

# 定义于圆锥体上的Hermite插值研究

姜文芳, 谭 荣

和田师范专科学校, 新疆 和田

收稿日期: 2023年2月24日; 录用日期: 2023年3月21日; 发布日期: 2023年3月28日

## 摘 要

本文主要是对定义于圆锥体上的Hermite插值问题进行研究, 所讨论的内容基于多元逼近的范畴, 在二元Hermite插值公式的基础上, 给出了三元Hermite插值公式。作者根据直角三角形通过旋转得到的圆锥体, 从直角三角形上的二元Hermite插值联想到圆锥体上的三元Hermite插值。根据代数集和理想的相关知识, 得到了添加平面法构造插值适定结点组的方法, 从而找到了圆锥体上的插值适定结点组。并以圆锥体上的Hermite插值为例, 给出了插值公式和计算方法, 通过具体的算例和Matlab软件给出插值效果图, 可以看出此算法的优势。

## 关键词

圆锥体, 多元Hermite插值, 理想, 适定结点组

# Hermite Interpolation Defined on a Cone

Wengfang Jiang, Rong Tan

Hetian Normal College, Hetian Xinjiang

Received: Feb. 24<sup>th</sup>, 2023; accepted: Mar. 21<sup>st</sup>, 2023; published: Mar. 28<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

This paper mainly studies the Hermite interpolation problem defined on the cone. The content discussed is based on the category of multivariate approximation. Based on the Two-dimensional Hermite interpolation formula, the ternary Hermite interpolation formula is given. The author associates the binary Hermite interpolation on the right triangle with the ternary Hermite interpolation on the cone according to the cone obtained by rotating the right triangle. According to the relevant knowledge of algebraic set and ideal, the method of adding plane method to construct the interpolation well-posed node group is obtained, and the interpolation well-posed node group on the cone is found. Taking Hermite interpolation on the cone as an example, the interpolation formula and calculation method are given. The advantages of this algorithm can be seen through the

specific example and the interpolation effect diagram given by Matlab software.

## Keywords

Cone, Multivariate Hermite Interpolation, Ideal, Adaptive Node Group

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

插值问题在计算数学所研究的领域中一直都有着至关重要的位置, 它的研究价值也备受国内外专家学者的关注。多元函数插值是在一元函数插值的基础上进一步研究的结果, 也是插值工具与被插值对象的一个多元推广。多元插值理论和插值方法在解决很多实际问题 and 科研工作中都有着广泛的应用。近年来, 人们发现二元函数插值已远远满足不了科学发展的需求, 由于许多工业制品与工具都是立体的, 所以三元函数插值研究也就显得更加重要。而圆锥体又在工程设计和机械制造中有着非常重要应用, 许多机器零件和建筑物在造型上都采取了圆柱体的形状, 例如我们在生活中常见的粮仓、屋顶、陀螺、火箭头、子弹头等都采用了圆锥体的设计。因此研究圆锥体上的 Hermite 插值也就有着重要意义。本文将直角三角形上的二元 Hermite 插值拓展到圆锥体上的三元 Hermite 插值进行研究(见文献[1])。首先给出了二元 Hermite 的插值公式与构造方法(见文献[2])。在此基础上, 给出了三元 Hermite 插值公式, 并给出了具体的算例(见文献[3])。

## 2. 基本定义和基本定理

**Hermite 插值公式:** 在平面上任意给出  $n+1$  条竖直线  $x = x_k, k = 0, 1, \dots, n$ 。接下来在  $x = x_n$  上取  $n+1$  个点, 在  $x = x_{n-1}$  上取  $n$  个点, 在  $x = x_{n-2}$  上取  $n-1$  个点, 依此类推, 在  $x = x_0$  上取 1 个点。在所有取得的点中, 要求只有一个点有从 0 阶到  $r$  阶微商, 这也就是要求,  $x$  与  $y$  的混合微商不能够超过  $r$ , 因此 Hermite 条件的个数即为  $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$  个, 在其它的点处, 关于  $x$  与  $y$  从 0 阶到  $r$  阶的微商 Hermite 条件个数一共有  $(r+1)^2$  个, 从而需要有一个  $m = (n+1)r + n$  次的二元多项式  $P(x, y)$  去满足以上这些插值条件。根据迭加插值法的定义, 下面将给出二元 Hermite 插值的插值公式:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)^{r+1} \sum_{j=0}^r (x - x_i)^j P_{ij}(y)$$

其中  $P_{ij}(y)$  是  $y$  的  $(n+1)r - i(r+1) - j + n$  次多项式的一般形式(见文献[1])。这样我们便了解到, 像

$\sum_{j=0}^r (x - x_i)^j P_{ij}(y)$  这样的多项式, 它构成的空间一定是直线  $x = x_i$  上能够满足插值条件的适定插值空间。

那么为了计算出公式中的  $P(x, y)$ , 我们只需要根据  $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$  上的插值条件一个一个的算出  $P_{0j}(y), P_{1j}(y), \dots, P_{nj}(y)$  的系数便可。而将  $P_{0j}(y), P_{1j}(y), \dots, P_{nj}(y)$  的系数算出后, 将这些系数代入多项式  $P(x, y) = \sum_{i=0}^n \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)^{r+1} \sum_{j=0}^r (x - x_i)^j P_{ij}(y)$  中, 我们就能够得到所求的插值多项式了(见文献[4])。

算例 1: 直角三角形上的 Hermite 插值

设  $\Delta$  是由三条直线  $x=0$ ;  $y=0$  与  $x+y=1$  所围成的一个直角三角形区域。我们将此三角形的三个顶点取为插值结点, 也就是  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ;  $(x_1, y_0) = (1, 0)$ ;  $(x_0, y_1) = (0, 1)$ 。想要求出一个二元二次多项式  $P(x, y)$ , 满足如下的条件:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu} P(x_i, y_j) = \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu} f(x_i, y_j), \quad (\text{当 } i=j=0 \text{ 时, 当 } \mu, \nu=0, 1, \quad i+j=1 \text{ 时, } \mu+\nu \leq 1)$$

根据上面给出的 Hermite 插值公式, 一定有一个不缺项的多项式并且满足下面六个条件:

$$P(0,0) = f(0,0)$$

$$P(1,0) = f(1,0)$$

$$P(0,1) = f(0,1)$$

$$P'_x(1,0) = f'_x(1,0)$$

$$P'_y(0,1) = f'_y(0,1)$$

$$P''_{xy}(0,0) = f''_{xy}(0,0)$$

根据上面得六个条件, 可以得到如下多项式满足要求:

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3y + a_4y(y-1) + a_5xy$$

很显然, 此插值公式具有二次代数精度。经过计算求得:

$$a_0 = f(0,0)$$

$$a_1 = f(1,0) - f(0,0)$$

$$a_2 = f'_x(1,0) - f(1,0) + f(0,0)$$

$$a_3 = f(0,1) - f(0,0)$$

$$a_4 = f'_y(0,1) - f(0,1) + f(0,0)$$

$$a_5 = f''_{xy}(0,0)$$

接下来我们取  $f(x, y) = e^{x+y}$ , 从而得:

$$P(x, y) = 1 + xy + x^2 + y^2 + (e-2)x + (e-2)y$$

经计算得出:  $f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = 1.284$ ,  $P\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = 1.248$ , 其绝对误差是 0.036。

**定义 1** (见文献[5]): 设  $Q(x) = 0$  是  $C^s$  ( $s \geq 2$ ) 上的  $l$  次无重复分量的代数平面,  $\{q_i\}_{i=1}^k$  是代数平面上的  $k = \binom{n+s}{s} - \binom{n+s-l}{s}$  个互不相同的点, 如果由  $P(X) \in \pi_n^s, P(q_i) = 0, i=1, \dots, k$ , 能够推出在代数平面  $Q(X) = 0$  上有  $P(X) \equiv 0$ 。则称  $\{q_i\}_{i=1}^k$  是  $l$  次无重复分量代数平面  $Q(X) = 0$  上的  $n$  次插值适定结点组。

**基本假设**(见文献[6]): 设  $g, h_1, \dots, h_d \in \pi^s$ , 这里  $g$  表示  $m$  次不可约多项式, 同时确定了  $C^s$  上的一个  $m$  次不可约代数平面,  $h_1, \dots, h_d$  是一次多项式, 它们确定的是  $C^s$  中  $d$  个超平面, 且  $S(g, h_1, \dots, h_d)$  是一个  $s-d-1$  维代数集, 它同构于  $s-d$  维空间的一个  $m$  次不可约代数平面。

**定义 2** (见文献[7]) 若  $F = \{g, h_1, \dots, h_d\}$ ,  $S(F)$  可以满足基本假设,  $\Theta = \{q_i\}_{i=1}^k$  是代数集  $S(F)$  上的  $k$  个互不相同的点,  $k = \binom{n+s-d}{s-d} - \binom{n+s-d-m}{s-d}$ 。  $\forall P(X) \in \pi_n^s$ , 若  $S(P) \supset \Theta \Rightarrow S(P) \supset S(F)$ , 则称  $\Theta$

是代数集  $S(F)$  的  $n$  次插值适定结点组。

**定理 1** (见文献[8]): 在基本假设的条件之下, 我们设  $\mu$  是代数集  $S(g, h_1, \dots, h_d)$  中的  $n$  次插值适定结点组, 再取不通过  $\mu$  中点的平面  $h$ , 使得  $S(g, h_1, \dots, h_d, h)$  是一个  $s-d-2$  维的代数集, 它同构于  $s-d-1$  维空间中的一个  $m$  次不可约代数平面, 任意地取  $S(g, h_1, \dots, h_d, h)$  上的  $n+1$  次插值适定结点组  $\varphi$ , 则  $\mu \cup \varphi$  一定是  $S(g, h_1, \dots, h_d)$  的  $n+1$  次插值适定结点组。

由于在一个代数平面上任意地选取一个点都能够做成这个代数平面的 0 次插值适定结点组, 我们可以重复应用定理 1, 便能构造出  $C^s$  中的任意一个不可约代数平面上的  $n$  次插值适定结点组(见文献[5])。

第 0 步: 首先在  $C^s$  中一个  $m$  次不可约代数平面  $g$  上任意地选一个点  $p$  作为一个结点。

第 1 步: 接着在  $C^s$  中做一个平面  $h_1$  不通过这个  $p$  点, 且  $(g)_{h_1}$  是一个  $m$  次不可约多项式, 在  $S(g, h_1)$  上任意地选取代数集  $S(g, h_1)$  的 1 次插值适定结点组去作为新增加的结点。

.....

第  $n$  步: 最后在  $C^s$  中做一个平面  $h_n$ , 不过在前面已经选好的所有点, 并且要求  $(g)_{h_n}$  是一个  $m$  次的不可约多项式, 那么在  $S(g, h_n)$  上, 我们任意地去选取代数集  $S(g, h_n)$  的  $n$  次插值适定结点组去当作一个新的增加结点(见文献[9])。

由定理 1, 当第  $n$  步完成, 我们所得到的结点组就是不可约代数平面  $g$  的  $n$  次插值适定结点组。

算例 2: (圆锥体上的二次 Hermite 插值多项式)

设一个圆锥与  $x$  轴的交点是  $(1,0,0)$ ,  $(-1,0,0)$ ; 与  $y$  轴的交点是  $(0,1,0)$ ,  $(0,-1,0)$ ; 与  $z$  轴的交点是  $(0,0,1)$ 。我们选取此圆锥体与坐标轴的交点作为插值结点, 加上坐标原点  $(0,0,0)$ , 这六个点恰能构成圆锥体的插值适定结点组。要求有一个三元二次多项式  $P(x, y, z)$ , 满足如下条件:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu+\tau}}{\partial x^\mu \partial y^\nu \partial z^\tau} P(x_i, y_j, z_k) = \frac{\partial^{\mu+\nu+\tau}}{\partial x^\mu \partial y^\nu \partial z^\tau} f(x_i, y_j, z_k), \quad (\text{当 } i=j=k=0 \text{ 时, } \mu, \nu, \tau=0, \text{ 当 } i+j+k=1 \text{ 时, } \mu+\nu+\tau \leq 1)。$$

根据所给出的算法, 我们知道一定会存在一个没有缺项的三元二次多项式:

$$P_1(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3y + a_4y(y-1) + a_5z + a_6z(z-1) + a_7xy + a_8yz + a_9zx$$

满足我们的插值条件, 在这里我们取  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$  作为我们的目标函数, 那么多项式的系数经过简单地计算便可求出, 如下:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0,0,0) = 1 \\ a_1 &= f(1,0,0) - a_0 = e - 1 \\ a_2 &= \frac{f(-1,0,0) + a_1 - a_0}{2} = \frac{e^{-1} + e - 2}{2} \\ a_3 &= f(0,1,0) - a_0 = e - 1 \\ a_4 &= \frac{f(0,-1,0) + a_3 - a_0}{2} = \frac{e^{-1} + e - 2}{2} \\ a_5 &= f(0,0,1) - a_0 = e - 1 \\ a_6 &= f'_z(0,0,1) - a_5 = 1 \\ a_7 &= f'_x(0,1,0) - a_1 + a_2 = \frac{e^{-1} - e + 2}{2} \end{aligned}$$

$$a_8 = f'_y(0,0,1) - a_3 + a_4 = \frac{e^{-1} - e + 2}{2}$$

$$a_9 = f'_z(1,0,0) - a_5 + a_6 = 3 - e$$

经过计算得出  $P_1(x, y, z)$  的表达式为:

$$P_1(x, y, z) = \frac{e^{-1} + e - 2}{2}(x^2 + y^2) + z^2 + \frac{e - e^{-1}}{2}(x + y) + (e - 2)z + \frac{e^{-1} - e + 2}{2}(xy + yz) + (3 - e)zx + 1$$

我们将  $Q\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$  分别代入  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$  与  $P_1(x, y, z)$  中, 可以得出:

$$f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = 1.45499, \quad P\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = 1.47242, \quad \text{所以绝对误差为 } 0.0174.$$

图 1 给出插值函数与被插值函数在平面  $z=1$  上的对比图像。

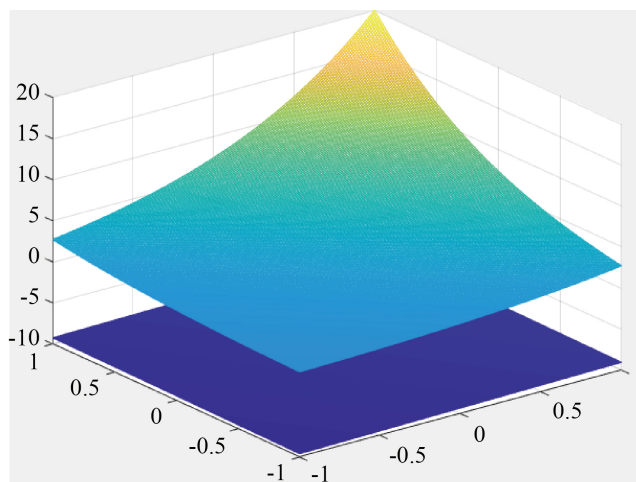


Figure 1. Contrast images

图 1. 插值函数和被插值函数的对比图像

### 3. 结论

本文主要研究 Hermite 插值, 通过代数集和理想的相关知识, 得到了添加平面法构造插值适定结点组的方法, 并以圆锥体上的 Hermite 插值为例, 给出了关于圆锥体上的二次切触插值算例, 还将其研究结果用 Matlab 软件实现。通过圆锥体上的 Hermite 插值算例, 我们可以将其应用到各类圆锥体零件的精度计算之中, 使其精度计算更加准确。

### 致 谢

作者在此感谢一直关心和领导我的领导和同事们, 感谢大家的帮忙与鼓励, 感谢我的合作伙伴谭荣老师给予我的帮助, 感谢审稿人在百忙之中能够给予指导。

### 参考文献

- [1] 高小淞. 构造二元四次 Hermite 插值公式的方法[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2015.
- [2] 应玮婷, 王洁. Hermite 插值公式的推广及其 matlab 实现[J]. 台州学院学报, 2010, 32(3): 4-9.

- [3] 李美凤, 徐伟骄. 构造 Hermite 插值“基函数”的方法[J]. 大学数学, 2019, 35(5): 9-13.
- [4] 惠婷婷. 定义于二次曲面的 Lagrange 插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2018.
- [5] 李伟.  $R\sim S$  空间中的插值问题[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连交通大学, 2010.
- [6] 陈文娟. 沿球面插值正则性问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2012.
- [7] 姜莹莹. 沿球面的 Hermite 插值问题[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2012.
- [8] 牛辉. 代数几何理论在多元插值中的应用[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2010.
- [9] 崔利宏, 张洁琳, 王仁宏. 关于二元切触插值问题的某些研究[J]. 高等学校计算数学学报, 2005(S1): 282-286.