)\right\}\\ &+\sum_{0\le u<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(u+)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha^{(n)}}(u)\right)-k\Delta_+\alpha_2^{(n)}(u)\right\}\\ &\le 0. \end{aligned}$$

将上面两个不等式带入(17)有

$$df(x)\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\left(t\wedge\tau^{\pi}\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi}}^{\pi}\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{t\wedge\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s\right].$$

由于 f 非负，令 $t\to\infty$，有 $f(x)\ge V_{\pi}(x)$，进一步可以得到 $f(x)\ge V(x)$.

另一方面，$\mathbb{B},\mathbb{I}$ 是脉冲区间，因此 $X_t^{\pi^*}\in\mathbb{C}\cup\mathbb{A}$ 几乎处处成立，其中 π^* 是由(15)、(16)定义的。这说明

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{H}_x^{\alpha^*} f\right)^{c}(t)=&\int_0^t\left[1-V'\left(\phi_x^{\alpha^*}(s)\right)\right]L_c\left(\phi_x^{\alpha^*}(s)\right)\mathrm{d}s\\ &+\int_0^t\left\{\left(c+\delta\phi_x^{\alpha^*}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_x^{\alpha^*}(s)<0\right\}}\right)g\left(\phi_x^{\alpha^*}(s)\right)\mathrm{d}s-(\lambda+\beta)f\left(\phi_x^{\alpha^*}(s)\right)+\lambda\mathcal{G}f\left(\phi_x^{\alpha^*}(s)\right)\right\}\mathrm{d}s\\ &=0 \end{aligned}$$

和

$$\left(\mathcal{H}_x^{\alpha^*}f\right)^{pd}(t)=\sum_{0\le s<t}\left\{f\left(\phi_x^{\alpha^*}(s+)\right)-f\left(\phi_x^{\alpha^*}(s)\right)+\Delta_+\alpha_1^*(s)\right\}$$
$$+\sum_{0\le u<t}\left\{f\left(\phi_x^{\alpha^*}(u+)\right)-f\left(\phi_x^{\alpha^*}(u)\right)-k\Delta_+\alpha_2^*(u)\right\}=0.$$

将上面两个等式带入(17)，将 π,L_t,I_t 和 $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)}$ 换成 π^*,L_t^*,I_t^* 和 α_1^*,α_2^*，可得

$$f(x)=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(t\wedge\tau^*)}f\left(X_{t\wedge\tau^*}^{\pi^*}\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^*}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}L_s^*-k\int_0^{t\wedge\tau^*}\mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{d}I_s^*\right].$$

并且我们得到，当 $t\to\infty$ 时，$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\left(t\wedge\tau^{\pi^*}\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi^*}}^{\pi^*}\right)\right]\to 0$，再由 $\pi^*\in\Pi_x$ 有 $f(x)=V_{\pi^*}(x)\le V(x)$。

6. 结论

本文考虑了绝对破产情形下经典风险模型的最优分红和注资问题。在该模型下对于值函数的性质和动态规划方程进行证明，我们借助动态规划原理启发式地推导出值函数满足的 HJB 方程，将值函数的求解问题转化为了 HJB 方程的求解问题。并通过验证定理的证明，得到我们所构造的策略就是最优的分红注资策略。本文的主要创新点在于首次考虑了同时考虑注资和借贷控制对于最优分红问题的影响，且在这一模型下首次给出了最优策略的构造。但由于任意索赔分布下 HJB 方程难以求解，对于一般索赔额分布的最优策略和值函数的解析表达式并没有给出，因此需要我们进一步研究并解决。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su un'impostzione alternativa della teoria collettiva del rischio. In: *Transactions of the* 15*th International Congress of Actuaries*, Congres International d'Actuaires, New York, 433-443.

[2] Asmussen, S. and Taksar, M. (1997) Controlled Diffusion Models for Optimal Dividend Payout. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **20**, 1-15. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(96)00017-0

[3] Sethi, S.P. and Taksar, M.I. (2002) Optimal Financing of a Corporation Subject to Random Returns. *Mathematical Finance*, **12**, 155-172. https://doi.org/10.1111/1467-9965.t01-2-02002

[4] Cadenillas, A., Choulli, T., Taksar, M., *et al*. (2006) Classical and Impulse Stochastic Control for the Optimization of the Dividend and Risk Policies of an Insurance Firm. *Mathematical Finance*, **16**, 181-202. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2006.00267.x

[5] Azcue, P. and Muler, N. (2005) Optimal Reinsurance and Dividend Distribution Policies in the Cramer-Lundberg Model. *Mathematical Finance*, **15**, 261-308. https://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2005.00220.x

[6] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009) Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales Serie A Matematicas*, **103**, 295-320. https://doi.org/10.1007/BF03191909

[7] Azcue, P. and Muler, N. (2014) Stochastic Optimization in Insurance: A Dynamic Programming Approach. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0995-7

[8] Gerber, H.U. (1971) Der einfluss von zins auf die ruinwahrscheinlichkeit. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, **71**, 63-70.

[9] Dickson, D.C. and Egidio dos Reis, A.D. (1997) The Effect of Interest on Negative Surplus. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **21**, 1-16. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(97)00014-0

[10] Cai, J. (2007) On the Time Value of Absolute Ruin with Debit Interest. *Advances in Applied Probability*, **39**, 343-359. https://doi.org/10.1239/aap/1183667614

[11] Yuen, K.C., Zhou, M. and Guo, J.Y. (2008) On a Risk Model with Debit Interest and Dividend Payments. *Statistics and Probability Letters*, **78**, 2426-2432. https://doi.org/10.1016/j.spl.2008.02.021

[12] Peng, D., Liu, D.H. and Hou, Z.T. (2016) Absolute Ruin Problems in a Compound Poisson Risk Model with Constant Dividend Barrier and Liquid Reserves. *Advances in Difference Equations*, **2016**, 72. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0746-1

[13] Luo, K., Liu, J., Zhao, Y.H., *et al*. (2019) Optimal Dividend Strategies for the Compound Poisson Model with Debit Interest. *Journal of Mathematics*, **39**, 801-810.

[14] Wang, W. and He, J.M. (2020) Optimality of Barrier Dividend Strategy in a Jump-Diffusion Risk Model with Debit Interest. *Periodica Mathematica Hungarica*, **82**, 39-55. https://doi.org/10.1007/s10998-020-00338-x

[15] Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. (2004) Some Optimal Dividends Problems. *ASTIN Bulletin*, **34**, 49-74. https://doi.org/10.1017/S0515036100013878

[16] Scheer, N. and Schmidli, H. (2011) Optimal Dividend Strategies in a Cramer-Lundberg Model with Capital Injections and Administration Costs. *European Actuarial Journal*, **1**, 57-92. https://doi.org/10.1007/s13385-011-0007-3

[17] Kulenko, N. and Schmidli, H. (2008) Optimal Dividend Strategies in a Cramer-Lundberg Model with Capital Injections. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **43**, 270-278. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.013

[18] Avanzi, B., Shen, J. and Wong, B. (2011) Optimal Dividends and Capital Injections in the Dual Model with Diffusion. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **41**, 611-644. https://doi.org/10.2139/ssrn.1709174

[19] Yao, D.J., Yang, H.L. and Wang, R.M. (2011) Optimal Dividend and Capital Injection Problem in the Dual Model with Proportional and Fixed Transaction Costs. *European Journal of Operational Research*, **211**, 568-576. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.01.015

[20] Zhao, Y.X., Chen, P. and Yang, H.L. (2017) Optimal Periodic Dividend and Capital Injection Problem for Spectrally Positive Levy Processes. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **74**, 135-146. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.03.006

[21] Xu, R. and Woo, J.K. (2020) Optimal Dividend and Capital Injection Strategy with a penalty Payment at Ruin: Restricted Dividend Payments. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **92**, 1-16. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.02.008

[22] Schmidli, H. (2022) Dividends and Capital Injections in a Renewal Model with Erlang Distributed Inter-Arrival Times. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2022**, 49-63. https://doi.org/10.1080/03461238.2021.1926315