

具有恒定容量避难所的 Filippov捕食者-食饵模型的 全局动力学

蒋杉, 周培

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2023年2月21日; 录用日期: 2023年3月20日; 发布日期: 2023年3月27日

摘要

本文研究了一类具有恒定容量避难所的Filippov捕食者-食饵模型。应用Filippov方法研究了模型的滑模动力学, 并进一步研究了模型的全局动力学。证明了系统存在唯一的正平衡, 且该平衡是全局渐近稳定的。结果表明, 建立适当容量的避难所有利于维持捕食者与被捕食者之间的平衡。

关键词

捕食者-食饵系统, 避难所, 平衡点, 稳定性

Global Dynamics of a Filippov Predator-Prey Model with a Constant-Capacity Refuge

Sha Jiang, Pei Zhou

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha
Hunan

Received: Feb. 21st, 2023; accepted: Mar. 20th, 2023; published: Mar. 27th, 2023

Abstract

In this paper, a predator-prey model with a constant-capacity refuge is studied. We apply Filippov method to study the sliding mode dynamics of the model, and studied the global dynamics furtherly. It is proved that there exists a unique equilibrium and the equilibrium is globally asymptotically stable. The results show that the establishment of a refuge with appropriate capacity is beneficial to maintain the balance between predator and prey.

Keywords

Predator - Prey Model, Refuge, Equilibrium, Stability

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在自然界中, 生活在同一地方的物种之间为了生存而进行着残酷的斗争. 食物链是生态系统的基本结构, 是由种群的长期发展和进化而形成的. 例如, 狼和羊在同样的环境中, 当环境中的草繁茂时, 羊的食物充足, 因此羊开始大量繁殖. 由于羊数量的增加, 狼有了充足的食物, 于是狼开始大量繁殖. 当狼的数量增加后, 羊的总数量由于被吃而逐渐减少, 因此狼的食物减少以至于狼本身数量减少. 这个时候, 羊的安全性提高了, 所以总数又开始增加, 重复这个过程, 直到达到平衡. 针对上述现象, 意大利著名生物数学家Volterra建立了如下数学模型 [1] [2] [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - cxy \\ \dot{y} = \beta xy - dy. \end{cases}$$

假设 x 是食饵的密度, y 是捕食者的密度. 其中 r 是食饵的出生率, β 表示被捕获的食饵转化为新的捕食者的效率, d 表示捕食者的死亡率, 当捕食者的数量急剧增加时, 对食饵的威胁也会随之增加. 为了保证食饵种群不被完全杀死, 人类开始干预, 为食饵建立避难所是一种有效的防止食饵灭绝的方法. 近年来, 人们做了大量的工作来研究食饵避难所的影响, 如文献 [3] [4] [5]等, 作者提出了具有恒定比例容量的猎物避难所的Lotka-Volterra捕食者模型. 在参考文献 [6] [7] [8]中, 研究

了HollingII型和有避难所的捕食者-食饵系统的动力学行为.

在本文中, 我们以食饵密度作为阈值来分析以下模型 [4] [9] [10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - c(x - \varepsilon R)y \\ \dot{y} = \beta(x - \varepsilon R)y - dy, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 K 为其承载能力, $K > R$ 和 $K > \sigma$, R 是食饵避难所所能容纳的最大容量.

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & x > \sigma, \\ 1, & x < \sigma, \end{cases} \quad (1.2)$$

是控制函数, $\sigma > 0$ 表示阈值. 当食饵密度高于 σ 时, 不需要采取控制措施. 然而, 一旦食饵密度低于阈值 σ , 就应该立即打开避难所来保护食饵.

本文的其余部分组织如下: 在第二节, 我们给出了Filippov系统的一些定义和性质; 第三节分析了滑模的存在性和动力学分析; 在第四节中, 证明了平衡点的全局稳定性, 并给出了数值模拟图; 最后, 在第五部分得出结论.

2. 模型介绍及预备知识

在这一节中, 我们给出了本文所需要的Filippov系统的一些定义和性质. 更多细节请参考 [11] [12] [13] [14].

设 $(x, y) \in R_+^2$, 我们将 R_+^2 分成以下三部分:

$$G_1 = \{(x, y) \in R_+^2 : x > \sigma\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in R_+^2 : x < \sigma\},$$

$$\Omega = \{(x, y) \in R_+^2 : x = \sigma\},$$

我们选择 $n = (1, 0)$ 作为法向量. 显然, 系统(1.1)由两个子系统组成

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - cxy \\ \dot{y} = \beta xy - dy \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - cx - Ry \\ \dot{y} = \beta x - Ry - dy \end{cases} \quad (2.2)$$

由于系统(1.1)右侧的不连续性, 本文定义了Filippov意义下(1.1)的解. 设 $\text{co}[\phi(I)]$ 为 $\phi(I)$ 的凸闭包, 那么 $\text{co}[\phi(I)] = [\phi(I^-), \phi(I^+)]$, 其中 $\phi(I^-)$ 和 $\phi(I^+)$ 分别表示 ϕ 在 I 处的左右极限.

接下来, 我们分别研究子系统的全局动力学.

首先在 G_1 中, 显然系统(2.1)总是有两个边界平衡点 $(0, 0)$ 和 $(K, 0)$. 此外, $(0, 0)$ 始终是一个鞍点. 如果 $\beta K < d$, 则 $(K, 0)$ 是一个稳定结点, 如果 $\beta K > d$, 则它是一个鞍点. 当 $\beta K > d$ 时,

(2.1)有唯一的正平衡点 $E_1 = (x_1^*, y_1^*) = \left(\frac{d}{\beta}, \frac{r\beta K - rd}{c\beta K}\right)$, 当它存在时, 这是一个稳定的焦点或结点.

接下来在 G_2 中, 显然系统(2.2)也总是有两个边界平衡点 $(0, 0)$ 和 $(K, 0)$. $(0, 0)$ 始终是一个鞍点. 如果 $\beta K < d + \beta R$, 则 $(K, 0)$ 是一个稳定结点, 如果 $\beta K > d + \beta R$, 则它是一个鞍点. 当 $\beta K > d + \beta R$ 时, (2.2)也有唯一的正平衡点 $E_2 = (x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{\beta R + d}{\beta}, \frac{r[(\beta R + d)(\beta K - \beta R - d)]}{\beta K c d}\right)$. 当它存在时, 这是一个稳定的焦点或结点.

命题2.1. 假设 $(x(t), y(t))$ 为模型(1.1)在区间 $[0, T], T \in (0, +\infty)$ 上满足初始条件 $x(0) = x_0 > 0$ 和 $y(0) = y_0 > 0$ 的解, 则对所有的 $t \in [0, T]$ 有 $x(t) > 0$ 且 $y(t) > 0$.

证明. 由反证法证明 $y(t) > 0$. 假设存在 t_0 使得 $y(t_0) \leq 0$, 那么存在 $t^* > 0$ 满足 $y(t^*) = 0$ 并且对于所有的 $t \in [0, t^*)$ 有 $y(t) > 0$. 考虑模型(1.1)的第二个方程, 我们对所有的 $t \in [0, t^*)$ 有

$$\frac{dy}{dt} = y[\beta(x - \varepsilon R) - d],$$

所以

$$y(t^*) = y(0)e^{\int_0^{t^*} [\beta(x(s) - \varepsilon R) - d] ds} > 0,$$

它和 $y(t^*) = 0$ 矛盾.

接下来由模型(1.1)的第一个方程, 如果在 $x = 0$ 处可得 $\frac{dx}{dt} = \varepsilon c R y \geq 0$, 因为已证 $y(t) > 0$, 则由 $x(0) > 0$ 可知 $x(t) > 0$. 证毕. □

命题2.2. 假设 $(x(t), y(t))$ 为模型(1.1)的解, 其中对所有的 $t \in [0, +\infty)$ 有 $x(0) = x_0 > 0$ 和 $y(0) = y_0 > 0$. 则解 $(x(t), y(t))$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上有界.

证明. 注意 $\frac{dx}{dt}|_{x=K} = -c(K - \varepsilon R)y < 0, \frac{dx}{dt}|_{x>K} < 0$.

因此对(2.1)的每个解 $(x(t), y(t))$, 存在一个 $T > 0$, 对于 $t \geq T$ 使得 $x(t) < K$.

则对 $t \geq T$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\left(x(t) + \frac{c}{\beta}y(t)\right)}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{cd}{\beta}y \\ &\leq rK\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{cd}{\beta}y \\ &= rK - \left(rx + \frac{cd}{\beta}y\right) \\ &\leq rK - \min\{r, c\}\left(x(t) + \frac{d}{\beta}y(t)\right) \end{aligned}$$

遵循 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) + \frac{c}{\beta}y(t)\right) \leq \frac{rK}{\min\{r, c\}}$, 因此解在 $t \in [0, +\infty)$ 上有界. □

命题2.3. 系统(2.1)和(2.2)分别有一个全局渐近稳定的正平衡点 E_1, E_2 .

证明. 构造Dulac函数为 $B = \frac{1}{xy}$, 则

$$\frac{\partial(Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{i2})}{\partial y} < 0,$$

根据Bendixson - Dulac法则知系统(2.1)和(2.2)不存在极限环. 因此正平衡点 E_1, E_2 全局渐近稳

定。 □

3. 滑模的存在性及其动力学

本节我们首先讨论滑模的存在性, 然后研究其动力学行为.

由 $\langle n_1, F_1 \rangle = 0, \langle n_1, F_2 \rangle = 0$. 可令 $T^1 := \frac{r(K-\sigma)}{cK}, T^2 := \frac{r\sigma(K-\sigma)}{cK(\sigma-R)}$, 其中 $K > \sigma$.

当 $\sigma > R$ 时, 由 $\langle n_1, F_1 \rangle \leq 0, \langle n_1, F_2 \rangle \geq 0$, 系统(2.1)在 Ω 上的滑模区域:

$$\Sigma_{s_1} \subset \Omega = \{(x, y) \in \Omega; T^1 \leq y \leq T^2\}.$$

当 $\sigma \leq R$ 时, 系统(2.1)在 Ω 上的滑模区域:

$$\Sigma_{s_2} \subset \Omega = \{(x, y) \in \Omega; T^1 \leq y\}.$$

根据Filippov凸方法

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2$$

得滑模方程为

$$f(y) = \frac{\beta r \sigma (K - \sigma)}{cK} - dy. \quad (3.1)$$

系统存在唯一一个正平衡解 $E_p = (\sigma, y_p^*)$, 其中 $y_p^* = \frac{\beta r \sigma (K - \sigma)}{cKd}$, 当 $\sigma > R$ 时, 当且仅当 $T^1 \leq y_p^* \leq T^2$ 时, 在 $\Sigma_{s_1} \subset \Omega$ 上存在唯一的伪平衡点 E_p . 当 $\sigma \leq R$ 时, 当且仅当 $T^1 \leq y_p^*$ 时, 在 $\Sigma_{s_2} \subset \Omega$ 上存在唯一的伪平衡点 E_p . 由

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta r \sigma (K - \sigma)}{cK} - dy \right] \Big|_{E_p} = -d < 0$$

这表明解是吸引的, 也就是说, 当伪平衡 E_p 存在时, 它是全局渐近稳定的.

4. 全局动力学

引理4.1. 系统(2.1)不存在围绕滑模 Σ_s 的闭轨.

证明. 下面我们采用反证法来证明.

假设存在一个包含 Σ_s 的极限环 Γ . 如图 1 所示, 记极限环与流形的上下交点分别为 N 和 M , 极限环与 $x = \sigma + \delta$ 的上下交点分别为 $N_1 = N - \delta$ 和 $M_1 = M + \delta$, 同时, 记极限环与 $x = \sigma - \delta$ 的上下交点分别为 $N_2 = N + \delta$ 和 $M_2 = M - \delta$, 其中 $\delta > 0$ 充分小. 此外满足 $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_i = M, \lim_{\delta \rightarrow 0} N_i = N (i = 1, 2)$. 令 ∂D_1 表示 Γ_1 和 $N_1 M_1$ 所围成的区域 D_1 的边界, ∂D_2 表示 Γ_2 和 $M_2 N_2$ 所围成的区域 D_2 的边界. 选择Dulac 函数为 $B = \frac{1}{xy}$, 得到

$$\begin{aligned} & \iint_D \left(\frac{\partial (BF_1)}{\partial x} + \frac{\partial (BF_2)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^2 \iint_{D_i} \left(\frac{\partial (Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial (Bf_{i2})}{\partial y} \right) dx dy < 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

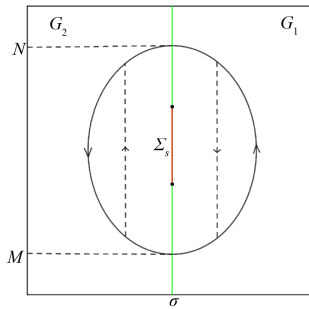


Figure 1. Suppose that there exists a limit cycle Γ containing Σ_s

图 1. 假设存在一个包含 Σ_s 的极限环 Γ

在 D_1 中应用格林公式有

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_{11})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{12})}{\partial y} \right] dx dy &= \oint_{\partial D_1} (Bf_{11}) dy - \oint_{\partial D_1} (Bf_{12}) dx \\ &= \int_{\Gamma_1} Bf_{11} dy + \int_{\overrightarrow{N_1 M_1}} Bf_{11} dy - \left(\int_{\Gamma_1} Bf_{12} dx + \int_{\overrightarrow{N_1 M_1}} Bf_{12} dx \right) \\ &= \int_{\Gamma_1} (Bf_{11} \cdot f_{12} - Bf_{12} \cdot f_{11}) dt + \int_{\overrightarrow{N_1 M_1}} Bf_{11} dy \\ &= \int_{\overrightarrow{N_1 M_1}} Bf_{11} dy. \end{aligned}$$

其中 $\frac{dx}{dt} = f_{11}$, $\frac{dy}{dt} = f_{12}$, $\int_{\overrightarrow{N_1 M_1}} Bf_{12} dx = 0$.

同样在 D_2 中应用格林公式有

$$\iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_{21})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{22})}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\overrightarrow{M_2 N_2}} Bf_{21} dy.$$

由于 $N > M$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_i = M$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} N_i = N (i = 1, 2)$, 可知

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\overrightarrow{N_1 M_1}} Bf_{11} dy + \int_{\overrightarrow{M_2 N_2}} Bf_{21} dy \right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{N_1}^{M_1} \left(\frac{r}{y} - \frac{rx}{Ky} - c \right) dy + \int_{M_2}^{N_2} \left(\frac{r}{y} - \frac{rx}{Ky} - c + \frac{cR}{x} \right) dy \right] \\ &= \left(r \ln y - cy - \frac{rx}{K} \ln y \right) \Big|_N^M + \left(r \ln y - \frac{rx}{K} \ln y - cy + \frac{cRy}{x} \right) \Big|_M^N \\ &= \frac{cR}{x} (N - M) > 0. \end{aligned}$$

这与式(4.1)矛盾, 即系统(2.1)不存在围绕滑模 Σ_s 的闭轨. □

引理4.2. 系统(2.1)不存在包含部分滑模 Σ_s 的闭轨.

证明. 在这种情况下, 采用反证法来证明, 不失一般性, 假设 E_1 为实平衡点, E_2 为虚平衡点, 系统(2.1)存在包含部分 Σ_s 的闭轨 Γ , 则 Γ 一定从切点 T^1 出发并且到达 Σ_s , 如图 2 所示, 此时闭轨外

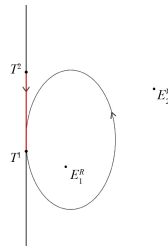


Figure 2. The possible closed orbit containing a part of $\bar{\Sigma}_s$

图 2. 可能存在的包含部分滑模 Σ_s 的闭轨

面的解轨线不能进入闭轨内部, 这与 E_1 在区域 G_1 的全局稳定性是矛盾的, 因此从 T^1 出发的轨线不会到达 Σ_s . □

引理 4.3. 如果系统 (2.1) 的正半轨 T^+ 是有界的, 那么它的极限集 $\Omega(T)$ 要么包含一个平衡点, 要么包含一个闭轨, 见 [12].

定理 1. 当正平衡点 E_1, E_2 都存在时, 下面结论成立:

- (1) 当 $\sigma < x_1^*$ 时, 实平衡点 E_1 是全局渐近稳定的;
- (2) 当 $\sigma > x_2^*$ 时, 实平衡点 E_2 是全局渐近稳定的;
- (3) 当 $x_1^* < \sigma < x_2^*$ 时, 伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的.

证明. 首先证明结论 (1). 当 $\sigma < x_1^*$ 时, 由滑模方程 (3.1) 性质可知, $f(T^1) = \frac{r(\beta r - d)(K - \sigma)}{cK} < 0, f(T^2) = \frac{r\sigma(\beta\sigma - \beta R - d)(K - \sigma)}{cK} < 0$. 即在区间 (T^1, T^2) 上 $f(y) < 0$, 这说明伪平衡点不存在, 且滑模上的轨迹由 T^2 到 T^1 . 又因为解有界且根据引理可知不存在其它闭轨, 则由引理 (4.3) 可得出唯一的实平衡点 E_1 是全局渐近稳定的, 如图 3 所示. 类似地也可得出结论 (2): 当 $\sigma > x_2^*$ 时, 实平衡点 E_2 是全局渐近稳定的, 如图 4 所示.

接下来证明结论 (3). 当 $x_1^* < \sigma < x_2^*$ 时, $f(T^1) = \frac{r(\beta r - d)(K - \sigma)}{cK} > 0, f(T^2) = \frac{r\sigma(\beta\sigma - \beta R - d)(K - \sigma)}{cK} < 0$, 此时函数 $f(y)$ 在区间 (T^1, T^2) 上有唯一的零点, 则说明唯一的伪平衡点 E_p 存在, 且它是稳定的. 则由引理 (4.3) 可得出唯一的伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的, 如图 5 所示. □

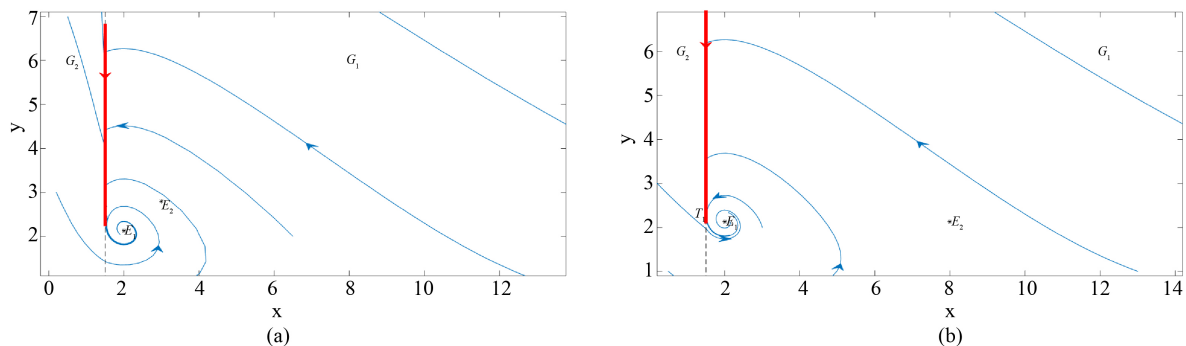


Figure 3. Global asymptotic stability of the real equilibrium E_1 . (a) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 1.5, R = 1$; (b) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 1.5, R = 6$

图 3. 实平衡 E_1 的全局渐近稳定性. (a) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 1.5, R = 1$; (b) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 1.5, R = 6$

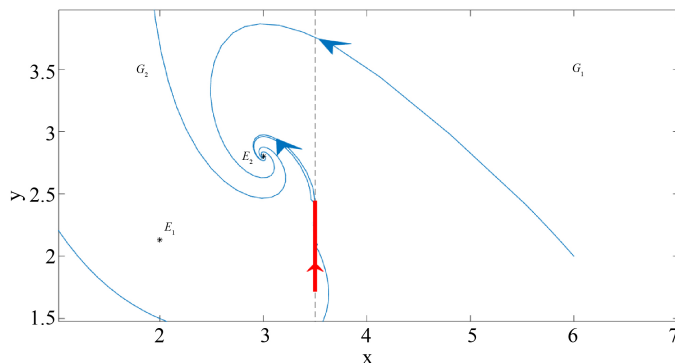


Figure 4. Global asymptotic stability of the real equilibrium E_2 .
 $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, R = 1, \sigma = 3.5$

图 4. 实平衡 E_2 的全局渐近稳定性.. $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2,$
 $d = 0.4, R = 1, \sigma = 3.5$

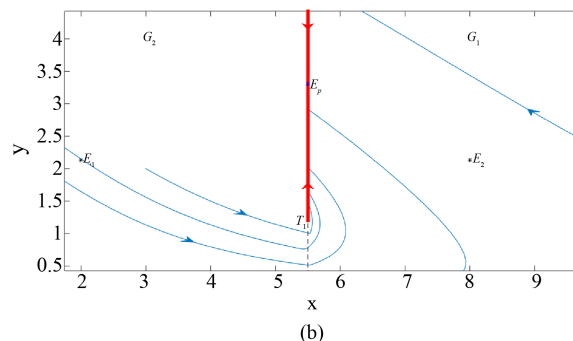
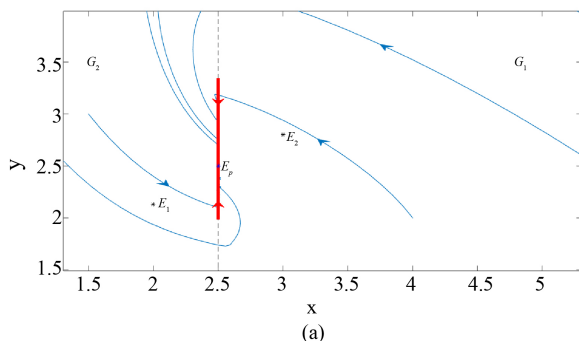


Figure 5. Global asymptotic stability of the pseudo-equilibrium E_p .(a) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 2.5, R = 1$; (b) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 5.5, R = 6$

图 5. 伪平衡 E_p 的全局渐近稳定性. (a) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 2.5, R = 1$; (b) $r = 0.8, K = 10, c = 0.3, \beta = 0.2, d = 0.4, \sigma = 5.5, R = 6$

5. 结论

本文以食饵密度为阈值, 建立了一类带有恒定容量避难所以及具有Logistic增长率的捕食-食饵模型. 首先分为 $\sigma > R$ 和 $\sigma \leq R$ 的情况, 分析在其两种情况下滑模的存在性. 之后在 $\sigma < x_1^*$, $\sigma > x_2^*$ 和 $x_1^* < \sigma < x_2^*$ 情形下分别讨论正平衡点的存在性和全局稳定性. 当 $\sigma < x_1^*$ 时, 实平衡点 E_1 是全局渐近稳定的; 当 $\sigma > x_2^*$ 时, 实平衡点 E_2 是全局渐近稳定的; 当 $x_1^* < \sigma < x_2^*$ 时, 伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的. 其中, 在 $\sigma \leq R$ 情况下, 不会出现 $\sigma > x_2^*$ 情形, 也就意味着 E_2 永远都是虚的, 且不存在全局渐近稳定的情况.

本文的理论证明和数值模拟的结果表明了, 模型的解依赖于阈值水平 σ 的变化, 这就意味着选取一个合适的阈值对保护生物多样性和维持生态平衡有着非常重要的作用.

参考文献

- [1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 靳祯. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] 王高雄. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [3] 李沛娟, 张睿. 对具有恐惧和庇护所的捕食系统的动力学研究[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(18): 281-287.
- [4] González-Olivares, E. and Ramos-Jiliberto, R. (2003) Dynamic Consequences of Prey Refuges in a Simple Model System: More Prey, Fewer Predators and Enhanced Stability. *Ecological Modelling*, **166**, 135-146. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00131-5](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00131-5)
- [5] Chen, F., Ma, Z. and Zhang, H. (2012) Global Asymptotical Stability of the Positive Equilibrium of the Lotka-Volterra Prey-Predator Model Incorporating a Constant Number of Prey Refuges. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 2790-2793. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.04.006>
- [6] Tang, S. and Liang, J. (2013) Global Qualitative Analysis of a Non-Smooth Gause Predator-Prey Model with a Refuge. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **76**, 165-180. <https://doi.org/10.1016/j.na.2012.08.013>
- [7] Wu, Y., Chen, F. and Du, C. (2021) Dynamic Behaviors of a Nonautonomous Predator-Prey System with Holling Type II Schemes and a Prey Refuge. *Advances in Difference Equations*, **2021**, Article No. 62. <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03222-1>
- [8] Kar, T.K. (2005) Stability Analysis of a Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **10**, 681-691. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2003.08.006>
- [9] Li, W., Chen, Y. and Huang, L. (2022) Global Dynamics of a Filippov Predator-Prey Model with Two Thresholds for Integrated Pest Management. *Chaos, Solitons and Fractals*, **157**, Article ID: 111881. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111881>
- [10] Chen, X. and Huang, L. (2015) A Filippov System Describing the Effect of Prey Refuge Use on a Ratio-Dependent Predator-Prey Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **428**, 817-837. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.045>
- [11] 马慧丽, 黄立宏, 王佳伏. 有干预措施的Filippov戒烟模型的全局动力学[J]. 经济数学, 2020, 37(3): 208-213.
- [12] Filippov, A.F. (1988) *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [13] Wang, A. and Xiao, Y. (2013) Sliding Bifurcation and Global Dynamics of a Filippov Epidemic Model with Vaccination. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article ID: 1350144. <https://doi.org/10.1142/S0218127413501447>
- [14] Zhu, J. and Liu, H. (2006) Permanence of the Two Interacting Prey-Predator with Refuges. *Journal of Northwest University for Nationalities*, **27**, 1-3.