Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(3), 1114-1119
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123113

Hans汉斯

插值节点具有高阶导数信息的多项式插值算法

王侨祎*，金禹含，史佳莉

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年2月17日；录用日期：2023年3月13日；发布日期：2023年3月21日

摘 要

目前大部分对插值的研究都只研究函数的多项式插值，少数文章给出了一阶或二阶导数的多项式插值，本文给出了对函数及其高阶导数的多项式插值的理论算法，构造高阶导数的多项式插值听起来是复杂的，一般的算法也是庞大的，本文采取与经典研究方法不同的思路，运用行列式函数求导法则直接待定插值多项式，并给出证明，最后通过K值法和罗尔定理计算了Lagrange型插值余项，便于误差的分析，至此，要求在各插值节点上插值多项式函数与被插函数的函数值相等，且任意阶导数值也相等的问题在理论上解决了。

关键词

插值节点高阶导数，多项式插值，余项

Polynomial Interpolation Algorithm with Higher-Order Derivative Information for Interpolation Nodes

Qiaoyi Wang*, Yuhan Jin, Jiali Shi

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Feb. 17th, 2023; accepted: Mar. 13th, 2023; published: Mar. 21st, 2023

Abstract

At present, most of the researches on interpolation only study the polynomial interpolation of function. A few papers give the polynomial interpolation of the first or second derivative. This paper gives the theoretical algorithm of polynomial interpolation of function and its higher deriva-

*通讯作者。

文章引用: 王侨祎, 金禹含, 史佳莉. 插值节点具有高阶导数信息的多项式插值算法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1114-1119. DOI: 10.12677/aam.2023.123113

tive, the construction of polynomial interpolation of high order derivative sounds complicated, and the general algorithm is huge. This paper takes a different idea from the classical research methods. Finally, the residual terms of Lagrange-type interpolation are calculated by K-value method and Rohr's theorem, which is convenient for error analysis. So far, the problems that the interpolation polynomial function and the interpolated function are equal on each interpolation node, and the derivative values of any order are equal, have been solved theoretically.

Keywords

High Order Derivative of Interpolation Node, Polynomial Interpolation, The Remainder

1. 引言

插值理论在工程近似计算领域发挥着重要作用，而多项式函数由于其计算和表达上的简单性，在数值近似理论以及工程计算等方面都有着广泛应用。在实际应用过程中，相当一部分多项式插值问题要求在插值节点处，插值多项式不仅与被插值函数的值相等，而且与它的导数值也相等。对于插值节点有一、二阶导数信息的 Hermite 插值算法已经有学者进行了相关研究[1]，并给出了较为良好的算法设计。本文提供了在一定条件下，插值节点具有高阶导数信息的多项式插值一般算法，并利用行列式函数高阶导给出证明，最后计算了 Lagrange 型插值余项。

2. 预备知识

引理设函数 $f_{ij}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在区间 I 上可导，则行列式函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

也在区间 I 上可导，且有

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}'(x) & f_{i2}'(x) & \cdots & f_{in}'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

引理的证明在参考文献[2]中已有学者给出，此处不作证明。

3. 主要结论及证明

定理 1 [3]设函数 f 为数集 $\mathbb{R}$ 上的实函数，且对于 $\mathbb{R}$ 上的各点 $x_1,x_2,\cdots,x_p\left(x_1<x_2<\cdots<x_p\right)$，有 $f^{(k)}(x_i)=r_{ik}\left(i=1,2,\cdots,p;k=0,1,\cdots,n_i\right)$，记 $n=\sum_{i=1}^{p}(n_i+1)-1$，$\boldsymbol{x}_n(x)=\left(1,x,\cdots,x^n\right)$，若

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} \neq 0\text{，则满足}\begin{vmatrix} p(x) & \boldsymbol{x}_n(x) \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0$$

的多项式 $p(x)$ 即为 f 的插值多项式，即 $p^{(k)}(x_i) = r_{ik}\,(i = 1,2,\cdots,p; k = 0,1,\cdots,n_i)$。

证明 只需证明对于 $\forall x_j \in \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}, \forall l \in \{0,1,\cdots,n_j\}$，有 $p^{(l)}(x_j) = f^{(l)}(x_j)$，再由 x_j 和 l 的任意性即可证出结论。

对于等式

$$\begin{vmatrix} p(x) & \boldsymbol{x}_n(x) \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0$$

观察发现，等式左端的行列式函数除首行外各元素均为实数，因此，利用引理对该式求一、二阶导可得

$$\begin{vmatrix} p'(x) & \boldsymbol{x}_n'(x) \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} p''(x) & \boldsymbol{x}_n''(x) \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0$$

以此类推，对该式求 l 阶导可得

$$\begin{vmatrix} p^{(l)}(x) & \boldsymbol{x}_n^{(l)}(x) \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0$$

将 $x = x_j$ 代入上式，得到

$$\begin{vmatrix} p^{(l)}(x_j) & \boldsymbol{x}_n^{(l)}(x_j) \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0$$

对等式左端行列式函数进一步变形，将 $f^{(l)}(x_j)$ 所在行，即 $\left(f^{(l)}(x_j), \boldsymbol{x}_n^{(l)}(x_j)\right)$ 乘负一加到首行，则有

$$\begin{vmatrix} p^{(l)}(x_j) - f^{(l)}(x_j) & \mathbf{0} \\ f(x_1) & \boldsymbol{x}_n(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1) & \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(x_p) & \boldsymbol{x}_n(x_p) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n_p)}(x_p) & \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}(x_p) \end{vmatrix} = 0$$

把行列式函数按首行展开，则

$$\left(p^{(l)}\left(x_j\right)-f^{(l)}\left(x_j\right)\right)\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_n\left(x_1\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}\left(x_1\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n\left(x_p\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}\left(x_p\right) \end{vmatrix}=0$$

而其中，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_n\left(x_1\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{(n_1)}\left(x_1\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n\left(x_p\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{(n_p)}\left(x_p\right) \end{vmatrix}\neq 0\text{，故 } p^{(l)}\left(x_j\right)-f^{(l)}\left(x_j\right)=0$$

由此，定理得证。

定理 2 设 f 为数集 $\mathbb{R}$ 上的实函数，对于 $\mathbb{R}$ 上的各点 $x_1,x_2,\cdots,x_p\left(x_1<x_2<\cdots<x_p\right)$，有 $f^{(k)}\left(x_i\right)=r_{ik}\left(i=1,2,\cdots,p;k=0,1,\cdots,n_i\right)$，且 f 在 $\mathbb{R}$ 上 $n+1$ 阶可导，其中，$n=\sum_{i=1}^{p}\left(n_i+1\right)-1$，对于它的插值[4]多项式 $p(x)$，存在 $\xi\in\mathbb{R}$，满足

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=1}^{p}\left(x-x_i\right)^{n_i+1}$$

证明[5] 令

$$g(t)=f(t)-\left(p(t)+k\prod_{i=1}^{p}\left(t-x_i\right)^{n_i+1}\right)$$

由于 $p^{(l)}\left(x_j\right)=f^{(l)}\left(x_j\right)$，所以显然有 $g^{(k)}\left(x_i\right)=0\left(i=1,2,\cdots,p;k=0,1,\cdots,n_i\right)$ 且 $g(x)=0$。

对 $g(x)=g\left(x_i\right)=0\left(i=1,2,\cdots,p\right)$ 应用 Roll 定理，则 $g'(x)$ 增加了 n 个零点，结合 $g'\left(x_i\right)=0$，再次应用 Roll 定理，以此类推，最终得到 $g^{(m)}(x)$ 一共存在 $n-m+2$ 个零点，其中，$m=\max\limits_{1\le i\le n}n_i$。

由于 $n-m+2>0$，所以可以对 $g^{(m)}(x)$ 继续应用 $n-m+1$ 次 Roll 定理，于是存在 $\xi\in\mathbb{R}$，满足 $g^{(n+1)}(\xi)=0$，即

$$f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!=0$$

于是解得 $k=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，代入可得

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=1}^{p}(x-x_i)^{n_i+1}$$

4. 总结

本文解决了满足各插值节点上与被插函数的函数值相等的插值多项式的理论算法，并给出了拉格朗日型余项，可用于估计误差。

参考文献

[1] 王昌厚. 插值节点具有二阶导数信息的 Hermite 插值算法[J]. 福建电脑, 2010, 26(11): 92-93.

[2] 周琴, 李节强, 杨柳, 等. 行列式函数的高阶求导及应用[J]. 内江师范学院学报, 2009, 24(6): 17-21.

[3] 楼红卫. 数学分析: 要点·难点·拓展[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[4] 崔利宏，聂碧宏，李雪. 二元双 n 次多项式插值问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(4): 433-437.

[5] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.