

# 一些图的Sombor指标

阿丽米热·吐尔洪, 买吐肉孜·买司地克\*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2023年2月24日; 录用日期: 2023年3月21日; 发布日期: 2023年3月28日

## 摘要

Sombor 指标是最近由 Gutman 引入的概念, 是一种新的基于顶点度的拓扑指标, 它是由  $SO(G) = \sum_{x_i, x_j \in E(G)} \sqrt{(d_G(x_i))^2 + (d_G(x_j))^2}$  表示, 其中  $d_G(x_i)$  和  $d_G(x_j)$  分别表示顶点  $x_i$  和  $x_j$  在  $G$  中的度。这种新的拓扑不变量被应用于化学图论领域。本文研究了扇图、轮图、一种特殊的仙人掌图、蝴蝶结图、荷兰风车图、棒棒糖图、杠铃图和风筝图以及四角格子图、六角格子图等化学图的 Sombor 指标。

## 关键词

Sombor 指标, 笛卡尔积, 半笛卡尔积

# Sombor Index for Some Graphs

Almire Turhun, Metrose Metsidik\*

College of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 24<sup>th</sup>, 2023; accepted: Mar. 21<sup>st</sup>, 2023; published: Mar. 28<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

Sombor index is a concept recently introduced by Gutman. It is a new topological index based on vertex degree and represented by  $SO(G) = \sum_{x_i, x_j \in E(G)} \sqrt{(d_G(x_i))^2 + (d_G(x_j))^2}$ , where  $d_G(x_i)$  and  $d_G(x_j)$  and degrees of vertices mean  $x_i$  and  $x_j$  in  $G$ . In this paper, this new topological index is applied in the area of chemical graph theory. In this paper, we study Sombor index of some chemical graphs such as fan graphs, wheel graphs, special cactus graphs, bow graphs, dutch windmill graphs, lollipop graphs, barbell graphs, kite graphs quadrangular grid graphs and hexagonal grid graphs.

\*通讯作者。

## Keywords

### Sombor Index, Cartesian Product, Semi-Cartesian Product

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在本文中图  $G$  是具有顶点集  $V(G)$  和边集  $E(G)$  的简单图, 记图  $G = (V(G), E(G))$ 。图  $G$  中, 边数记为  $e(G)$ , 点数(阶)记为  $v(G)$ ,  $\Delta_G$  表示图  $G$  的最大度,  $\delta_G$  表示图  $G$  的最小度。  $d_G(x_i)$  表示点  $x_i$  在图  $G$  中的度数。  $C_t$  表示  $t$  阶的圈,  $P_t$  表示  $t$  阶的路,  $K_n$  表示  $n$  阶的完全图。

在图自同构下不变的数称为图不变量, 它通常被称为图的结构不变量。拓扑指标(TI)一般指与分子图论有关的图不变量。目前已有各种基于顶点度的图不变量被广泛介绍和研究[1], 它们通常被称为“拓扑指标” [2], 其通式为:

$$TI = \sum_{x_i, x_j \in E(G)} F(d_G(x_i), d_G(x_j))$$

其中的函数  $F(a, b)$  具有交换律, 即  $F(a, b) = F(b, a)$ 。有序对  $(a, b)$ , 其中  $a = d_G(x_i)$  和  $b = d_G(x_j)$  是边  $e_{ij} = x_i, x_j \in E(G)$  的度坐标。例如  $F(d_G(x_i), d_G(x_j)) = d_G(x_i) + d_G(x_j)$  或  $d_G(x_i)d_G(x_j)$  第一或第二 Zagreb 指标, 或者  $\sqrt{(d_G(x_i))^2 + (d_G(x_j))^2}$  是 Sombor 指标[3]。

Sombor 指标的灵感来自于边的度半径的几何解释, 对于图  $G$  的 Sombor 指标  $SO(G)$  定义为:

$$SO(G) = \sum_{x_i, x_j \in E(G)} \sqrt{(d_G(x_i))^2 + (d_G(x_j))^2}$$

Gutman 在文献[3]中建立了与 Sombor 指标相关的几个数学性质。这种新的拓扑指标被应用于化学图论领域, 引起了化学图论研究人员的兴趣。化学图论中的分子图是化合物分子的结构表示, 化合物分子中的每个原子都能看作是简单图中的一个点, 每条边可以看作是原子之间的化学键, 所以, 可以用图论中的一个图来表示化合物的分子结构, 将图论研究引入到化学领域中。化学家们发现, 分子图拓扑指标值不仅可以在分子的结构及其性质之间建立联系, 还可以定量的表达分子的结构。拓扑指标实际上通过转换化学结构生成的数值, 这个数值会影响化合物的某些物理 - 化学性质。研究各类图的拓扑指标对科研以及生活的应用有着重大的意义。

Sombor 指标自提出以来, 受到了许多研究人员的关注, 得到了很多新的研究成果。Randhir 和 Patekar 在文献[4]中得出了  $m$ -分裂图和正则图的  $m$ -影子图的 Sombor 指标; Liu 等人在文献[2]中得出了图的 Sombor 指标在各种结构参数下的界, 以及 Sombor 指标与其他数值之间的关系, 即一些树类、圈图、连通图以及化学图在各种结构参数下的界; Réti 等人在文献[5]中推导了 Sombor 指标的一些界, 并利用已有的结果建立了附加界, 刻画出了具有最大 Sombor 指标的图, 并提出了一个关于高圈图的最大 Sombor 指标的猜想; Cruz 等人在文献[6]中确定了至多有三个分支顶点的树的 Sombor 指标的极值等。

学者们对某些特殊的简单图作了研究, 但是对于一些特殊的简单图以及格子图的 Sombor 指标还未被研究得出精确的值, 这方面存在欠缺。本文主要计算了还未被研究的一些特殊图类以及四角格子图和六

角格子图的 Sombor 指标。

Sombor 指标和图中的顶点度有直接的关系, 根据所要研究的图的结构特点, 我们可以先通过观察该图顶点数较少的情况, 把它的顶点特征推广到任意顶点数的情况, 给出对应图边集的划分, 然后算出最后结论。

下面是本文所要研究的图的定义:

**定义 1.** 笛卡尔积[7]: 设  $G$  和  $H$  是两个简单图, 则图  $G$  和  $H$  的笛卡尔积由  $G \square H$  表示(如图 1 为  $P_9 \square P_8$ ), 定义为:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \square H) = \{(u, v)(u', v') : v = v' \text{ 且 } uu' \in E(G) \vee u = u' \text{ 且 } vv' \in E(H)\}$$

**定义 2.** 半笛卡尔积[8]: 设  $G$  和  $H$  是两个连通的二部图, 其分部集为白色和黑色,  $G$  是对称的, 且  $H$  连通保圈可定向。则图  $G$  和  $H$  的半笛卡尔积由  $G \sqcup H$  表示(如图 2 为  $P_8 \sqcup P_8$ ), 定义为:

$$V(G \sqcup H) = V(G) \times V(H)$$

$E(G \sqcup H) = \{(u, v)(u', v') : v = v' \text{ 且 } uu' \in E(G) \vee u = u' \text{ 且 } vv' \in E(H) \text{ 且 } u \text{ 和 } v \text{ 取相同颜色}\}$ , 其中  $v \rightarrow v'$  在  $H$  的连通保圈定向上。

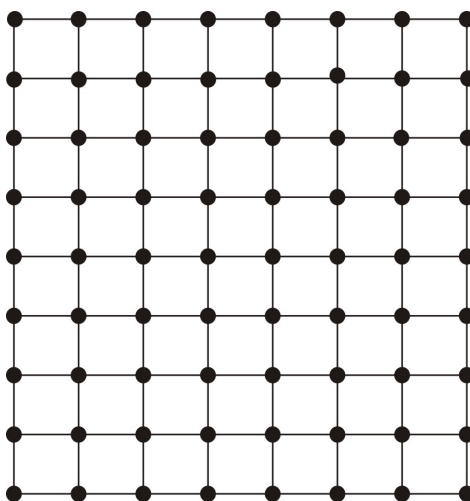


Figure 1.  $P_9 \square P_8$

图 1.  $P_9 \square P_8$

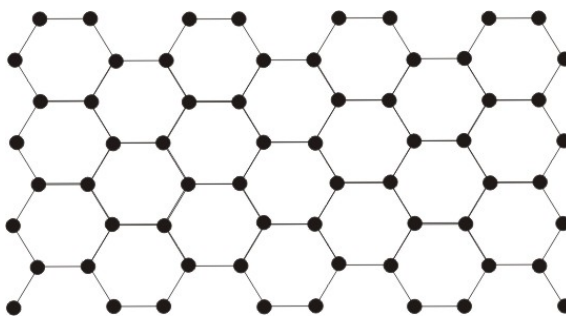


Figure 2.  $P_8 \sqcup P_8$

图 2.  $P_8 \sqcup P_8$

**定义 3.** 特殊的仙人掌图[9]: 在圈  $C_n$  的每个点上连接一个 3 阶圈  $C_3$ , 则得到一类特殊的仙人掌图, 由  $C_n \bullet C_3$  表示(如图 3 为  $C_5 \bullet C_3$ ), 它的点集和边集为

$$V(C_n \bullet C_3) = \{v_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3\}$$

$$E(C_n \bullet C_3) = \{v_i v_{(i+1)1} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_{ij} v_{(i+j)1} \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3\}$$

**定义 4.** 轮图: 通过将圈  $C_n$  上的每个点和一个外点都连边的图, 由  $W_n$  表示(如图 4 为  $W_8$ )。

**定义 5.** 扇图: 轮图  $W_n$  删去圈上的任意一条边而得到的图, 由  $F_n$  表示。

**定义 6.** 蝴蝶结图: 两个点数相同的扇图  $F_n$  通过粘贴中心点而得到的图, 由  $B_{n,n}$  表示。

**定义 7.** 荷兰风车图: 通过粘贴  $n$  个圈  $C_4$  的一个公共顶点而得到的图, 由  $D_4^n$  ( $n \geq 2$ ) 表示(如图 5 为  $D_4^4$ )。

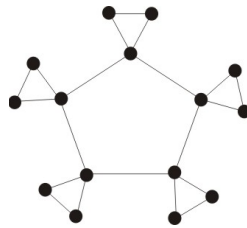


Figure 3.  $C_5 \bullet C_3$

图 3.  $C_5 \bullet C_3$

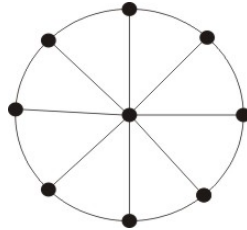


Figure 4.  $W_8$

图 4.  $W_8$

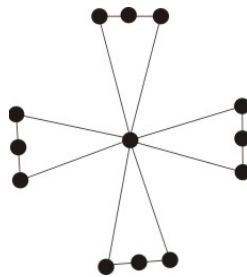


Figure 5.  $D_4^4$

图 5.  $D_4^4$

**定义 8.** 棒棒糖图: 将一个路  $P_{b+1}$  连接在圈  $C_a$  上, 由  $N_{a,b}$  表示。

**定义 9.** 杠铃图: 由两个互不相交的圈  $C_a$ ,  $C_b$  和一个路  $P_{b+1}$  ( $b \geq 1$ ), 其中这两个圈  $C_a$  和  $C_b$  通过  $P_{b+1}$  连接, 由  $D_{a,b,c}$  表示。

**定义 10.** 风筝图: 将一个路  $P_{b+1}$  连接在  $K_a$  上, 由  $L_{a,b}$  表示(如图 6 所示)。

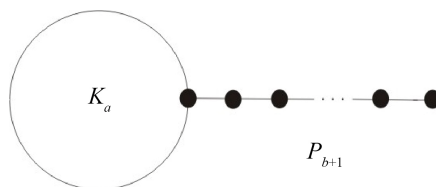


Figure 6.  $L_{a,b}$   
图 6.  $L_{a,b}$

## 2. 一些特殊图的 Sombor(SO)指标

在本章将要讨论扇图, 轮图, 一种特殊的仙人掌图, 蝴蝶结图, 荷兰风车图, 棒棒糖图, 杠铃图以及风筝图的 Sombor 指标, 并得出确切的值。

**定理 1.** 荷兰风车图  $D_4^n$  ( $n \geq 2$ ) 的 Sombor 指标为

$$SO(D_4^n) = 4n(\sqrt{2} + \sqrt{1+n^2}) \quad (n \geq 2)$$

**证明.** 依次给出  $(D_4^n)$  的阶数和边数, 显然有  $v(D_4^n) = 3n+1$  和  $e(D_4^n) = 4n$ 。根据荷兰风车图的定义, 当  $n \geq 2$  时它的最小度  $\delta_{D_4^n} = 2$  和最大度  $\Delta_{D_4^n} = 2n$ ,  $D_4^n$  中恰有  $2n$  条边连接最小度点, 有  $2n$  条边连接最小度点和最大度点, 所以它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(D_4^n) &= 2n\sqrt{(\delta_{D_4^n}(v_i))^2 + (\delta_{D_4^n}(v_j))^2} + 2n\sqrt{(\delta_{D_4^n}(v_i))^2 + (\Delta_{D_4^n}(v_j))^2} \\ &= 2n\sqrt{2^2 + 2^2} + 2n\sqrt{2^2 + (2n)^2} \\ &= 2n\sqrt{4+4} + 2n\sqrt{4+4n^2} \\ &= 4n(\sqrt{2} + \sqrt{1+n^2}) \end{aligned} \quad \square$$

**定理 2.** 轮图  $W_n$  的 Sombor 指标为

$$SO(W_n) = n(3\sqrt{2} + \sqrt{9+n^2}) \quad (n \geq 3)$$

**证明.**  $v(W_n) = n+1$  和  $e(W_n) = 2n$ , 当  $n \geq 3$  时最小度  $\delta_{W_n} = 3$ , 最大度  $\Delta_{W_n} = n$ , 由于  $W_n$  恰有  $n$  条边连接最小度点和最大度点,  $n$  条边连接最小度点, 它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(W_n) &= n\sqrt{\delta_{W_n}(v_i)^2 + \delta_{W_n}(v_j)^2} + n\sqrt{\delta_{W_n}(v_i)^2 + \Delta_{W_n}(v_j)^2} \\ &= n\sqrt{3^2 + 3^2} + n\sqrt{3^2 + n^2} \\ &= n(3\sqrt{2} + \sqrt{9+n^2}) \end{aligned} \quad \square$$

**定理 3.** 扇图  $F_n$  的 Sombor 指标为

$$SO(F_n) = 3(n-3)\sqrt{2} + 2\sqrt{13} + (n-2)\sqrt{n^2+9} + 2\sqrt{n^2+4} \quad (n \geq 3)$$

**证明.**  $v(F_n) = n+1$  和  $e(F_n) = 2n-1$ , 当  $n \geq 3$  时最小度  $\delta_{F_n} = 2$ , 最大度  $\Delta_{F_n} = n$ , 因为  $F_n$  恰有 2 条边连接最大度点和最小度点,  $(n-2)$  条边连接最大度点和  $(\delta_{F_n} + 1)$  度点, 2 条边连接最小度点和  $(\delta_{F_n} + 1)$  度点,  $(n-3)$  条边连接  $(\delta_{F_n} + 1)$  度点, 它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
 SO(F_n) &= (n-3)\sqrt{((\delta_{F_n} + 1)(v_i))^2 + ((\delta_{F_n} + 1)(v_j))^2} + 2\sqrt{(\delta_{F_n}(v_i))^2 + ((\delta_{F_n} + 1)(v_j))^2} \\
 &\quad + (n-2)\sqrt{(\Delta_{F_n}(v_i))^2 + ((\delta_{F_n} + 1)(v_j))^2} + 2\sqrt{(\Delta_{F_n}(v_i))^2 + (\delta_{F_n}(v_j))^2} \\
 &= (n-3)\sqrt{3^2 + 3^2} + 2\sqrt{2^2 + 3^2} + (n-2)\sqrt{n^2 + 3^2} + 2\sqrt{n^2 + 2^2} \\
 &= 3(n-3)\sqrt{2} + 2\sqrt{13} + (n-2)\sqrt{n^2 + 9} + 2\sqrt{n^2 + 4}
 \end{aligned}$$

**定理 4.** 蝴蝶结图  $B_{n,n}$  ( $n \geq 2$ ) 的 Sombor 指标为

$$SO(B_{n,n}) = \begin{cases} 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}), & \text{当 } n = 2 \\ 4\sqrt{13} + 8\sqrt{1+n^2} + 2(n-2)\sqrt{9+4n^2} + 6(n-3)\sqrt{2}, & \text{当 } n \geq 3 \end{cases}$$

**证明.**  $v(B_{n,n}) = 1 + 2n$  和  $e(B_{n,n}) = 4n - 2$ , 当  $n = 2$  时最小度  $\delta_{B_{n,n}} = 2$ , 最大度  $\Delta_{B_{n,n}} = 4$ , 当  $n \geq 3$  时最小度  $\delta_{B_{n,n}} = 2$ , 最大度  $\Delta_{B_{n,n}} = 2n$ 。对于  $n = 2$ ,  $B_{n,n}$  恰有 2 条边连接最小度点, 4 条边连接最小度点和最大度点, 所以

$$\begin{aligned}
 SO(B_{2,2}) &= 2\sqrt{\delta_{B_{n,n}}(v_i)^2 + \delta_{B_{n,n}}(v_j)^2} + 4\sqrt{\delta_{B_{n,n}}(v_i)^2 + \Delta_{B_{n,n}}(v_j)^2} \\
 &= 2\sqrt{2^2 + 2^2} + 4\sqrt{2^2 + 4^2} \\
 &= 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

对于  $n \geq 3$ ,  $B_{n,n}$  恰有 4 条边连接  $(\delta_{B_{n,n}} + 1)$  度点和最小度点, 有 4 条边连接最小度点和最大度点,  $2(n-2)$  条边连接  $(\delta_{B_{n,n}} + 1)$  度点和最大度点,  $2(n-3)$  条边连接  $(\delta_{B_{n,n}} + 1)$  度点, 因而

$$\begin{aligned}
 SO(B_{n,n}) &= 4\sqrt{((\delta_{B_{n,n}} + 1)(v_i))^2 + (\delta_{B_{n,n}}(v_j))^2} + 4\sqrt{(\delta_{B_{n,n}}(v_i))^2 + (\Delta_{B_{n,n}}(v_j))^2} \\
 &\quad + 2(n-2)\sqrt{((\delta_{B_{n,n}} + 1)(v_i))^2 + (\Delta_{B_{n,n}}(v_j))^2} \\
 &\quad + 2(n-3)\sqrt{((\delta_{B_{n,n}} + 1)(v_i))^2 + ((\delta_{B_{n,n}} + 1)(v_i))^2} \\
 &= 4\sqrt{3^2 + 2^2} + 4\sqrt{2^2 + (2n)^2} + 2(n-2)\sqrt{3^2 + (2n)^2} + 2(n-3)\sqrt{3^2 + 3^2} \\
 &= 4\sqrt{13} + 8\sqrt{1+n^2} + 2(n-2)\sqrt{9+4n^2} + 6(n-3)\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**定理 5.** 特殊的仙人掌图  $C_n \bullet C_3$  的 Sombor 指标为

$$SO(C_n \bullet C_3) = 2n(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) (n \geq 3)$$

**证明.**  $v(C_n \bullet C_3) = 3n$  和  $e(C_n \bullet C_3) = 4n$ , 由定义可知最小度  $\delta_{C_n \bullet C_3} = 2$ , 最大度  $\Delta_{C_n \bullet C_3} = 4$ , 当  $n \geq 3$  时, 恰有  $n$  条边连接最小度点,  $n$  条边连接最大度点,  $2n$  条边连接最小度点和最大度点, 所以它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned}
 SO(C_n \bullet C_3) &= n\sqrt{(\delta_{C_n \bullet C_3}(v_i))^2 + (\delta_{C_n \bullet C_3}(v_j))^2} + n\sqrt{(\Delta_{C_n \bullet C_3}(v_i))^2 + (\Delta_{C_n \bullet C_3}(v_j))^2} \\
 &\quad + 2n\sqrt{(\Delta_{C_n \bullet C_3}(v_i))^2 + (\delta_{C_n \bullet C_3}(v_j))^2} \\
 &= n\sqrt{8} + n\sqrt{32} + 2n\sqrt{20} \\
 &= 2n(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

**定理 6.** 棒棒糖图  $N_{a,b}$  的 Sombor 指标为

$$SO(N_{a,b}) = 2(a+b-4)\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3\sqrt{13}$$

**证明.**  $v(N_{a,b}) = a+b$  和  $e(N_{a,b}) = a+b$ , 它的最小度  $\delta_{N_{a,b}} = 1$ , 最大度  $\Delta_{N_{a,b}} = 3$ ,  $N_{a,b}$  恰有 1 条边连接最小度点和  $(\delta_{N_{a,b}} + 1)$  度点, 有 3 条边连接最大度点和  $(\delta_{N_{a,b}} + 1)$  度点, 有  $(a+b-4)$  条边连接  $(\delta_{N_{a,b}} + 1)$  度点, 所以它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(N_{a,b}) &= \sqrt{(\delta_{N_{a,b}}(v_i))^2 + ((\delta_{N_{a,b}} + 1)(v_j))^2} + 3\sqrt{(\Delta_{N_{a,b}}(v_i))^2 + ((\delta_{N_{a,b}} + 1)(v_j))^2} \\ &\quad + (a+b-4)\sqrt{((\delta_{N_{a,b}} + 1)(v_i))^2 + ((\delta_{N_{a,b}} + 1)(v_j))^2} \quad \square \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2} + 3\sqrt{3^2 + 2^2} + (a+b-4)\sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} + 3\sqrt{13} + 2(a+b-4)\sqrt{2} \end{aligned}$$

**定理 7.** 杠铃图  $D_{a,b,c}$  的 Sombor 指标为

$$SO(D_{a,b,c}) = 6\sqrt{13} + 2(a+b+c-6)\sqrt{2}$$

**证明.**  $v(D_{a,b,c}) = a+b+c-1$  和  $e(D_{a,b,c}) = a+b+c$ , 它的最小度  $\delta_{D_{a,b,c}} = 2$ , 最大度  $\Delta_{D_{a,b,c}} = 3$ ,  $D_{a,b,c}$  恰有 6 条边连接最小度点和最大度点, 有  $(a+b+c-6)$  条边连接最小度点, 因此它的 Sombor 指标为

$$SO(D_{a,b,c}) = 6\sqrt{13} + 2(a+b+c-6)\sqrt{2} \quad \square$$

**定理 8.** 对于风筝图  $L_{a,b}$ , 它的 Sombor 指标为

$$SO(L_{2,b}) = 2\sqrt{5} + 2(b-1)\sqrt{2}$$

$$SO(L_{3,b}) = 2(b-1)\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3\sqrt{13}$$

$$SO(L_{a,b}) = \sqrt{5} + \left(2b-4 + \frac{1}{2}(a-1)^2(a-2)\right)\sqrt{2} + \sqrt{4+a^2} + (a-1)\sqrt{2a^2-2a+1} \quad (a \geq 4)$$

**证明.**  $v(L_{a,b}) = a+b$  和  $e(L_{a,b}) = \frac{1}{2}a(a-1) + b$ , 它的最小度  $\delta_{L_{a,b}} = 1$ , 最大度  $\Delta_{L_{a,b}} = a$ ,

当  $a=2$  时,  $L_{2,b} \cong P_{2+b}$ , 由于路  $P_n$  的  $SO(P_n) = 2\sqrt{5} + 2(n-3)\sqrt{2}$ , ( $n \geq 3$ ),

$$SO(L_{2,b}) = SO(P_{2+b}) = 2\sqrt{5} + 2(2+b-3)\sqrt{2} = 2\sqrt{5} + 2(b-1)\sqrt{2};$$

当  $a=3$  时,  $L_{3,b} \cong N_{3,b}$ , 由定理 6 可得

$$SO(L_{3,b}) = SO(N_{3,b}) = 2(b-1)\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3\sqrt{13}$$

当  $a \geq 4$  时,  $L_{a,b}$  恰有 1 条边连接最小度点和  $(\delta_{L_{a,b}} + 1)$  度点, 有  $(b-2)$  条边连接  $(\delta_{L_{a,b}} + 1)$  度点, 有 1 条边连接最大度点和  $(\delta_{L_{a,b}} + 1)$  度点, 有  $(a-1)$  条边连接最大度点和  $(\Delta_{L_{a,b}} - 1)$  度点, 有  $\frac{1}{2}(a-1)(a-2)$  条边连

接  $(\Delta_{L_{a,b}} - 1)$  度点, 因此它的 Sombor 指标为

$$SO(L_{a,b}) = \sqrt{5} + \left( 2b - 4 + \frac{1}{2}(a-1)^2(a-2) \right) \sqrt{2} + \sqrt{4+a^2} + (a-1)\sqrt{2a^2-2a+1}, \quad (a \geq 4) \quad \square$$

### 3. 格子图的 Sombor(SO)指标

在本章中将要计算四角格子图和六角格子图的 Sombor 指标的确切值, 并得出格子图的 Sombor 指标与它因子图的 Sombor 指标之间的关系式。

#### 3.1. 四角格子图的 Sombor(SO)指标

平面四角格子图是由两条路  $P_m, P_n$  做笛卡尔积得到的图, 由  $P_m \square P_n$  表示; 环状四角格子图是由两个圈  $C_m$  和  $C_n$  做笛卡尔积得到的图, 由  $C_m \square C_n$  表示; 柱状四角格子图是由圈  $C_m$  和路  $P_n$  做笛卡尔积所得到的图, 由  $C_m \square P_n$  (或  $P_n \square C_m$ ) 表示。

**定理 9.** 平面四角格子图  $P_m \square P_n$  ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标为

$$SO(P_m \square P_n) = 10(m+n-4) + 2(4mn-7m-7n+6)\sqrt{2} + 8\sqrt{13} \quad (m, n \geq 3)$$

**证明.**  $v(P_m \square P_n) = mn$  和  $e(P_m \square P_n) = 2mn - n - m$ , 平面四角格子图的最大度  $\Delta_{P_m \square P_n} = 4$ , 最小度  $\delta_{P_m \square P_n} = 2$ , 当  $m, n \geq 3$  时,  $P_m \square P_n$  恰有 8 条边连接最小度点和  $(\delta_{P_m \square P_n} + 1)$  度点, 有  $(2m - 2n - 12)$  条边连接  $(\delta_{P_m \square P_n} + 1)$  度点, 有  $(2m - 2n - 8)$  条边连接最大度点和  $(\delta_{P_m \square P_n} + 1)$  度点, 有  $(2mn - 5n - 5m + 12)$  条边连接最大度点, 所以它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(P_m \square P_n) &= 8\sqrt{\left( (\delta_{P_m \square P_n} + 1)(v_i) \right)^2 + \left( \delta_{P_m \square P_n}(v_j) \right)^2} \\ &\quad + (2m - 2n - 12)\sqrt{\left( (\delta_{P_m \square P_n} + 1)(v_i) \right)^2 + \left( (\delta_{P_m \square P_n} + 1)(v_j) \right)^2} \\ &\quad + (2m - 2n - 8)\sqrt{\left( (\delta_{P_m \square P_n} + 1)(v_i) \right)^2 + \left( \Delta_{P_m \square P_n}(v_j) \right)^2} \\ &\quad + (2mn - 5n - 5m + 12)\sqrt{\left( \Delta_{P_m \square P_n}(v_i) \right)^2 + \left( \Delta_{P_m \square P_n}(v_j) \right)^2} \\ &= 8\sqrt{3^2 + 2^2} + (2m - 2n - 12)\sqrt{3^2 + 3^2} + (2m - 2n - 8)\sqrt{3^2 + 4^2} \\ &\quad + (2mn - 5n - 5m + 12)\sqrt{4^2 + 4^2} \\ &= 8\sqrt{13} + (6m + 6n - 36)\sqrt{2} + (10m + 10n - 40) + (8mn - 20n - 20m + 48)\sqrt{2} \quad \square \\ &= 8\sqrt{13} + (8mn - 14m - 14n + 12)\sqrt{2} + 10m + 10n - 40 \\ &= 10(m+n-4) + 2(4mn-7m-7n+6)\sqrt{2} + 8\sqrt{13} \end{aligned}$$

由于路  $P_n$  的  $SO(P_n) = 2\sqrt{5} + 2(n-3)\sqrt{2}$  ( $n \geq 3$ ), 则两条路  $P_m, P_n$  ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标与平面四角格子图的 Sombor 指标之间的关系式为:

$$SO(P_m \square P_n) = (2m-1)SO(P_n) + (2n-1)SO(P_m) + (10-4\sqrt{5})(m+n) + 4\sqrt{5} - 40 + 8\sqrt{13} \quad (m, n \geq 3).$$

**定理 10.** 环状四角格子图  $C_m \square C_n$  ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标为

$$SO(C_m \square C_n) = 8mn\sqrt{2} \quad (m, n \geq 3)$$



**证明.** 由文献[4]可知, 若图  $G$  是  $n$  阶的  $k$ -正则图, 则  $G$  的 Sombor 指标为  $SO(G) = \frac{nk^2}{\sqrt{2}}$ , 显然, 环状四角格子图  $C_m \square C_n$  是一个  $mn$  阶的 4-正则图, 则

$$SO(C_m \square C_n) = \frac{4^2 mn}{\sqrt{2}} = \frac{16mn}{\sqrt{2}} = 8mn\sqrt{2} (m, n \geq 3) \quad \square$$

由于圈  $C_n$  的  $SO(C_n) = 2n\sqrt{2}$ , 则两个圈  $C_m$  和  $C_n$  ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标与环状四角格子图的 Sombor 指标之间的关系式为:

$$SO(C_m \square C_n) = \sqrt{2}SO(C_m) \cdot SO(C_n).$$

**定理 11.** 柱状四角格子图  $C_m \square P_n$  (或  $P_n \square C_m$ ) ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标为

$$SO(C_m \square P_n) = 10m + 2(4mn - 7m)\sqrt{2} (m, n \geq 3).$$

**证明.**  $v(C_m \square P_n) = mn$  和  $e(C_m \square P_n) = 2mn - n$ , 它的最小度  $\delta_{C_m \square P_n} = 3$ , 最大度  $\Delta_{C_m \square P_n} = 4$ , 当  $m, n \geq 3$  时,  $C_m \square P_n$  恰有  $2m$  条边连接最小度点,  $2m$  条边连接最小度点和最大度点,  $(2mn - 5m)$  条边连接最大度点, 那么它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(C_m \square P_n) &= 2m\sqrt{(\delta_{C_m \square P_n}(v_i))^2 + (\delta_{C_m \square P_n}(v_j))^2} + 2m\sqrt{(\delta_{C_m \square P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{C_m \square P_n}(v_j))^2} \\ &\quad + (2mn - 5m)\sqrt{(\Delta_{C_m \square P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{C_m \square P_n}(v_j))^2} \\ &= 2m\sqrt{3^2 + 3^2} + 2m\sqrt{3^2 + 4^2} + (2mn - 5m)\sqrt{4^2 + 4^2} \quad \square \\ &= 2m\sqrt{18} + 2m\sqrt{25} + (2mn - 5m)\sqrt{32} \\ &= 10m + 2(4mn - 7m)\sqrt{2} \end{aligned}$$

因为路  $P_n$  的  $SO(P_n) = 2\sqrt{5} + 2(n-3)\sqrt{2}$  ( $n \geq 3$ ), 圈  $C_m$  的  $SO(C_m) = 2m\sqrt{2}$ , 则圈  $C_m$  和路  $P_n$  ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标与柱状四角格子图的 Sombor 指标之间的关系式为:

$$SO(C_m \square P_n) = \frac{5}{\sqrt{2}}SO(C_m) + 10m\sqrt{2} + 4m(SO(P_n) - 2\sqrt{5}) (m, n \geq 3).$$

### 3.2. 六角格子图的 Sombor(SO)指标

平面六角格子图是由两条路  $P_m, P_n$  做半笛卡尔积得到的图, 由  $P_m \sqcup P_n$  表示; 环状六角格子图是由两个圈  $C_m$  和  $C_n$  做半笛卡尔积得到的图, 由  $C_m \sqcup C_n$  表示; 柱状六角格子图是由圈  $C_m$  和路  $P_n$  做半笛卡尔积所得到的图, 由  $C_m \sqcup P_n$  (或  $P_m \sqcup C_n$ ) 表示。

**定理 12.** 平面六角格子图  $P_m \sqcup P_n$  ( $m$  为偶数) 的 Sombor 指标为

$$SO(P_m \sqcup P_n) = \begin{cases} 2\sqrt{10} + (6mn - 15m - 10n + 23)\sqrt{2} + 2(m+n-5)\sqrt{13}, & m \text{ 为偶数} \\ 2\sqrt{10} + \left(\frac{9}{2}mn - 6m - \frac{23}{2}n + 23\right)\sqrt{2} + 2(m+n-5)\sqrt{13}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

**证明.**  $v(P_m \sqcup P_n) = mn$ , 当  $n$  为偶数时,  $e(P_m \sqcup P_n) = \frac{3}{2}n(m-1)$ , 当  $n$  为奇数时,  $e(P_m \sqcup P_n) = 2mn - 3m - n$ , 平面六角格子图的最小度  $\delta_{P_m \sqcup P_n} = 1$ , 最大度  $\Delta_{P_m \sqcup P_n} = 3$ , 当  $n$  为奇数时,  $P_m \sqcup P_n$  恰有 2 条边连接最小度点和最大度点, 有  $(2mn - 5m - 4n + 7)$  条边连接最大度点, 有  $(n+1)$  条边连接

$(\Delta_{P_m \sqcup P_n} - \delta_{P_m \sqcup P_n})$  度点, 有  $(2m+2n-10)$  条边连接  $(\Delta_{P_m \sqcup P_n} - \delta_{P_m \sqcup P_n})$  度点和最大度点, 因此它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(P_m \sqcup P_n) &= 2\sqrt{(\delta_{P_m \sqcup P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &\quad + (2mn - 5m - 4n + 7)\sqrt{(\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &\quad + (n+1)\sqrt{((\delta_{P_m \sqcup P_n} - \Delta_{P_m \sqcup P_n})(v_i))^2 + ((\delta_{P_m \sqcup P_n} - \Delta_{P_m \sqcup P_n})(v_j))^2} \\ &\quad + (2m+2n-10)\sqrt{((\delta_{P_m \sqcup P_n} - \Delta_{P_m \sqcup P_n})(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &= 2\sqrt{1^2 + 3^2} + (2mn - 5m - 4n + 7)\sqrt{3^2 + 3^2} + (n+1)\sqrt{2^2 + 2^2} + (2m+2n-10)\sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= 2\sqrt{10} + (2mn - 5m - 4n + 7)\sqrt{18} + (n+1)\sqrt{8} + (2m+2n-10)\sqrt{13} \\ &= 2\sqrt{10} + (6mn - 15m - 10n + 23)\sqrt{2} + 2(m+n-5)\sqrt{13} \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时,  $P_m \sqcup P_n$  恰有 2 条边连接最小度点和最大度点,  $\left(\frac{3}{2}mn - 2m - \frac{9}{2}n + 7\right)$  条边连接最大度点,  $(n+1)$  条边连接  $(\Delta_{P_m \sqcup P_n} - \delta_{P_m \sqcup P_n})$  度点,  $(2m+2n-10)$  条边连接  $(\Delta_{P_m \sqcup P_n} - \delta_{P_m \sqcup P_n})$  度点和最大度点, 则它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(P_m \sqcup P_n) &= 2\sqrt{(\delta_{P_m \sqcup P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &\quad + \left(\frac{3}{2}mn - 2m - \frac{9}{2}n + 7\right)\sqrt{(\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &\quad + (n+1)\sqrt{((\delta_{P_m \sqcup P_n} - \Delta_{P_m \sqcup P_n})(v_i))^2 + ((\delta_{P_m \sqcup P_n} - \Delta_{P_m \sqcup P_n})(v_j))^2} \\ &\quad + (2m+2n-10)\sqrt{((\delta_{P_m \sqcup P_n} - \Delta_{P_m \sqcup P_n})(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &= 2\sqrt{1^2 + 3^2} + \left(\frac{3}{2}mn - 2m - \frac{9}{2}n + 7\right)\sqrt{3^2 + 3^2} + (n+1)\sqrt{2^2 + 2^2} + (2m+2n-10)\sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= 2\sqrt{10} + \left(\frac{3}{2}mn - 2m - \frac{9}{2}n + 7\right)\sqrt{18} + (n+1)\sqrt{8} + (2m+2n-10)\sqrt{13} \quad \square \\ &= 2\sqrt{10} + \left(\frac{9}{2}mn - 6m - \frac{23}{2}n + 23\right)\sqrt{2} + 2(m+n-5)\sqrt{13} \end{aligned}$$

由于路  $P_n$  的  $SO(P_n) = 2\sqrt{5} + 2(n-3)\sqrt{2}$  ( $n \geq 3$ ), 则两条路  $P_m, P_n$  ( $m, n \geq 3$ ) 的 Sombor 指标与平面六角格子图的 Sombor 指标的关系式为:

当  $n$  为偶数时,

$$\begin{aligned} SO(P_m \sqcup P_n) &= (m + \sqrt{2})SO(P_n) + nSO(P_m) + (2mn - 9m - 4n + 23)\sqrt{2} \\ &\quad + 2(m+n-5)\sqrt{13} - 2\sqrt{5}m - (2\sqrt{5} + 4)n + 12 \end{aligned}$$

当  $n$  为奇数时,

$$\begin{aligned} SO(P_m \sqcup P_n) &= (m + \sqrt{2})SO(P_n) + nSO(P_m) + \left(\frac{1}{2}mn - \frac{11}{2}n + 23\right)\sqrt{2} \\ &\quad + 2(m+n-5)\sqrt{13} - 2\sqrt{5}m - (2\sqrt{5} + 4)n + 12 \end{aligned}$$

**定理 13.** 环状六角格子图  $C_m \sqcup C_n$  ( $m, n \geq 4$ ,  $m, n$  为偶数) 的 Sombor 指标为

$$SO(C_m \sqcup C_n) = \frac{9mn}{\sqrt{2}} \quad (m, n \geq 4, m, n \text{ 为偶数}).$$

**证明.** 由文献[4]可知, 若图  $G$  是  $n$  阶的  $k$ -正则图, 则  $G$  的 Sombor 指标为  $SO(G) = \frac{nk^2}{\sqrt{2}}$ , 显然, 环状六角格子图  $C_m \sqcup C_n$  是一个  $mn$  阶的 3-正则图, 则

$$SO(C_m \sqcup C_n) = \frac{3^2 mn}{\sqrt{2}} = \frac{9mn}{\sqrt{2}} \quad \square$$

由于圈  $C_n$  的  $SO(C_n) = 2n\sqrt{2}$ , 则两个圈  $C_m, C_n$  ( $m, n \geq 4, m, n$  为偶数) Sombor 指标与环状六角格子图的 Sombor 指标的关系式为:

$$SO(C_m \sqcup C_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(SO(C_m) \cdot SO(C_n) + mn).$$

**定理 14.** 柱状六角格子图  $C_m \sqcup P_n$  ( $m, n \geq 4, m$  为偶数) 的 Sombor 指标为

$$SO(C_m \sqcup P_n) = 2m\sqrt{13} + \frac{3}{2}m(3n-5)\sqrt{2} \quad (m, n \geq 4, m \text{ 为偶数}).$$

**证明.**  $v(C_m \sqcup P_n) = mn$  和  $e(C_m \sqcup P_n) = \frac{1}{2}m(3n-1)$ , 它的最大度  $\Delta_{C_m \sqcup P_n} = 3$ , 最小度  $\delta_{C_m \sqcup P_n} = 2$ ,  $C_m \sqcup P_n$  恰有  $2m$  条边连接最大度点和最小度点,  $\frac{1}{2}m(3n-5)$  条边连接最大度点, 则它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(C_m \sqcup P_n) &= 2m\sqrt{(\Delta_{C_m \sqcup P_n}(v_i))^2 + (\delta_{C_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}m(3n-5)\sqrt{(\Delta_{C_m \sqcup P_n}(v_i))^2 + (\Delta_{C_m \sqcup P_n}(v_j))^2} \\ &= 2m\sqrt{3^2 + 2^2} + \frac{1}{2}m(3n-5)\sqrt{3^2 + 3^2} \quad \square \\ &= 2m\sqrt{13} + \frac{1}{2}m(3n-5)\sqrt{18} \\ &= 2m\sqrt{13} + \frac{3}{2}m(3n-5)\sqrt{2} \end{aligned}$$

由于路  $P_n$  的  $SO(P_n) = 2\sqrt{5} + 2(n-3)\sqrt{2}$  ( $n \geq 3$ ), 圈  $C_m$  的  $SO(C_m) = 2m\sqrt{2}$ , 则圈  $C_m$  和路  $P_n$  ( $m, n \geq 4, m$  为偶数) 的 Sombor 指标与柱状六角格子图的 Sombor 指标之间的关系式为:

$$SO(C_m \sqcup P_n) = \frac{\sqrt{26}}{2}SO(C_m) - \frac{1}{2}m(3n-17)\sqrt{2} + 3m(SO(P_n) - 2\sqrt{5}) \quad (m, n \geq 4).$$

**定理 15.** 柱状六角格子图  $P_m \sqcup C_n$  ( $m, n \geq 4, m, n$  为偶数) 的 Sombor 指标为

$$SO(P_m \sqcup C_n) = n\left(\frac{9}{2}m - 10\right)\sqrt{2} + 2n\sqrt{13}.$$

**证明.**  $v(P_m \sqcup C_n) = mn$  和  $e(P_m \sqcup C_n) = \frac{3}{2}mn - n$ , 柱状六角格子图的最大度  $\Delta_{P_m \sqcup C_n} = 3$ , 最小度  $\delta_{P_m \sqcup C_n} = 2$ , 当  $m, n \geq 4, m, n$  为偶数时, 它恰有  $n$  条边连接最小度点, 有  $2n$  条边连接最大度点和最小度

点, 有  $\left(\frac{3}{2}mn - 4n\right)$  条边连接最大度点, 所以它的 Sombor 指标为

$$\begin{aligned} SO(P_m \sqcup C_n) &= n\sqrt{(\delta_{P_m \sqcup C_n}(v_i))^2 + (\delta_{P_m \sqcup C_n}(v_j))^2} + 2n\sqrt{(\delta_{P_m \sqcup C_n}(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup C_n}(v_j))^2} \\ &\quad + \left(\frac{3}{2}mn - 4n\right)\sqrt{(\Delta_{P_m \sqcup C_n}(v_i))^2 + (\Delta_{P_m \sqcup C_n}(v_j))^2} \\ &= n\sqrt{2^2 + 2^2} + 2n\sqrt{2^2 + 3^2} + \left(\frac{3}{2}mn - 4n\right)\sqrt{3^2 + 3^2} \quad \square \\ &= n\sqrt{8} + 2n\sqrt{13} + \left(\frac{3}{2}mn - 4n\right)\sqrt{18} \\ &= n\left(\frac{9}{2}m - 10\right)\sqrt{2} + 2n\sqrt{13} \end{aligned}$$

由于路  $P_m$  的  $SO(P_m) = 2\sqrt{5} + 2(m-3)\sqrt{2}$  ( $m \geq 4$ ), 圈  $C_n$  的  $SO(C_n) = 2n\sqrt{2}$ , 路  $P_m$  和圈  $C_n$  的 ( $m, n \geq 4$ ,  $m, n$  为偶数) 的 Sombor 指标与柱状六角格子图的 Sombor 指标之间的关系式为:

$$SO(P_m \sqcup C_n) = \frac{\sqrt{26}}{2}SO(C_n) + n\left(\frac{5}{2}m - 4\right)\sqrt{2} + n(SO(P_m) - 2\sqrt{5}) \quad (m, n \geq 4).$$

#### 4. 总结

本文主要通过观察图的结构特点, 给出对应图的边集的划分, 进而确定了扇图、轮图、一种特殊的仙人掌图、蝴蝶结图、荷兰风车图、棒棒糖图、杠铃图、风筝图以及四角格子图和六角格子图的 Sombor 指标, 并且得出了四角格子图和六角格子图的 Sombor 指标与它们的因子图的 Sombor 指标之间的关系, 由于格子图的复杂性, 对于 Sombor 指标的研究没有得到精美的结果, 这个问题可继续研究。本文丰富了此领域格子图的研究成果。还可以进一步拓展研究未被研究的图的笛卡尔积和半笛卡尔积的 Sombor 指标, 并得出与它的因子图的 Sombor 指标之间的关系。

#### 参考文献

- [1] De, N., Cancan, M., Alaeiyan, M. and Farahani, M.R. (2020) On Some Degree Based Topological Indices of Mk-Graph. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, **23**, 1183-1194. <https://doi.org/10.1080/09720529.2020.1809112>
- [2] Liu, H., Gutman, I., You, L. and Huang, Y. (2022) Sombor Index: Review of Extremal Results and Bounds. *Journal of Mathematical Chemistry*, **60**, 771-798.
- [3] Gutman, I. (2021) Geometric Approach to Degree-Based Topological Indices: Sombor Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **86**, 11-16.
- [4] Singh, R. and Patekar, S.C. (2022) On the Sombor Index and Sombor Energy of M-Splitting Graph and M-Shadow Graph of Regular Graphs. arXiv preprint arXiv:2205.09480.
- [5] Réti, T., Doli, T. and Ali, A. (2021) On the Sombor Index of Graphs. *Contributions to Mathematics*, **3**, 11-18. <https://doi.org/10.47443/cm.2021.0006>
- [6] Cruz, R., Rada, J. and Sgarreta, J.M. (2021) Sombor Index of Trees with at Most Three Branch Vertices. *Applied Mathematics and Computation*, **409**, Article ID: 126414. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126414>
- [7] Imrich, W. and Klavzar, S. (2000) Product Graphs: Structure and Recognition. Wiley, New York.
- [8] Metsidik, M. (2014) Semi-Cartesian Product of Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **52**, 856-865. <https://doi.org/10.1007/s10910-013-0297-6>
- [9] 张东翰. 一类特殊图的星边染色[J]. 甘肃科学学报, 2021, 33(5): 26-28.