Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1792-1803**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124186

时间分数阶扩散方程逆向问题的迭代分数次Tikhonov方法

杜文慧

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月28日

摘 要

研究了一个在一般有界域中的具有可变系数的时间分数阶扩散方程的逆向问题。提出了一种迭代的分数次Tikhonov正则化方法去解决这个逆向问题。此外，通过先验正则化参数选取规则和后验正则化参数选取规则，证明了正则化解的收敛率。迭代的分数次Tikhonov正则化方法超越了经典Tikonov正则化方法的饱和结果，在先验参数选取规则下，迭代的分数次Tikhonov正则化方法优于经典迭代Tikonov正则化方法。

关键词

时间分数阶扩散方程，迭代分数次Tikhonov正则化，先验参数选取，后验参数选取，误差估计

Iterated Fractional Tikhonov Method for a Backward Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation

Wenhui Du

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

The backward problem of a time-fractional diffusion equation with variable coefficients in a general bounded domain is studied. An iterative fractional Tikhonov regularization method was proposed to solve the backward problem. In addition, the convergence rates for the regularized solu-

文章引用：杜文慧. 时间分数阶扩散方程逆向问题的迭代分数次 Tikhonov 方法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1792-1803. DOI: 10.12677/aam.2023.124186

tion can be proved by using an a priori regularization parameter choice rule and an a posteriori regularization parameter choice rule. The iterative fractional Tikhonov regularization method surpasses the saturation result of classical Tikhonov regularization method, and iterative fractional Tikhonov regularization method is superior to classical iterative Tikhonov regularization method under the a-priori parameter choice rule.

Keywords

Time-Fractional Diffusion Equation, Iterative Fractional Tikhonov Regularization, A Priori Parameter Choice, A Posteriori Parameter Choice, Error Estimation

1. 引言

近年来，时间分数阶扩散方程在各个领域都有重要的应用。许多研究者都对时分扩散方程的逆向问题进行了研究。对于整数阶时间导数，例如 $\alpha=1$，逆向问题是一个经典的不适定问题，已经被广泛研究。对于分数阶时间导数，仍有较少的工作式是针对逆向问题的。在文献[1]中，Liu 和 Yamamoto 用拟逆正则化方法解决了一维情况下恒定系数 $\theta_{ij}=\theta$ 和 $c(x)=0$ 的逆向问题。在文献[2]中，Wang 通过使用拟边界正则化方法进一步扩展了后验正则化参数选择规则。最近，在文献[3]中，Han 通过使用分数次 Landweber 方法研究了这种分数阶逆向问题。Bianchi 等[4]为分数次 Tikhonov 正则化方法设计了一个迭代版本，以解决著名的饱和问题。在本文中，我们研究了在先验参数和后验参数选择规则下解决此逆向问题的迭代分数次 Tikhonov 方法。

我们考虑在一般有界域中具有可变系数的时间分数阶扩散方程的逆向问题，设 Ω 是 $\mathbf{R}^d$ 上的一个有界域，且具有足够光滑的边界 $\partial\Omega$。逆向时间分数阶扩散问题由以下公式给出：

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t)=(Lu)(x,t), & x\in\Omega, t\in(0,T), 0<\alpha<1, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, t\in(0,T), \\ u(x,T)=g(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中分数导数 $D_t^\alpha u(x,t)$ 是阶数为 $\alpha(0<\alpha\le 1)$ 的 Caputo 分数导数，其定义为

$$D_t^\alpha u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-a)}\displaystyle\int_0^t (t-\eta)^{-\alpha}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta, 0<\alpha<1, & 0<\alpha<1, \\ u_t(x,t), & \alpha=1. \end{cases}$$

并且 $-L$ 是定义在 $D(-L)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 上的对称的一致椭圆算子：

$$Lu(x)=\sum_{i=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^d\theta_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right)+c(x)u(x).$$

其中 $\theta_{i,j}(x)$ 和 $c(x)$ 是 Ω 上的足够平滑的函数，并且满足

$$\theta_{i,j}\in C^1(\bar{\Omega}), \theta_{i,j}=\theta_{j,i}, c(x)\in C(\bar{\Omega}), c(x)\le 0, \forall x\in\bar{\Omega}$$

$\exists \upsilon > 0$ （υ 为常数），使得 $\upsilon\sum_{i}^{d}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{d}\theta_{i,j}(x)\xi_i\xi_j, \forall x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbf{R}^d$ 。

逆向问题是在测量数据 $g^{\delta}(x)$ 下找到 $t \in [0,T)$ 的温度 $u(x,t)$ 的近似值，其中精确数据 $g(x)$ 和噪声数据 $g^{\delta}(x)$ 满足：

$$\left\| g^{\delta}(x) - g(x) \right\| \le \delta, \tag{2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 L^2 范数， $\delta > 0$ 是一个噪音水平。

2. 准备工作

在本文中，我们将使用以下定义和引理。

定义 2.1 [5]：Mittag-leffler 函数有如下定义

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}, z \in \mathbf{C},$$

其中 $\forall a > 0$ (a 为常数)且 $b \in \mathbf{R}$ 。

引理 2.1 [5]：1) 对 $0 < \alpha < 1$ 和 $\eta > 0$，

$$0 \le E_{\alpha,1}(-\eta) < 1, \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\eta^{\alpha}}E_{\alpha,1}(-\lambda\eta^{\alpha}) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda\eta^{\alpha}).$$

此外， $E_{\alpha,1}(-\eta)$ 是完全单调的。也就是说 $(-1)^n \mathrm{d}^n E_{\alpha,1}(-\eta)/\mathrm{d}\eta^n \ge 0$ 。当 $\eta \to +\infty$， $E_{\alpha,1}(-\eta)$ 满足下面的近似关系：

$$E_{\alpha,1}(-\eta) = \frac{1}{\eta\Gamma(1-\alpha)} + o\left(|\eta|^{-2}\right).$$

2) 对 $\lambda > 0, \alpha > 0$ 和正整数 $m \in \mathbf{N}$，

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}E_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha}) = -\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha-m+1}(-\lambda t^{\alpha}), t > 0.$$

3) 假设 $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$，存在只与 α_0 和 α_1 有关的常数 $c, C > 0$，则有

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1-t} \le E_{\alpha,1}(t) \le \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1-t}, \forall t > 0$$

对所有的 $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ 都成立。

引理 2.2 [6]：对任意的 λ_n 满足 $\lambda_n \ge \lambda_1 > 0$，存在正常数 $\underline{C}, \bar{C}$，则有

$$\frac{\underline{C}}{\lambda_n} \le E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha}) \le \frac{\bar{C}}{\lambda_n}.$$

引理 2.3：设常数 $\gamma > 0; T > 0; \mu > 0; m > 0; \lambda_n > 0$，则有

$$\sup_n \frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha})} \le mC_1\mu^{-\frac{1}{2}}.$$

证明：由文献[4]中的命题 18 可知 $F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n) \le mF_{\mu,\gamma}(\sigma_n)$，其中 $F_{\mu,\gamma}(\sigma_n) = \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \mu}\right)^{\gamma}$ 。

$$\sup_n \frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)} \le \sup_n \frac{mF_{\mu,\gamma}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)} = \sup_n m \frac{\left(E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)\right)^{2\gamma-1}}{\left(\mu + \left(E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)\right)^2\right)^\gamma} \le \sup_n m \frac{\overline{C}^{2\gamma-1}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{2\gamma-1}}{\left(\mu + \underline{C}^2\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2\right)^\gamma},$$

令 $\zeta = \frac{1}{\lambda_n}$。设

$$A(\zeta) = m\overline{C}^{2\gamma-1} \frac{\zeta^{2\gamma-1}}{\left(\mu + \underline{C}^2\zeta^2\right)^\gamma}.$$

对 $\gamma > \frac{1}{2}$，函数 $A(\zeta)$ 是连续的。由于 $A(\zeta) \ge 0, \lim_{\zeta\to 0} A(\zeta) = 0$，且 $\lim_{\zeta\to\infty} A(\zeta) = 0$，所以最大点满足 $A'(\zeta_*) = 0$。解得 $\zeta_* = \frac{\sqrt{2\gamma\mu - \mu}}{\underline{C}}$。

将 ζ_* 代入 $A(\zeta)$ 中得到最大值

$$A(\zeta) \le A(\zeta_*) = m\overline{C}^{2\gamma-1}\underline{C}^{-2\gamma+1}(2\gamma-1)^{\gamma-\frac{1}{2}}(2\gamma)^{-\gamma}\mu^{-\frac{1}{2}} := C_1 m\mu^{-\frac{1}{2}}.$$

最后，我们得到

$$\sup_n \frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)} \le C_1 m\mu^{-\frac{1}{2}}.$$

引理 2.3 证毕。

引理 2.4：设 $\gamma > 0; \mu > 0; m > 0; \lambda_n \ge \lambda_1 > 0$，则

$$\sup_n \left(1 - F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)\right)^2 (\lambda_n)^{-p} \le \begin{cases} C_2^{2m}\mu^{2m}, & p \ge 4m, \\ C_3^{-2m} m^{-2m}\mu^{\frac{p}{2}}, & 0 < p < 4m. \end{cases}$$

证明：由文献[4]中的命题 18 可知 $1 - F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n) = \left(1 - F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^m$。同样的，由文献[7]中的命题 3.2 可知 $F_{\mu,\gamma}(\sigma_n) \ge F_{\mu,1}(\sigma_n) > 0$，其中 $F_{\mu,\gamma}(\sigma_n) = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \mu}$ 是古典 Tikhonov 方法的滤波函数。我们有

$$\sup_n \left(1 - F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)\right)^2 (\lambda_n)^{-p} = \sup_n \left(1 - F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^{2m} (\lambda_n)^{-p} \le \left(\frac{\mu\lambda_n^{2-\frac{p}{2m}}}{\underline{C}^2 + \mu\lambda_n^2}\right)^{2m}. \tag{3}$$

令 $y = \lambda_n$。设

$$B(y) = \frac{\mu y^{2-\frac{p}{2m}}}{\underline{C}^2 + \mu y^2}.$$

如果 $2 - \frac{p}{2m} \le 0$，即 $p \ge 4m$，有

$$B(y) = \frac{\mu y^{2-\frac{p}{2m}}}{\underline{C}^2 + \mu y^2} \le \frac{\mu}{\underline{C}^2} \frac{1}{\lambda_1^{\frac{p}{2m}-2}} := C_2\mu.$$

如果 $2-\frac{p}{2m}>0$，即 $0<p<4m$，函数 $B(y)$ 是连续的。由于 $B(y)\geq 0, \lim_{y\to 0}B(y)=0$，并且 $\lim_{y\to\infty}B(y)=0$，所以最大点满足 $B'(y_*)=0$。解得 $y_*=\frac{\sqrt{\underline{C}^2(4m-p)}}{\sqrt{\mu p}}$。

将 y_* 代入 $B(y)$ 中得到最大值

$$B(y)\leq B(y_*)=\frac{1}{4}m^{-1}\underline{C}^{-\frac{p}{2m}}(4m-p)^{\frac{4m-p}{4m}}p^{\frac{p}{4m}}\mu^{\frac{p}{4m}}:=C_3m^{-1}\mu^{\frac{p}{4m}}. \tag{4}$$

最后，我们得到

$$\sup_n\left(1-F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)\right)^2(\lambda_n)^{-p}\leq\begin{cases}C_2^{2m}\mu^{2m}, & p\geq 4m,\\ C_3^{2m}m^{-2m}\mu^{\frac{p}{2}}, & 0<p<4m.\end{cases}$$

引理 2.5：设 $\gamma>0;T>0;\mu>0;p>0;m>0$，则

$$\sup_n\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^m(\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^\alpha\right)\leq\begin{cases}\overline{C}C_4^m\mu^m, & p\geq 4m-2,\\ \overline{C}C_5^mm^{-m}\mu^{\frac{p+2}{4}}, & 0<p<4m-2.\end{cases}$$

证明：与计算(3)式相类似，我们可得

$$\begin{aligned}&\sup_n\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^m(\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^\alpha\right)\\ &\leq\sup_n\left(1-F_{\mu,1}(\sigma_n)\right)^m(\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^\alpha\right)\\ &\leq\sup_n\left(\frac{\mu}{\underline{C}^2\lambda_n^{-2}+\mu}\right)^m(\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}\frac{\overline{C}}{\lambda_n}=\overline{C}\sup_n\left(\frac{\mu\lambda_n^{2-\frac{p+2}{2m}}}{\underline{C}^2+\mu\lambda_n^2}\right)^m.\end{aligned}$$

令 $y=\lambda_n$。设

$$G(y)=\frac{\mu y^{2-\frac{p+2}{2m}}}{\underline{C}^2+\mu y^2}.$$

如果 $2-\frac{p+2}{2m}\leq 0$，即 $p\geq 4m-2$，对 $\lambda_n\geq\lambda_1>0$，有

$$G(y)\leq\underline{C}^{-2}\mu\frac{1}{\lambda_1^{\frac{p+2}{2m}-2}}:=C_4\mu.$$

如果 $2-\frac{p+2}{2m}>0$，即 $0<p<4m-2$，与计算(4)式相类似，得

$$G(y)\leq G(y_*)=\frac{1}{4}\underline{C}^{-\frac{p+2}{2m}}(p+2)^{\frac{p+2}{4m}}(4m-p-2)^{\frac{4m-p-2}{4m}}m^{-1}\mu^{\frac{p+2}{4m}}:=C_5m^{-1}\mu^{\frac{p+2}{4m}}.$$

最后，我们得到

$$\sup_n\left(1-F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)\right)^2(\lambda_n)^{-p}\leq\begin{cases}\overline{C}C_4^m\mu^m, & p\geq 4m-2,\\ \overline{C}C_5^mm^{-m}\mu^{\frac{p+2}{4}}, & 0<p<4m-2.\end{cases}$$

3. 问题的不适定性和条件稳定性

假设算子 $-L$ 的特征值为 λ_n 并且 $\varphi_n(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 是其相应的标准正交特征函数。$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 上的标准正交基。我们有 $L\varphi_n=-\lambda_n\varphi_n$。由于 $-L$ 是一个对称的一致椭圆算子，我们可以假设其特征值满足 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots,\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$。定义一种 Hilbert 空间

$$D\left((-L)^q\right)=\left\{b\in L^2;\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\right)^q\left|(b,\varphi_n)\right|^2<+\infty\right\},\tag{5}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示其在 $L^2(\Omega)$ 中的内积。它具有范数 $\|b\|_{D\left((-L)^q\right)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\right)^q\left|(b,\varphi_n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

通过变量分离和引理 2.1，我们可以得到问题(1)的形式解：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u(x,0),\varphi_n\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n t^{\alpha}\right)\varphi_n(x).\tag{6}$$

定义 $f(x)=u(x,0),f_n=(f,\varphi_n),g_n=(g,\varphi_n)$，并且让 $t=T$，则有

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nE_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)\varphi_n(x),\tag{7}$$

且

$$g_n=f_nE_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right),\tag{8}$$

因此

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nt^{\alpha}\right)}{E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)}g_n\varphi_n(x).\tag{9}$$

当 $0<\alpha<1,t\in(0,T)$ 时，逆向问题是稳定的。这与 $\alpha=1$ 时完全不同。我们对这一现象的解释是：由于分数导数是遗传函数，拥有对过去状态的全部记忆，所以我们很容易的从其现在的信息中发现以前的状态。但 $t=0$ 时的状态是个例外。

在下文中，我们只考虑 $t=0$ 的情况。

定义线性算子 $K:f\to g$ 如下：

$$\left(K(f)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)\left(f(x),\varphi_n(x)\right)\varphi_n=\int_{\Omega}k(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi=g(x),x\in\Omega,\tag{10}$$

其中 $k(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)$。由于 $k(x,\xi)=k(\xi,x)$，所以 K 是自交的。从文献[8]中的定理 2.1 可知，如果 $f\in L^2(\Omega)$，则 $g\in H^2(\Omega)$。因为 $H^2(\Omega)$ 是紧嵌入 $L^2(\Omega)$ 的，所以 $K:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 是紧的，所以问题(10)是不适定的。

紧的线性自伴算子 K 的奇异值为 $\sigma_n=E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)$。

我们在下面的定理中给出一个条件稳定性。

定理 3.1 [9]：设 $f(x):=u(x,0)\in D\left((-L)^{\frac{p}{2}}\right)$ 满足一个先验约束条件

$$\|f\|_{D\left((-L)^{\frac{p}{2}}\right)}\le E,p>0,\tag{11}$$

则有

$$\|f\| \le C_6 E^{\frac{2}{p+2}} \|g\|^{\frac{p}{p+2}}, p > 0,$$

其中 $C_6 = \underline{C}^{-\frac{p}{p+2}}$ 是一个与 α, T, p, λ_1 有关的常数。

4. 迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法和收敛性分析

在本节中，我们提出分数次 Tikhonov 方法的固定迭代版本[4] [10]，用迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法去解决这个不适定问题。

$$\begin{cases} f_{\mu,\gamma}^{0} := 0; \\ \left(K^*K + \mu I\right) f_{\mu,\gamma}^{m} := \left(K^*K\right)^{\gamma-1} K^* g + \left[\left(K^*K + \mu I\right)^{\gamma} - \left(K^*K\right)^{\gamma}\right] f_{\mu,\gamma}^{m-1}. \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\frac{1}{2} \le \gamma \le 1$，如果 $\gamma = 1$，就得到了标准迭代 Tikhonov 正则化。选择 $\frac{1}{2} < \gamma < 1$，可以防止过平滑效应，获得更准确的解的不连续数值结果。

如果 $g = g^{\delta}$，我们定义 $f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}$ 为分数次 Tikhonov 的第 m 次迭代。在本节中，正则化参数仍然为 μ，迭代步骤 m 是固定的。对任意给定的 $m \in \mathbf{N}$ 和 $\frac{1}{2} < \gamma < 0$，在(12)式中的固定的迭代分数次 Tikhonov 是一种基于过滤器的正则化方法，其滤波函数为：

$$F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma) = \frac{\left(\sigma^2 + \mu\right)^{\gamma m} - \left[\left(\sigma^2 + \mu\right)^{\gamma} - \sigma^{2\gamma}\right]^{m}}{\left(\sigma^2 + \mu\right)^{\gamma m}}$$

迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法在噪声数据和精确数据下的解为

$$f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)} \left(g^{\delta}, \varphi_n\right) \varphi_n, \tag{13}$$

和

$$f_{\mu,\gamma}^{m}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)} \left(g, \varphi_n\right) \varphi_n. \tag{14}$$

4.1. 先验正则化参数选取规则下的收敛性估计

定理 4.1： 假设先验条件(11)和噪声假设(2)成立，我们有

1) 如果 $p \ge 4m$ 和 $\mu = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{2m+1}}$，则有收敛性估计

$$\left\| f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x) - f(x) \right\| \le \left(C_1 m + C_2^m\right) E^{\frac{1}{2m+1}} \delta^{\frac{2m}{2m+1}}.$$

2) 如果 $0 < p < 4m$ 和 $\mu = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{4}{p+2}}$，则有收敛性估计

$$\left\| f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x) - f(x) \right\| \le \left(C_1 m + C_3^m m^{-m}\right) E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}.$$

证明： 由三角不等式得

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f(x)\right\| \le \left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f_{\mu,\gamma}^{m}(x)\right\|+\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|. \tag{15}$$

首先，我们给出(15)式中的第一项估计

$$\begin{aligned}\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f_{\mu,\gamma}^{m}(x)\right\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}(g^\delta,\varphi_n)\varphi_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}(g,\varphi_n)\varphi_n\right\|^2\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}\right)^2\left\|g^\delta-g\right\|^2 \le \sup_n\left(\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}\right)^2\delta^2 \le \left(mC_1\mu^{-\frac{1}{2}}\right)^2\delta^2\end{aligned}$$

因此

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f_{\mu,\gamma}^{m}(x)\right\| \le C_1 m\mu^{-\frac{1}{2}}\delta, \tag{16}$$

其次，我们估计(15)式中的第二项

$$\begin{aligned}\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}(g,\varphi_n)\varphi_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}(g,\varphi_n)\varphi_n\right\|^2\\ &=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^\alpha)}(g,\varphi_n)\varphi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2(\lambda_n)^{-p}f_n^2(\lambda_n)^p\\ &\le \sup_n\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2(\lambda_n)^{-p}E^2 \le \begin{cases}C_2^{2m}\mu^{2m}E^2, & p\ge 4m,\\ C_3^{2m}m^{-2m}\mu^{\frac{p}{2}}E^2, & 0<p<4m.\end{cases}\end{aligned}$$

因此

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\| \le \begin{cases}C_2^{m}\mu^{m}E, & p\ge 4m,\\ C_3^{m}m^{-m}\mu^{\frac{p}{4}}E, & 0<p<4m.\end{cases} \tag{17}$$

将(16)式和(17)式相加，选取 $\mu=\begin{cases}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{2m+1}}, p\ge 4m,\\ \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{4}{p+2}}, 0<p<4m.\end{cases}$ 得到

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f(x)\right\| \le \begin{cases}\left(mC_1+C_2^m\right)E^{\frac{1}{2m+1}}\delta^{\frac{2m}{2m+1}}, & p\ge 4m,\\ \left(mC_1+C_3^m m^{-m}\right)E^{\frac{2}{p+2}}\delta^{\frac{p}{p+2}}, & 0<p<4m.\end{cases} \tag{18}$$

此定理证毕。

4.2. 后验正则化参数选取规则下的收敛性估计

在本节中，我们考虑了 Morozov 偏差原理的一个后验选取规则，并得到正则化解(13)的收敛率。在这里 Morozov 偏差原理是用来确定正则化参数 μ 的。

我们使用以下形式的偏差原理：

$$\left\|Kf_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-g^\delta(x)\right\| = \tau\delta. \tag{19}$$

其中 $\tau>1$ 是常数。根据下面的引理，如果 $\left\|g^{\delta}\right\|>\tau\delta>0$，(19)式就会存在一个唯一的解。

引理 4.1：设 $I(\mu)=\left\|Kf_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-g^{\delta}(x)\right\|$。如果 $\left\|g^{\delta}\right\|>\delta>0$，就有下面的结论成立：1) $I(\mu)$ 是一个连续函数；2) $\lim\limits_{\mu\to 0}I(\mu)=0$；3) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}I(\mu)=\left\|g^{\delta}(x)\right\|$；4) $I(\mu)$ 是一个在 $(0,\infty)$ 上的严格递增函数。

证明：由如下的表达式

$$I(\mu)=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)\left(g^{\delta},\varphi_n\right)\varphi_n\right\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^{2m}\left(g^{\delta},\varphi_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\mu}\right)^{\gamma}\right)^{2m}\left(g^{\delta},\varphi_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证上述结论成立。

引理 4.2：如果 μ 是(19)式的解，我们可以得到下面不等式：

$$\frac{1}{\mu}\le\begin{cases}\left(\dfrac{\bar{C}C_4^m}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\dfrac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, & p\ge 4m-2,\\ \left(\dfrac{\bar{C}C_5^m m^{-m}}{\tau-1}\right)^{\frac{4}{p+2}}\left(\dfrac{E}{\delta}\right)^{\frac{4}{p+2}}, & 0<p<4m-2.\end{cases}$$

证明：首先，由(10)式和(19 式)得

$$\begin{aligned}\tau\delta&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^{2m}\left(g^{\delta},\varphi_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^{2m}\left(g^{\delta}-g,\varphi_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^{2m}\left(g,\varphi_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\delta+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-F_{\mu,\gamma}(\sigma_n)\right)^{2m}\lambda_n^{-p}\lambda_n^{p}E_{\alpha,1}^2\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)\left(f,\varphi_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\delta+\begin{cases}\bar{C}C_4^m\mu^mE, & p\ge 4m-2,\\ \bar{C}C_5^m m^{-m}\mu^{\frac{p+2}{4}}E, & 0<p<4m-2.\end{cases}\end{aligned}$$

则可以得到

$$\frac{1}{\mu}\le\begin{cases}\left(\dfrac{\bar{C}C_4^m}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\dfrac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, & p\ge 4m-2,\\ \left(\dfrac{\bar{C}C_5^m m^{-m}}{\tau-1}\right)^{\frac{4}{p+2}}\left(\dfrac{E}{\delta}\right)^{\frac{4}{p+2}}, & 0<p<4m-2.\end{cases}\tag{20}$$

引理 4.2 证毕。

定理 4.2：假设先验条件(11)和噪声假设(2)成立，并且存在 $\tau>1$，使得 $\left\|g^{\delta}\right\|>\tau\delta>0$。正则化参数 $\mu>0$ 通过偏差原理(19)选取，我们有

1) 如果 $p\ge 4m-2$，则有收敛性估计

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f(x)\right\|\le C_7E^{\frac{1}{2m}}\delta^{\frac{2m-1}{2m}},$$

其中 $C_7 = C_1 m\left(\frac{\overline{C}C_4^m}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{2m}} + (\tau+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\underline{C}^{\frac{1-2m}{2m}}$。

2) 如果 $0 < p < 4m-2$，则有收敛性估计

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f(x)\right\| \le C_8 E^{\frac{2}{p+2}}\delta^{\frac{p}{p+2}}.$$

其中 $C_8 = C_1 m\left(\frac{\overline{C}C_5^m m^{-m}}{\tau-1}\right)^{\frac{2}{p+2}} + (\tau+1)^{\frac{p}{p+2}}\underline{C}^{-\frac{2}{p+2}}$。

证明： 由三角不等式得

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f(x)\right\| \le \left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f_{\mu,\gamma}^{m}(x)\right\| + \left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|. \tag{21}$$

我们先来估计(21)式的第一项，通过(16)式和(20)式可得到

$$\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f_{\mu,\gamma}^{m}(x)\right\| \le \begin{cases} C_1 m\left(\frac{\overline{C}C_4^m}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{2m}} E^{\frac{1}{2m}}\delta^{\frac{2m-1}{2m}}, & p \ge 4m-2, \\ C_1 m\left(\frac{\overline{C}C_5^m m^{-m}}{\tau-1}\right)^{\frac{2}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}}\delta^{\frac{p}{p+2}}, & 0 < p < 4m-2. \end{cases} \tag{22}$$

接下来，我们估计(21)式中的第二项，

$$\begin{aligned} \left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha})}(g,\varphi_n)\varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha})}(g,\varphi_n)\varphi_n\right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 (f,\varphi_n)^2, \end{aligned} \tag{23}$$

$$(g,\varphi_n) = E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha})(f,\varphi_n). \tag{24}$$

当 $p \ge 4m-2$ 时，有

$$\begin{aligned} &\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 (f,\varphi_n)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^{\frac{2(2m-1)}{2m}} (g,\varphi_n)^{\frac{2(2m-1)}{2m}} \left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^{\frac{1}{m}} E_{\alpha,1}^{-\frac{2(2m-1)}{2m}}(-\lambda_n T^{\alpha})(f,\varphi_n)^{\frac{1}{m}} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 (g,\varphi_n)^2\right)^{\frac{2m-1}{2m}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 E_{\alpha,1}^{-2(2m-1)}(-\lambda_n T^{\alpha})(f,\varphi_n)^2\right)^{\frac{1}{2m}} \\ &:= (I_1)^{\frac{2m-1}{2m}}(I_2)^{\frac{1}{2m}}, \end{aligned} \tag{25}$$

下面我们来估计 I_1 和 I_2，

$$\begin{aligned} I_1^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 (g,\varphi_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 (g-g^{\delta},\varphi_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 (g^{\delta},\varphi_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \delta + \tau\delta. \end{aligned} \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 E_{\alpha,1}^{-2(2m-1)}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)\left(f,\varphi_n\right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_{\mu,\gamma}^{(m)}(\sigma_n)-1\right)^2 E_{\alpha,1}^{-2(2m-1)}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)\lambda_n^{-p}\lambda_n^{p}\left(f,\varphi_n\right)^2 \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\underline{C}^{-2(2m-1)}\lambda_n^{4m-2-p}\lambda_n^{p}\left(f,\varphi_n\right)^2 \\
&\le \underline{C}^{2-4m}E^2,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

因此

$$
\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|\le(\tau+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\underline{C}^{\frac{1-2m}{2m}}E^{\frac{1}{2m}}\delta^{\frac{2m-1}{2m}},
\tag{28}
$$

当 $0<p<4m-2$ 时，用计算(28)式相似的方法得到(29)式

$$
\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|\le(\tau+1)^{\frac{p}{p+2}}\underline{C}^{-\frac{p}{p+2}}E^{\frac{2}{p+2}}\delta^{\frac{p}{p+2}},
\tag{29}
$$

将(28)式和(29 式)结合

$$
\left\|f_{\mu,\gamma}^{m}(x)-f(x)\right\|\le
\begin{cases}
(\tau+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\underline{C}^{\frac{1-2m}{2m}}E^{\frac{1}{2m}}\delta^{\frac{2m-1}{2m}}, & p\ge 4m-2,\\
(\tau+1)^{\frac{p}{p+2}}\underline{C}^{-\frac{p}{p+2}}E^{\frac{2}{p+2}}\delta^{\frac{p}{p+2}}, & 0<p<4m-2.
\end{cases}
\tag{30}
$$

将(22)式和(30)式相加得

$$
\left\|f_{\mu,\gamma}^{m,\delta}(x)-f(x)\right\|\le
\begin{cases}
\left(C_1 m\left(\dfrac{\bar{C}C_4^m}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{2m}}+(\tau+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\underline{C}^{\frac{1-2m}{2m}}\right)E^{\frac{1}{2m}}\delta^{\frac{2m-1}{2m}}, & p\ge 4m-2,\\
\left(C_1 m\left(\dfrac{\bar{C}C_5^m m^{-m}}{\tau-1}\right)^{\frac{2}{p+2}}+(\tau+1)^{\frac{p}{p+2}}\underline{C}^{-\frac{2}{p+2}}\right)E^{\frac{2}{p+2}}\delta^{\frac{p}{p+2}}, & 0<p<4m-2.
\end{cases}
$$

此定理证毕。

5. 结束语

在本文中，我们提出了一种迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法来解决时间分数阶扩散方程的逆向问题。在通常的平滑源条件下，根据先验和后验参数的正则化参数的选择规则得到 Hölder 型误差估计。迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法克服了经典 Tikhonov 方法的饱和结果，在先验参数选择规则下，迭代的分数次 Tikhonov 方法要优于经典迭代 Tikhonov 方法。

参考文献

[1] Liu, J.J. and Yamamoto, M. (2010) A Backward Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation. *Applicable Analysis*, **89**, 1769-1788. https://doi.org/10.1080/00036810903479731

[2] Wang, J.G., Zhou, Y.B. and Wei, T. (2013) A Posteriori Regularization Parameter Choice Rule for the Quasi-Boundary Value Method for the Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 741-747. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.02.006

[3] Han, Y., Xiong, X. and Xue, X. (2019) A Fractional Landweber Method for Solving Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **78**, 81-91. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.02.017

[4] Bianchi, D., Buccini, A., Donatelli, M., *et al.* (2015) Iterated Fractional Tikhonov Regularization. *Inverse Problems*, **31**,

055005. https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/5/055005

[5] Podlubny, L. (1999) Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Mathematics in Science and Engineering 198. Academic Press, San Diego.

[6] Wang, J.G. and Wei, T. (2014) An Iterative Method for Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **30**, 2029-2041. https://doi.org/10.1002/num.21887

[7] Klann, E. and Ramlau, R. (2008) Regularization by Fractional Filter Methods and Data Smoothing. *Inverse Problems*, **24**, 045005. https://doi.org/10.1088/0266-5611/24/2/025018

[8] Sakamoto, K. and Yamamoto, M. (2011) Initial Value/Boundary Value Problems for Fractional Diffusion-Wave Equations and Applications to Some Inverse Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **382**, 426-447. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.058

[9] Wei, T. and Wang, J.G. (2014) A Modified Quasi-Boundary Value Method for the Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *ESAIM*: *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **48**, 603-621. https://doi.org/10.1051/m2an/2013107

[10] Yang, S., Xiong, X. and Nie, Y. (2021) Iterated Fractional Tikhonov Regularization Method for Solving the Spherically Symmetric Backward Time-Fractional Diffusion Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **160**, 217-241. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.10.008