Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1474-1482
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124152

Hans汉斯

一类具有对数非线性项的分数阶阻尼波方程的局部适定性

林玲娜

广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月9日；发布日期：2023年4月19日

摘 要

本文主要考虑具有对数非线性项的分数阶阻尼波动方程$u_{tt}+(-\Delta)^s u+(-\Delta)^s u_t = u\ln|u|$的初边值问题，其中$s\in(0,1)$。算子$(-\Delta)^s$为分数阶Laplace算子，近年来，该算子成为了物理学、金融数学、流体动力学等学科领域中的研究热点。本文在任意初始能量下，利用Galerkin逼近法和压缩映射原理，证明该方程解的局部适定性。

关键词

阻尼波动方程，分数阶Laplace算子，对数非线性项，局部适定性

Local Well-Posedness for a Class of Fractional Damped Wave Equations with Logarithmic Nonlinearity

Lingna Lin

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

Received: Mar. 13^{th}, 2023; accepted: Apr. 9^{th}, 2023; published: Apr. 19^{th}, 2023

文章引用: 林玲娜. 一类具有对数非线性项的分数阶阻尼波方程的局部适定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1474-1482. DOI: 10.12677/aam.2023.124152

Abstract

In this paper, we mainly deal with the initial-boundary value problem for the fractional damped wave equations $u_{tt} + (-\Delta)^s u + (-\Delta)^s u_t = u \ln |u|$, where $s \in (0, 1)$. The operator $(-\Delta)^s$ is the fractional Laplace operator. In recent years, this operator has become a research hotspot in physics, financial mathematics, fluid dynamics and other disciplines. At the arbitrary initial energy levels, the local well-posedness of weak solutions to above problem is proved by using Galerkin approximation method and contraction mapping principle under some certain conditions.

Keywords

Damped Wave Equations, Fractional Laplace Operator, Logarithmic Nonlinearity, Local Well-Posedness

1. 引言

在过去三十年中, 分数阶发展方程已成为各个科学领域中的重要自然模型, 引起了众多学者的关注. 在数学上, 分数阶发展方程可以用时间分数阶导数来描述, 如扩散问题、多孔介质方程、松弛现象等；也可以用空间分数阶导数来描述, 如量子力学、污染物扩散、心电传播等.

值得一提的是, 近年来分数拉普拉斯算子$(-\Delta)^s$在物理学、金融数学、流体动力学等方面有了更加广泛的应用. 从数学的角度来看, 含有这类算子的偏微分方程可用来描述许多复杂的现象, 并获得了丰富的理论成果(参阅文献 [1–3] 及其参考文献). 而对数非线性项$u \ln |u|$在物理学同样具有许多有趣的研究, 它可以自然地用于超对称场论, 量子力学和核物理 [4, 5]中. Galerkin方法在偏微分方程的研究中应用非常广泛 [6–8], 在考虑偏微分方程解的存在性时，我们通常会利用此方法将复杂的偏微分方程转化为常微分方程进行求解. 而压缩映射原理在证明方程解的存在唯一性时，同样具有举足轻重的作用.

本文我们考虑如下带有对数非线性项的分数阶阻尼波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^s u + (-\Delta)^s u_t = u \ln |u|, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times [0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中Ω是$\mathbb{R}^n (n \geq 2s)$中带有光滑边界$\partial\Omega$ 的有界区域, $s \in (0,1)$; 分数阶Laplace算子$(-\Delta)^s$由如下奇异积分定义

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{C(n,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中$C(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos \xi_1}{|\xi|^{n+2s}} \, d\xi \right)^{-1}$ 是一个归一化常数. 在这里, 我们考虑定义在Ω上的分数阶Laplace算子$(-\Delta)^s$, 是其对u所定义的扩展狄利克雷问题, 这意味着

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{C(n,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \, dy, \quad x \in \Omega.$$

因此, 初边值问题(1.1)的狄利克雷数据是在$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$上作为体积约束给出的, 而不仅仅是在$\partial\Omega$上, 这与算子$(-\Delta)^s$ 的非局部特征一致.

本文给出初边值问题(1.1)在任意初始能量下解的局部适定性的证明, 这将为进一步研究问题(1.1)解的全局存在性、渐近行为和爆破提供基础.

2. 预备知识及主要结果

在这一节, 首先陈述与初边值问题(1.1)相关的分数阶Sobolev空间的定义和范数等性质, 更多的细节可以参阅文献 [9].

我们取$Q = \mathbb{R}^{2n} \setminus \mathcal{O}$, 其中$\mathcal{O} = (\mathcal{C}\Omega) \times (\mathcal{C}\Omega) \subset \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{C}\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, 则空间$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是一个Lebesgue可测的线性空间, 且满足限制在Ω 上的$u \in X$ 属于空间$L^2(\Omega)$，即使得

$$\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy < \infty,$$

其空间X的范数定义为

$$\|u\|_X = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx + \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

进一步，定义分数阶Sobolev空间X_0为

$$X_0 = \{u \in X : \, u = 0 \; a.e. \; in \; \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}.$$

赋予范数

$$\|u\|_{X_0} = \left(\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

且内积表示为

$$(u,v)_{X_0}=\int_Q \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,dx\,dy.$$

另外, 对于任意的$u\in X_0$, 我们有如下关系式成立

$$((-\Delta)^s u,v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\frac{1}{2}C(n,s)(u,v)_{X_0}, \tag{2.3}$$

当$v=u$时,

$$((-\Delta)^s u,u)_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\frac{1}{2}C(n,s)\|u\|^2_{X_0}. \tag{2.4}$$

接下来，我们给出空间$X_0\hookrightarrow L^{2^*}$的Sobolev嵌入定理, 其叙述如下.

引理 2.1. 取$s\in(0,1)$且$u\in X_0$. 那么, 存在一个与n和s相关的最佳嵌入常数$B_{\frac{2n}{n-2s}}$, 使得

$$\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}=\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}\le B^2_{\frac{2n}{n-2s}}\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,dx\,dy=B^2_{\frac{2n}{n-2s}}\|u\|^2_{X_0}, \tag{2.5}$$

其中$2^*=\frac{2n}{n-2s}$.

本文的主要结论如下:

定理 2.1. (局部适定性) 若$u_0(x)\in X_0$, $u_1(x)\in L^2(\Omega)$, 则存在一个时间$T>0$, 使得问题(1.1)存在一个唯一的弱解u, 满足

$$u\in L^\infty([0,T],X_0)\ \text{且}\ u_t\in L^\infty([0,T],L^2)\cap L^2([0,T],X_0).$$

3. 局部适定性

这一节我们将在任意初始能量下，证明问题(1.1)局部解的存在唯一性. 为了方便起见, 取一个固定的$T>0$, 定义如下空间

$$D:=\left\{u\in L^\infty([0,T],X_0)\ \text{且}\ u_t\in L^\infty([0,T],L^2)\cap L^2([0,T],X_0)\right\}, \tag{3.1}$$

且赋予范数

$$\|u\|^2_D=\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{2}C(n,s)\|u(t)\|^2_{X_0}+\|u_t(t)\|^2_2\right). \tag{3.2}$$

此外, 我们给出如下关键性引理, 它对证明本节主要结论起着非常重要作用.

引理 3.1. 对于$\forall\,T>0$和$u\in D$, 存在唯一的一个

$$z\in D\ \text{且}\ z_{tt}\in L^\infty([0,T],Y_0), \tag{3.3}$$

且满足如下的线性初边值问题

$$\begin{cases} z_{tt} + (-\Delta)^s z + (-\Delta)^s z_t = u \ln |u|, & (x,t) \in \Omega \times [0,T), \\ z(x,t) = 0, & (x,t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times [0,T), \\ z(x,0) = u_0(x),\ z_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中Y_0是X_0的对偶空间, $u_0(x)$ 和$u_1(x)$已在初边值问题(1.1)中定义.

证明. 首先, 我们将利用标准的Galerkin方法, 证明z的存在性. 令$\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$是$X_0$中$(-\Delta)^s$的一组基函数, 满足

$$(-\Delta)^s \omega_k(x) = \lambda_k \omega_k(x),$$

其中λ_k是对应的特征值. 我们定义

$$u_0^k = \sum_{k=1}^{m} \left(\int_\Omega u_0 \omega_k \, dx \right) \omega_k, \quad u_1^k = \sum_{k=1}^{m} \left(\int_\Omega u_1 \omega_k \, dx \right) \omega_k.$$

因此, 当$k \to \infty$时, 在X_0上有$u_0^k \to u_0$, 在$L^2(\Omega)$上有$u_1^k \to u_1$. 对于所有$k \geq 1$, 我们可以找到一些函数$d_m^1, \dots, d_m^k \in C^2[0,T]$, 使得近似解$z_m(x,t)$ 满足问题(3.4). $z_m(x,t)$可写成:

$$z_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) \omega_k, \tag{3.5}$$

且满足如下线性问题

$$\begin{cases} \int_\Omega \left(\ddot{z}_m + (-\Delta)^s z_m + (-\Delta)^s \dot{z}_m - u \ln |u| \right) \eta \, dx = 0, & (x,t) \in \Omega \times [0,T), \\ z_m(0) = u_0^m,\ \dot{z}_m(0) = u_1^m, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

其中$\dot{z}_m = \frac{dz_m}{dt}$, $\eta \in X_0$. 在问题(3.6)中, 令$\eta = \omega_k$, 可得

$$(\ddot{z}_m, \omega_k) = \ddot{d}_m^k(t), \tag{3.7}$$

$$((-\Delta)^s z_m, \omega_k) = \lambda_k d_m^k(t), \tag{3.8}$$

$$((-\Delta)^s \dot{z}_m, \omega_k) = \lambda_k \dot{d}_m^k(t). \tag{3.9}$$

这样, 我们可以得到一个具有未知函数d_m^k的线性常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \ddot{d}_m^k(t) + \lambda_k d_m^k(t) + \lambda_k \dot{d}_m^k(t) = \int_\Omega u(t) \ln |u(t)| \omega_k \, dx, & (x,t) \in \Omega \times [0,T), \\ d_m^k(0) = \int_\Omega u_0 \omega_k \, dx,\ \dot{d}_m^k(0) = \int_\Omega u_1 \omega_k \, dx, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

因此, 上述问题对所有k都可得一个唯一的局部解$d_m^k \in C^2[0,T]$, 这就意味着存在唯一的由式子(3.5)定义的z_m 满足(3.6). 接下来, 给出$\int_\Omega (u\ln|u|)^2\, dx$的估计. 通过直接计算与引理2.1中的Sobolev嵌入, 可得

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (u\ln|u|)^2\, dx &= \int\limits_{\{x\in\Omega;|u(x)|\le 1\}} (u\ln|u|)^2\, dx + \int\limits_{\{x\in\Omega;|u(x)|>1\}} (u\ln|u|)^2\, dx \\
&\le e^{-2}|\Omega| + \left(\frac{n-2s}{2s}\right)^2 \int\limits_{\{x\in\Omega;|u(x)|>1\}} u^{\frac{2n}{n-2s}}\, dx \\
&\le e^{-2}|\Omega| + \left(\frac{n-2s}{2s}\right)^2 \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2s}}}^{\frac{2n}{n-2s}} \\
&\le e^{-2}|\Omega| + \left(\frac{n-2s}{2s}\right)^2 B_{\frac{2n}{n-2s}}^{\frac{2n}{n-2s}} \|u\|_{X_0}^{\frac{2n}{n-2s}},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

其中$B_{\frac{2n}{n-2s}}$是Sobolev嵌入$X_0 \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\Omega)$的最佳常数.

进一步地, 对于所有的$m \ge 1$, 在(3.6)中取$\eta = \dot z_m(t)$, 并且在$[0,t] \subset [0,T]$上进行积分, 结合式子(3.11), 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\|\dot z_m\|^2 + \frac{1}{2}C(n,s)\|z_m\|_{X_0}^2 + C(n,s)\int_0^t \|\dot z_m\|_{X_0}^2\, d\tau \\
\le& C(n,s)\|u_0^m\|_{X_0}^2 + \|u_1^m\|^2 + C + \int_0^t \|\dot z_m\|^2\, d\tau \\
\le& C + \int_0^t \left(\|\dot z_m\|^2 + \frac{1}{2}C(n,s)\|z_m\|_{X_0}^2 + C(n,s)\int_0^\tau \|\dot z_m\|_{X_0}^2\, d\varsigma\right) d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

利用Gronwall不等式, 易得

$$
\|\dot z_m\|^2 + \frac{1}{2}C(n,s)\|z_m\|_{X_0}^2 + C(n,s)\int_0^t \|\dot z_m\|_{X_0}^2\, d\tau \le Ce^T. \tag{3.13}
$$

另外, 将(3.6)中第一个方程两边同时除以$\|\eta\|_{X_0}$, 有

$$
\frac{<\ddot z_m, \eta>}{\|\eta\|_{X_0}} = \frac{(u\ln|u|,\eta) - ((-\Delta)^s z_m, \eta) - ((-\Delta)^s \dot z_m, \eta)}{\|\eta\|_{X_0}}.
$$

由(3.11), (3.13)和Hölder不等式, 可得

$$
\frac{<\ddot z_m, \eta>}{\|\eta\|_{X_0}} \le C(T). \tag{3.14}
$$

对于$\eta \in X_0 \setminus \{0\}$, (3.14)两边同时取上界, 有

$$
\|\ddot z_m\|_{Y_0} \le C(T). \tag{3.15}
$$

所以, 存在一个序列$\{z_m\}$, 使得

$$\{z_m\} \text{ 在} L^{\infty}([0,T],X_0)\text{上有界;}$$
$$\{\dot{z}_m\} \text{ 在} L^{\infty}([0,T],L^2(\Omega))\cap L^2([0,T],X_0)\text{上有界;}$$
$$\{\ddot{z}_m\} \text{ 在} L^{\infty}([0,T],Y_0)\text{上有界.}$$

因此, 可得存在解$z\in D\cap C^2([0,T],Y_0)$满足问题(3.4).

最后, 我们证明该解的唯一性. 利用反证法, 假设存在两个解v和w, 分别满足问题(3.4). 代入后将得到的两个方程相减, 并且与v_t-w_t 做内积, 可得

$$\|v_t-w_t\|^2+\frac{1}{2}C(n,s)\|v-w\|_{X_0}^2+C(n,s)\int_0^t\|v_\tau-w_\tau\|_{X_0}^2\,d\tau=0,$$

这说明了$v\equiv w$. 引理3.1证明完毕. □

现在, 我们给出初边值问题(1.1)局部适定性的证明.

定理2.1的证明. 设$R^2=\frac{1}{2}C(n,s)\|u_0\|_{X_0}^2+\|u_1\|^2$, 且

$$B_T=\{u\in D:u(x,0)=u_0,u_t(x,0)=u_1,\|u\|_D\le R\},\ \ \forall\,T>0. \tag{3.16}$$

通过引理3.1, 我们知道对于$\forall\ u\in B_T$, 存在唯一的解z使得问题(3.4)成立. 在这里, 我们将证明对于一个适当的$T\ge 0$, Ψ 是一个压缩映射, 即$\Psi(B_T)\subset B_T$.

首先, 将问题(3.4)中的第一个方程在$\Omega\times[0,t)$上与z_t做内积, 得

$$\begin{aligned}&\|z_t\|^2+\frac{1}{2}C(n,s)\|z\|_{X_0}^2+C(n,s)\int_0^t\|z_t\|_{X_0}^2\,d\tau\\=&\frac{1}{2}C(n,s)\|u_0\|_{X_0}^2+\|u_1\|^2+2\int_0^t\int_\Omega u\ln|u|\,z_t\,dx\,d\tau,\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中$z=\Psi(u)$是当$u\in B_T$固定时, 问题(3.4)对应的解. 利用Cauchy-Schwarz不等式和Young不等式, 有

$$2\int_0^t\int_\Omega u\ln|u|\,z_t(\tau)\,dx\,d\tau\le 2\int_0^t\|u\ln|u|\|\|z_t\|\,d\tau\le\int_0^t(2\|u\ln|u|\|^2+\frac{1}{2}\|z_t\|^2)\,d\tau, \tag{3.18}$$

进一步结合(3.11), 易得

$$2\int_0^t\int_\Omega u\ln|u|\,z_t\,dx\,d\tau\le CT(R^{\frac{2n}{n-2s}}+1)+\frac{1}{2}C(n,s)\int_0^t\|z_t\|_{X_0}^2\,d\tau,\ \forall\,t\in(0,T]. \tag{3.19}$$

由(3.17)和(3.19), 在$[0,T]$上取最大值, 可得

$$\|z\|_D^2\le\frac{1}{2}R^2+CT(R^{\frac{2n}{n-2s}}+1). \tag{3.20}$$

当T足够小时, 我们有$\|z\|_D\le R$, 这说明了$\Psi(B_T)\subset B_T$.

假设B_T中存在两个函数w_1和w_2. 令$z_1=\Psi(w_1)$, $z_2=\Psi(w_2)$, 并且设$z=z_1-z_2$. 将问题(3.4)中的第一个方程与z_t 相乘后在$\Omega\times(0,t)$上积分, 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\langle z_{tt},z_t\rangle\,d\tau+\frac{1}{2}C(n,s)\int_0^t(z_t,z)_{X_0}\,d\tau+\frac{1}{2}C(n,s)\int_0^t(z_t,z_t)_{X_0}\,d\tau\\&\qquad=\int_0^t\int_\Omega(w_1\ln|w_1|-w_2\ln|w_2|)z_t\,dx\,d\tau.\end{aligned}\tag{3.21}$$

利用Lagrange定理, 通过直接的计算, 有

$$\begin{aligned}&\|z_t\|^2+\frac{1}{2}C(n,s)\|z\|_{X_0}^2+C(n,s)\int_0^t\|z_t\|_{X_0}^2\,d\tau\\&=2\int_0^t\int_\Omega(w_1-w_2)(|\xi|+1)\,z_t\,dx\,d\tau\\&\le C\int_0^t\|w_1-w_2\|\left(\|z_t\|^2+\frac{1}{2}C(n,s)\|z\|_{X_0}^2+C(n,s)\int_0^t\|z_t\|_{X_0}^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\,d\tau,\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中$0\le|\xi|\le\ln|w_1+w_2|$. 由Gronwall不等式, 可得

$$\left(\|z_t\|^2+\frac{1}{2}C(n,s)\|z\|_{X_0}^2+C(n,s)\int_0^t\|z_t\|_{X_0}^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\le CT\|w_1-w_2\|_D.$$

因此, 我们发现

$$\|\Psi(w_1)-\Psi(w_2)\|^2=\|z\|_D^2\le C^2T^2\|w_1-w_2\|_D^2\le\sigma\|w_1-w_2\|_D^2,\tag{3.23}$$

这样，当我们取T足够小时，总可以确保存在$\sigma<1$. 根据压缩映射原理, 可证明初边值问题(1.1)存在唯一的弱解.证毕. □

4. 总结与展望

本文利用Galerkin逼近法和压缩映射原理, 证明在任意初始能量下, 具有对数非线性项的分数阶阻尼波动方程$u_{tt}+(-\Delta)^su+(-\Delta)^su_t=u\ln|u|$ 的初边值问题解具有局部适定性. 我们将在本文的基础上，进一步研究问题(1.1)在次临界初始能量和临界初始能量条件下, 解的全局存在性、渐近行为和爆破等相关的性质.

参考文献

[1] Bisci, G.M., Radulescu, V.D. and Servadei, R. (2016) Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems. In: *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, Vol. 162, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Bucur, C. and Valdinoci, E. (2016) Nonlocal Diffusion and Applications. In: *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, Vol. 20, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28739-3

[3] Dipierro, S., Medina, M. and Valdinoci, E. (2017) Fractional Elliptic Problems with Critical Growth in the Whole of R^n. In: *Publications of the Scuola Normale Superiore*, Vol. 15, Edizioni della Normale, Pisa.

[4] Barrow, J.D. and Parsons, P. (1995) Inflationary Models with Logarithmic Potentials. *Physical Review D*, **52**, 5576-5587. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5576

[5] Enqvist, K. and McDonald, J. (1998) Q-Balls and Baryogenesis in the MSSM. *Physics Letters*, **425**, 309-321. https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00271-8

[6] Liu, W.J., Yu, J.Y. and Li, G. (2021) Global Existence, Exponential Decay and Blow-Up of Solutions for a Class of Fractional Pseudo-Parabolic Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Discrete & Continuous Dynamical Systems S*, **14**, 4337-4366. https://doi.org/10.3934/dcdss.2021121

[7] Lian, W. and Xu, R.Z. (2019) Global Well-Posedness of Nonlinear Wave Equation with Weak and Strong Damping Terms and Logarithmic Source Term. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 613-632. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0016

[8] Xu, R.Z., Lian, W., Kong, X.K. and Yang, Y.B. (2019) Fourth Order Wave Equation with Nonlinear Strain and Logarithmic Nonlinearity. *Applied Numerical Mathematics*, **141**, 185-205. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.06.004

[9] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004