

常维码的多重构造方法的新改进

李 可*, 吴温萱, 郭芝燕, 杜雨轩

苏州科技大学数学科学学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2023年3月26日; 录用日期: 2023年4月21日; 发布日期: 2023年4月28日

摘 要

常维码(constant dimension codes)作为一种特殊的子空间码, 由于其在随机网络编码中的应用而受到关注。Etzion等人在[IEEE Trans. Inf. Theory, 55 (2009), 2909-2919.]给出了子空间距离与汉明距离、秩距离之间的关系, 并提出了构造常维码的一种重要方法——多重构造法, 此构造法也已被众多学者进行了推广。本文在原多重构造的基础上, 利用待定点增加子空间距离的思想更加精细地刻画了子空间距离与汉明距离之间的关系, 由此给出了寻找子空间码标识向量更一般的方法, 利用此方法提升了 $(14, 6, 4)_q$ -常维码的下界。

关键词

秩度量码, 多重构造, 常维码

New Improvements of Multilevel Construction for Constant Dimension Codes

Ke Li*, Wenxuan Wu, Zhiyan Guo, Yuxuan Du

School of Mathematics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

Constant dimension codes (CDCs), as special subspace codes, have received a lot of attention due to its application in random network coding. Multilevel construction, as an important construction of CDCs, was raised by Etzion *et al.* in [IEEE Trans. Inf. Theory, 55 (2009), 2909-2919.] by explaining the relation between subspace distance and Hamming distance, rank distance. This construction has also been generalized by many scholars. Based on the original multilevel construction, the

*通讯作者。

paper uses the idea of increasing subspace distance by fixing pending dots to more delicately describe the relationship between subspace distance and Hamming distance. Therefore, we provide a more general method for finding the identifying vectors of subspace codes and also improve the lower bound of $(14, 6, 4)_q$ -CDC.

Keywords

Rank-Metric Code, Multilevel Construction, Constant Dimension Code

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

随着计算机网络的飞速发展,网络编码作为一种新型网络数据传输方式受到广泛的关注。如今,网络编码已广泛应用于分布式存储系统、P2P、社交网络、无线传输网络等领域。但由于在无线网络编码传输的过程中,容易造成数据包的丢失,故对其进行纠错是十分必要的。为了解决此问题,Kötter 和 Kschischang [1]利用向量空间之间的距离性质提出了子空间码的概念。

在射影空间中,令 q 是一个素数幂, \mathbb{F}_q 表示 q 阶有限域, \mathbb{F}_q^n 表示 \mathbb{F}_q 上所有 n 长向量的集合,即 \mathbb{F}_q^n 上的 n 维向量空间。若 $P_q(n)$ 表示 n 维向量空间 \mathbb{F}_q^n 上的所有子空间的集合,则对于任意子空间 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in P_q(n)$, 定义子空间距离(subspace distance):

$$d_s(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} - 2 \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})。$$

定义 1.1: 称 $\mathcal{C} \in P_q(n)$ 是一个参数为 $(n, d)_q$ -子空间码,若 \mathcal{C} 中的任意两个码字之间的子空间距离大于等于 d 。特殊的,若 \mathcal{C} 中每个码字的维数都是 k ,则称为常维码。记作 $(n, d, k)_q$ -常维码。若 $|\mathcal{C}| = M$, 则记作 $(n, M, k, d)_q$ -常维码。

在文中,用 $A_q(n, d, k)$ 表示所有参数为 $(n, M, d, k)_q$ -常维码中的最大值。由于 $A_q(n, d, k) = A_q(n, d, n-k)$ (见文献[2]),故不妨设 $n \geq 2k$ 。对于 \mathbb{F}_q^n 上的一个 k 维子空间 \mathcal{U} ,将它的一组基排成一个 $k \times n$ 的矩阵 U ,则可以用矩阵 U 表示此 k 维子空间。如果任意两个 k 维子空间 \mathcal{U}, \mathcal{V} ,易知其子空间距离有如下刻画:

$$d_s(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 2 \cdot \text{rank} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - 2k,$$

其中 $U, V \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$, 并且 $\mathcal{U} = \text{rowspan}(U), \mathcal{V} = \text{rowspan}(V)$ 。

常维码作为一类特殊而且重要的子空间码受到人们的广泛关注。2008年, Silva, Kschischang 和 Kötter 给出了一种简单有效构造常维码的方法:提升构造法。2009年, Etzion 和 Silberstein [3]通过引入标识向量和费勒图秩度量码的概念,推广了提升构造法,提出了多重构造法。Trautmann 和 Rosenthal 在文献[4]中提出了待定点的概念以改进多重构造法。Etzion 等人利用待定点和图分解构造了一些子空间码(见文献[5][6])。Gorla 和 Ravagnani 在文献[7]中提升了一些常维码的下界。近几年,多重构造方法也被众多学者推广。关于子空间码的构造和界的更多资料,有兴趣的读者可以查阅文献[3][4][6][8][9][10]。

本文其余内容如下,第二章简要介绍了秩度量码、费勒图秩度量码和多重构造法等概念、方法。第三章,首先,利用填充待定点的思想,进一步刻画了子空间距离和汉明距离之间的关系(参见引理 3.1),

从而改进原有字典序搜索标识向量的方法(参见算法 1)。最后, 利用此方法提升了 $(14, 6, 4)_q$ -常维码的下界(参见命题 3.3)。

输入: $\Omega = \{u_0\}$ and V
 输出: Ω

- 1: **repeat**
- 2: $U_{1,\Omega}, U_{2,\Omega}$.
- 3: **if** $\max_{u \in U_{1,\Omega}} \dim(\mathcal{F}'_u, \delta) \geq \max_{u \in U_{2,\Omega}} \dim(\mathcal{F}'_u, \delta)$ **then**
- 4: **set** $u_{\max} = u_{1,\max}$.
- 5: **else**
- 6: **set** $u_{\max} = u_{2,\max}$.
- 7: **end if**
- 8: **set** $\Omega = \Omega \cup \{u_{\max}\}$.
- 9: **until** $U_{1,\Omega} = \emptyset$ and $U_{2,\Omega} = \emptyset$

Algorithm 1. The searching method of identifying vectors

算法 1. 标识向量搜索算法

2. 预备知识

令 $\mathbb{F}_q^{m \times n}$ 表示 \mathbb{F}_q 上所有 $m \times n$ 的矩阵的集合。 $\mathcal{G}_q(n, k)$ 表示 \mathbb{F}_q^n 上的所有 k 维子空间的集合。在本文中, 用 $\text{rank}(A)$ 表示 A 的秩。用 I_s 表示 $s \times s$ 的单位矩阵。

2.1. 秩度量码

定义 2.1: 对于矩阵 $A, B \in \mathbb{F}_q^{m \times n}$, 定义它们的秩距离为:

$$d_R(A, B) = \text{rank}(A - B).$$

定义 2.2: 称 $C \in \mathbb{F}_q^{m \times n}$ 是一个 $[m \times n, k, \delta]_q$ -秩度量码, 若 C 是 $\mathbb{F}_q^{m \times n}$ 的一个 k 维 \mathbb{F}_q -线性子空间, 并且满足秩距离 $\geq \delta$, 对于参数为 $[m \times n, k, \delta]_q$ -秩度量码, 它的 Singleton-like 型上界为:

$$k \leq \max\{m, n\} \cdot (\min\{m, n\} - \delta + 1).$$

当等号成立时, 称 C 为最大秩度量码, 简记为 MRD 码。Delsarte [5] [10] 等人证明任意参数的 MRD 码都存在。

2.2. 费勒图秩度量码

定义 2.3: 对于给定的正整数 m 和 n , 一个 $m \times n$ 的费勒图 \mathcal{F} 是有 m 行 n 列的阶梯型点阵, 并且满足下列三个条件:

- 1) 所有的点居右对齐;
- 2) 每一行的点数不超过上一行的点数;
- 3) 最上方一行有 n 个点, 最右侧一列有个 m 点。

此外, 也可以用费勒图每一列点的数目来表示它。若 \mathcal{F} 中的第 i 列有 γ_i 个点, $0 \leq i \leq n-1$, 则 \mathcal{F} 可表示为 $\mathcal{F} = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}]$ 。特殊的, 若 $\gamma_i = m, i = 1, \dots, n-1$, 那么这样的费勒图称为一个方形费勒图。

例 2.4: 如图

$$\mathcal{F} = \begin{matrix} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathcal{F} = & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \\ & & & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet \end{matrix}$$

是一个 5×4 的费勒图，记为 $\mathcal{F} = [2, 3, 4, 5]$ 。

定义 2.5: 若 \mathcal{F} 是一个尺寸为 $m \times n$ 的费勒图。参数为 $[\mathcal{F}, k, \delta]_q$ -费勒图秩度量码是 $[m \times n, k, \delta]_q$ 秩距离码，且要求每个码字所有不在 \mathcal{F} 中的位置都用 0 填充。简记为 $[\mathcal{F}, k, \delta]_q$ 码。如果 \mathcal{F} 是一个包含 mn 个点的 $m \times n$ 图，那么它对应的费勒图秩度量码是一个经典的秩度量码。对于一个 $m \times n$ 的费勒图 \mathcal{F} ，如果存在一个 $[\mathcal{F}, k, \delta]_q$ 码，则也存在 $[\mathcal{F}', k, \delta]_q$ 码。

引理 2.6 (定理 1, [3]): 设 δ 是正整数， \mathcal{F} 是 $m \times n$ 的费勒图。若 \mathcal{C} 是一个参数为 $[\mathcal{F}, k, \delta]_q$ 的费勒图秩度量码，则有 $k \leq \min_{i \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}} \nu_i$ 成立，其中 ν_i 表示 \mathcal{F} 中除去最上方 i 行和最右侧 $\delta-1-i$ 列后所剩余的点的数目。

达到引理 2.6 中上界的费勒图秩度量码称为最优码。一些最优费勒图秩度量码的结果见文献[3] [6] [7] [11] [12] [13] [14] [15]。接下来介绍三个在多重构造中经常使用的定理。

定理 2.7 (定理 3.13, [13]): 设 δ, n 和 r 都是正整数，且满足 $r+1 \leq \delta \leq n-r$ 。 \mathcal{F} 是一个 $m \times n$ 的费勒图且满足下列条件:

- 1) $\gamma_{n-r-1} \leq n-r$;
- 2) $\gamma_{n-r+i} \geq n-r + \sum_{j=0}^i \gamma_j$, 当 $i \in [r]$;
- 3) $i \in [r]$, 当 $n-\delta+1 \leq i \leq n-1$ 。

那么对于任意的素数幂 q ，存在一个最优的 $[\mathcal{F}, \sum_{i=0}^{n-\delta} \gamma_i, \delta]_q$ 码。

特殊的，当 $r=0$ 时，结果仍然成立(在[12]中见定理 3)。

定理 2.8 [12]: 设 $\mathcal{F}_i (i=1, 2)$ 是 $m_i \times n_i$ 的费勒图， \mathcal{F}_3 是 $m_3 \times n_3$ 的充满 $m_3 n_3$ 个点的费勒图，其中， $m_3 \geq m_1, n_3 \geq n_2$ 。若

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_3 \\ & \mathcal{F}_2 \end{pmatrix}$$

是 $m \times n$ 的费勒图，且 $m = m_2 + m_3, n = n_1 + n_3$ 。如果存在 $[\mathcal{F}_i, k, \delta_i]_q$ 码 ($i=1, 2$)，则存在 $[\mathcal{F}, k, \delta_1 + \delta_2]_q$ 码。

定理 2.9 [3] [12]: 当 $\delta \in \{1, 2\}$ 时，对于任意的费勒图和素数幂 q ，存在最优的 $[\mathcal{F}, k, \delta]_q$ 码。其中， $k = \sum_{i=0}^{n-\delta} \gamma_i$ 。当 $\delta=3$ 时，对于任意的方形费勒图 \mathcal{F} 和素数幂 q ，存在最优的 $[\mathcal{F}, 3]_q$ 码。

2.3. 多重构造

多重构造法是由 Etzion 和 Silberstein [3]提出的构造常维码的重要方法。此方法主要依靠于标识向量的选取和最优费勒图秩度量码的构造。下面先来介绍多重构造中的一些相关知识。

对于 $U \in \mathcal{G}_q(n, k)$ ，可由一个 $k \times n$ 的基矩阵 U 表示。由于选取的基不同，对应的基矩阵 U 也就不同，所以其表示方法并不唯一。为使这个基矩阵唯一，给出行最简阶梯型矩阵的概念:

定义 2.10: 一个秩为 k 的 $k \times n$ 矩阵 U 是行最简阶梯型矩阵，若 U 满足:

- 1) 每行的首系数皆位于上一行首系数的右侧;
- 2) 所有的首系数皆为 1;
- 3) 每一个首系数是它所在列的唯一非零元素。

一般记为 $\nu(\mathbf{E}(U))$ 。

例 2.11: U 是 \mathbb{F}_2^7 上的一个 3 维量子空间, 如下:

(1110000), (1011000), (1001101), (1010011),
(0010101), (0001011), (0011110), (1000110)。

其中:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是子空间的一组基。则其对应的行最简阶梯型是

$$E(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}。$$

利用行最简阶梯形矩阵, 可以唯一的表示子空间。而通过标记行最简阶梯形矩阵每行首系数 1 的位置, 可以得到一个 n 长 k 重的二元向量, 称为标识向量。

定义 2.12: 行最简阶梯形矩阵 U 对应的标识向量是一个 n 长 k 重的二元向量, 且满足: 若 $\mathbf{E}(U)$ 中的 k 个首系数 1 所在的列标从左到右依次记为 a_1, \dots, a_k , 则此二元向量中的 k 个 1 分别位于第 a_1, \dots, a_k 位置, 其它 $n-k$ 个位置元素均为 0。记为 $\nu(\mathbf{E}(U))$, 或简记为 ν 。

综上所述, 一个线性空间对应唯一的行最简阶梯形矩阵, 也唯一对应一个标识向量。注意, 不同的行最简阶梯形矩阵可能对应同一个标识向量。为了刻画什么样的行最简阶梯形矩阵对应同一个标识向量, Etzion 等人提出了阶梯费勒形的概念。

定义 2.13: 长度为 n , 重量为 k 的标识向量 ν 的阶梯费勒形 $EF(\nu)$ 是 $k \times n$ 的行最简阶梯型矩阵, 其中标识向量 ν 的第 i 个 1 所在的位置(列标)即为 $EF(\nu)$ 的第 i 行首系数 1 所在的列标, 且首系数 1 所在的列的其他位置皆填充 0。每行首系数 1 所在位置右侧的剩余位置皆用 “•” 填充, 每行首系数 1 所在位置的左侧皆用 0 填充。

例 2.14: 考虑例 2.11 中 U 是 \mathbb{F}_2^7 上的一个 3 维量子空间, 它的标识向量 $\nu(U) = 1011000$ 。

标识向量 $\nu(U) = 1011000$ 对应的阶梯费勒形 $EF(\nu(U))$ 是下面 3×7 的矩阵:

$$EF(\nu(U)) = \begin{pmatrix} 1 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

引理 2.15 ([3] 引理 2): 设 $U, V \in \mathcal{G}_q(n, k)$, 其中 $U = \text{rowspace}(U), V = \text{rowspace}(V)$, 并且 $U, V \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ 是其对应的行最简阶梯形矩阵, 则 $d_S(U, V) \geq d_H(\nu(U), \nu(V))$ 。

引理 2.16 ([3] [4] 命题 1.2): 设 $U, V \in \mathcal{G}_q(n, k)$, 其中 $U = \text{rowspace}(U), V = \text{rowspace}(V)$, 并且 $U, V \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ 是其对应的行最简逆阶梯形矩阵, 则 $d_S(U, V) = 2d_R(C_U, C_V)$, 其中 C_U 和 C_V 表示 U 和 V 删除首系数 1 所在列后剩余的子阵。

以上两个引理将被运用到多重构造中:

构造 2.17 (多重构造法[3]): 若 \mathcal{A} 是一个长度为 n , 重量为 k , 最小汉明距离为 2δ 的二元常重汉明码。对于任意的 $\nu \in \mathcal{A}$, 记它的阶梯费勒形为 $EF(\nu)$ 。 $EF(\nu)$ 中所有的点构成了一个费勒图 \mathcal{F}_ν 。如果对于任意的 $\nu \in \mathcal{A}$, 存在 $[\mathcal{F}_\nu, k_\nu, \delta]_q$ 码 \mathcal{D}_ν , 那么由引理 2.15 和 2.16 可知 $\bigcup_{\nu \in \mathcal{A}} \mathcal{D}_\nu$ 中矩阵行空间的集合构成了一

个 $(n, 2\delta, k)_q$ -CDC。

3. 常维码的一些例子

尽管多重构造法在构造常维码的过程中起着重要作用,但仍有三个问题待解决。1) 子空间距离与汉明距离之间的精确关系; 2) 标识向量的最佳选择; 3) 费勒图秩度量码的最优性。在本节展示了比其它已知文献更精确的子空间距离和汉明距离之间的关系。给出了给定参数的一些常维码,其大小大于先前的码。

3.1. 引理

在引理 2.15 中,两个子空间的子空间距离可以通过相应标识向量的汉明距离来估计。在文献[4] [6] 中,通过将 \mathbb{F}_q 中的值分配给一些待定点,给出了子空间距离和汉明距离更加精确的刻画。

引理 3.1: 假设 v_1 和 v_2 是 $\mathcal{G}_q(n, k)$ 中的两个子空间对应的标识向量,并且 $d_H(v_1, v_2) = d$ 。假设 $\text{supp}(v_1) = \{u_1, \dots, u_k\}$, $\text{supp}(v_2) = \{v_1, \dots, v_k\}$, $u_{k+1} = v_{k+1} = n+1$ 并且 $\text{supp}(v_1) \cap \text{supp}(v_2) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_t$, $\mathcal{A}_i = \{a_i, a_i+1, \dots, a_i+s_i-1\}$, $1 \leq i \leq t$ 。令 $b_{j,i} = \left| \left\{ x : x \in \text{supp}(v_j), x \leq a_i + s_i - 1 \right\} \right|$, $j=1, 2$ 。固定 \mathbb{F}_q 中的一些值到 $EF(v_1)$ 和 $EF(v_2)$ 的一些点中并且将 \mathbb{F}_q 中的任意值分配给其它点,表示为 \mathcal{B}_{v_1} 和 \mathcal{B}_{v_2} 。则有 $d_S(\text{rowspan}(V_1), \text{rowspan}(V_2)) \geq d + 2l$ 。

其中 $V_1 \in \mathcal{B}_{v_1}, V_2 \in \mathcal{B}_{v_2}$ $0 \leq l \leq \sum_{i=1}^t \min \left\{ s_i, \min \left\{ u_{b_{1,i+1}} - u_{b_{1,i}}, v_{b_{2,i+1}} - v_{b_{2,i}} \right\} - 1 \right\}$ 。

证明: 一般情况下,规定 $0 \leq l \leq s_i$ 。阶梯费勒形 $EF(v_1)$ 和 $EF(v_2)$ 如下

$$EF(v_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|c} & & & 0 & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & & & & & & & \\ & \mathbf{A}_1 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \mathbf{A}_2 & & & \\ & & & 0 & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & & & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & I_{s_i} & & \mathcal{F}_1 & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \mathbf{A}_4 & & & \end{array} \right),$$

其中 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_4 是阶梯费勒形, \mathbf{A}_2 和 \mathbf{A}_3 中所有元素都是 0 或 \bullet , 并且 \mathcal{F}_1 是 $s_i \times (u_{b_{1,i+1}} - u_{b_{1,i}} - 1)$ 的方形费勒图。

$$EF(v_2) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|c} & & & 0 & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & & & & & & & \\ & \mathbf{B}_1 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \mathbf{B}_2 & & & \\ & & & 0 & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & & & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & I_{s_i} & & \mathcal{F}_2 & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \mathbf{B}_4 & & & \end{array} \right),$$

其中 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_4 是阶梯费勒形, \mathbf{B}_2 和 \mathbf{B}_3 中所有元素都是 0 或 \bullet , 并且 \mathcal{F}_2 是 $s_i \times (v_{b_{2,i+1}} - v_{b_{2,i}} - 1)$ 的方形费勒图。

对于阶梯费勒形为 $EF(v_1)$ 和 $EF(v_2)$ 的两类子空间,由引理 2.15 可知其子空间距离大于等于 d 。此

外, 利用待定点的思想[4], 用 \mathbb{F}_q 的值填充 $\mathcal{F}_i (i=1,2)$, 以此来增加 $\begin{pmatrix} EF(v_1) \\ EF(v_2) \end{pmatrix}$ 的秩, 从而使其对应的子空间距离, 大于等于 $d+2l$ 。具体做法如下:

通过对 \mathcal{F}_i 中左下角的一些点进行赋值, 使之存在满秩的尺寸为 $l \times l$ 的子矩阵 $(\overline{\mathcal{F}_2} - \overline{\mathcal{F}_1})$, 其中 $l \leq \min\{s_i, u_{b_{2,i+1}} - u_{b_{2,i}} - 1\}$, $i=1,2$ 。

令

$$\mathcal{B}_{v_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ & A_1 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & I_{s_i} & & \overline{\mathcal{F}_1} & & & A_3 \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{pmatrix} : \text{所有点都分配了 } \mathbb{F}_q \text{ 中的任意值} \right\},$$

$$\mathcal{B}_{v_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ & B_1 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & I_{s_i} & & \overline{\mathcal{F}_2} & & & B_3 \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{pmatrix} : \text{所有点都分配了 } \mathbb{F}_q \text{ 中的任意值} \right\}.$$

对于任意 $V_1 \in \mathcal{B}_{v_1}$ 和 $V_2 \in \mathcal{B}_{v_2}$, $d_S(\text{rowspan}(V_1), \text{rowspan}(V_2)) = 2 \times \text{rank} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} - 2k$ 。由于 $l \times l$ 子矩阵 $(\overline{\mathcal{F}_2} - \overline{\mathcal{F}_1})$ 的秩为 l , 则子空间距离: $d_S(\text{rowspan}(V_1), \text{rowspan}(V_2)) \geq 2 \times \left(k + \frac{d}{2} + l\right) - 2k = d + 2l$ 。

例 3.2: 假设 $v_1 = 11001010$ 和 $v_2 = 11000110$ 是 $\mathcal{G}_q(8,4)$ 中两个子空间所对应的标识向量, 并且 $d_H(v_1, v_2) = 2$ 。其中 $\text{supp}(v_1) = \{1, 2, 5, 7\}$, $\text{supp}(v_2) = \{1, 2, 6, 7\}$, $\text{supp}(v_1) \cap \text{supp}(v_2) = \{\{1, 2\}, \{7\}\}$, $t = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $s_1 = 2$, $s_2 = 1$, $b_{1,1} = |\{1, 2\}| = 2$, $b_{1,2} = |\{1, 2, 5, 7\}| = 4$, $b_{2,1} = |\{1, 2\}| = 2$, $b_{2,2} = |\{1, 2, 6, 7\}| = 4$ 。通过引理 3.1, 得到 $l \in \{0, 1, 2, 3\}$ 。

接下来给出 $l = 3$ 时, 阶梯费勒形 $EF(v_1)$ 和 $EF(v_2)$:

$$EF(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix}, \quad EF(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix}.$$

在(1, 3), (2, 3), (2, 4)和(4, 8)坐标位置设置, 如下所示

$$EF(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix},$$

$$EF(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

令

$$\mathcal{B}_{v_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & a_4 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_6 & 0 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}, \text{对任意的 } a_i \in \mathbb{F}_q, 1 \leq i \leq 7 \right\},$$

$$\mathcal{B}_{v_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & b_1 & b_2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} & b_4 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \text{对任意的 } b_j \in \mathbb{F}_q, 1 \leq j \leq 6 \right\}.$$

对于任意 $V_1 \in \mathcal{B}_{v_1}$ 和 $V_2 \in \mathcal{B}_{v_2}$ ，由子空间距离的定义得：

$$d_S(\text{rowspan}(V_1), \text{rowspan}(V_2)) = 2 \times \text{rank} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} - 2 \times 4$$

$$= 2 \times \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & a_4 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_6 & 0 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{1} & b_1 & b_2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} & b_4 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} - 8$$

$$= 2 \times \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & a_4 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & b_1 - a_1 & b_2 & -a_2 & 0 & b_3 - a_3 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & b_4 & -a_4 & 0 & b_5 - a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_6 & 0 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} - 8 = 8$$

3.2. 常维码的示例

虽然字典序是标识向量比较好的选择, 但非最优选择。在本部分中, 将引理 3.1 应用于以下示例的常维码, 并给出了新的下界, 该下界大于文献[7]中已知的下界。

n	k	2δ	旧下界	新下界
14	4	6	$q^{20} + q^{14} + q^{10} + q^9 + q^8 + 2(q^6 + q^5 + q^4) + q^3 + q^2$	$q^{20} + q^{14} + q^{10} + q^9 + 2q^8 + q^7 + 2(q^6 + q^5 + q^4)$

命题 3.3: $A_q(14, 6, 4) \geq q^{20} + q^{14} + q^{10} + q^9 + 2q^8 + q^7 + 2(q^6 + q^5 + q^4)$ 。

证明: 标识向量选择如下:

1) 选择第一个标识向量 $v_0 = 11110000000000$, 对应的阶梯费勒形可以用大小为 q^{20} 的秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

2) 选择第二个标识向量 $v_1 = 10001110000000$, $d_H(v_1, v_0) = 6$ 。方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_1)$, 可以用大小为 q^{14} 的秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \bullet & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

3) ①选择第三个标识向量 $v_2 = 10001001100000$, $d_H(v_2, v_0) = 6$, $d_H(v_2, v_1) = 4$ 。对于 v_2 和 v_1 , $\text{supp}(v_2) = \{1, 5, 8, 9\}$, $\text{supp}(v_1) = \{1, 5, 6, 7\}$, $\text{supp}(v_2) \cap \text{supp}(v_1) = \{\{1\}, \{5\}\}$ 。根据引理 3.1, 有 $t = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $s_1 = s_2 = 1$, $b_{1,1} = |\{x \in \text{supp}(v_1), x \leq 1\}| = |\{1\}| = 1$, $b_{1,2} = |\{x \in \text{supp}(v_1), x \leq 5\}| = |\{1, 5\}| = 2$, $b_{2,1} = |\{x \in \text{supp}(v_2), x \leq 1\}| = |\{1\}| = 1$, $b_{2,2} = |\{x \in \text{supp}(v_2), x \leq 5\}| = |\{1, 5\}| = 2$ 。则 $l \leq 1$ 。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_2)$, 并且 $l = 1$ 。

③ $EF(v_2)$ 可以用大小为 q^{10} 的秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

4) ①选择第四个标识向量 $v_3 = 01001001010000$, $d_H(v_3, v_1) = 6$, $i = 0, 1$, $d_H(v_3, v_2) = 4$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_3)$ 。

③ $EF(v_3)$ 可以用大小为 q^9 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

5) ①选择第五个标识向量 $v_4 = 00101000110000$ 。 $d_H(v_4, v_i) = 6$, $i = 0, 1$ 。 $d_H(v_4, v_j) = 4$, $j = 2, 3$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_4)$ 。

③ $EF(v_4)$ 可以用大小为 q^8 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

6) ①选择第六个标识向量 $v_5 = 10000101001000$ 。 $d_H(v_5, v_i) = 6$, $i = 0, 3$ 。 $d_H(v_5, v_j) = 4$, $j = 1, 2$ 。 $d_H(v_5, v_4) = 8$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_5)$ 。

③ $EF(v_5)$ 可以用大小为 q^8 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

7) ①选择第七个标识向量 $v_6 = 10000010101000$ 。 $d_H(v_6, v_i) = 6$, $i = 0, 4$ 。 $d_H(v_6, v_j) = 4$, $j = 1, 2, 5$ 。 $d_H(v_6, v_3) = 8$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_6)$ 。

③ $EF(v_6)$ 可以用大小为 q^7 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

8) ①选择第八个标识向量 $v_7 = 00010010011000$ 。 $d_H(v_7, v_i) = 6$, $i = 0, 1, 3, 4, 5$ 。 $d_H(v_7, v_2) = 8$ 。 $d_H(v_7, v_6) = 4$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_7)$ 。

③ $EF(v_7)$ 可以用大小为 q^6 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}。$$

9) ①选择第九个标识向量 $v_8 = 10000100100100$ 。 $d_H(v_8, v_i) = 6$, $i = 0, 4$ 。 $d_H(v_8, v_j) = 4$, $j = 1, 2, 5, 6$ 。 $d_H(v_8, v_z) = 8$, $z = 3, 7$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_8)$ 。

③ $EF(v_8)$ 可以用大小为 q^6 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

10) ①选择第十个标识向量 $v_9 = 01000010010100$ 。 $d_H(v_9, v_i) = 6$, $i = 0, 1, 4, 6, 8$ 。 $d_H(v_9, v_j) = 8$, $j = 2, 5$ 。 $d_H(v_9, v_z) = 4$, $z = 3, 7$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_9)$ 。

③ $EF(v_9)$ 可以用大小为 q^5 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

11) ①选择第十一个标识向量 $v_{10} = 01001000100010$ 。 $d_H(v_{10}, v_i) = 6$, $i = 0, 1, 6, 8, 9$ 。但是 $d_H(v_{10}, v_j) = 4$, $j = 2, 3, 4$ 。 $d_H(v_{10}, v_z) = 8$, $z = 5, 7$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_{10})$ 。

③ $EF(v_{10})$ 可以用大小为 q^5 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix}.$$

12) ①选择第十二个标识向量 $v_{11} = 01000100100001$ 。 $d_H(v_{11}, v_i) = 6$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$ 。 $d_H(v_{11}, v_7) = 8$ 。 $d_H(v_{11}, v_z) = 4$, $z = 8, 10$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_{11})$ 。

③ $EF(v_{11})$ 可以用大小为 q^4 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13) ①选择第十三个标识向量 $v_{12} = 01000100010010$ 。 $d_H(v_{12}, v_i) = 6$, $i = 0, 1, 4, 5, 7, 8$ 。 $d_H(v_{12}, v_j) = 8$, $j = 2, 6$ 。 $d_H(v_{12}, v_z) = 4$, $z = 3, 9, 10, 11$ 。类似于(3), 运用引理 3.1。

②方框中的待定点填充后为相应的 $EF(v_{12})$ 。

③ $EF(v_{12})$ 可以用大小为 q^4 , 秩距离为 3 的费勒图秩度量码填充。即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix}.$$

(注: 上述任意两个标识向量的汉明距离见表 1)

Table 1. The hamming distance of any two identifying vectors in proposition 3.3
表 1. 命题 3.3 任意两个标识向量的汉明距离

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_0	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
v_1		4	6	6	4	4	6	4	6	6	6	6
v_2			4	4	4	4	8	4	8	4	6	8
v_3				4	6	8	6	8	4	4	6	4
v_4					8	6	6	6	6	4	6	6
v_5						4	6	4	8	8	6	6
v_6							4	4	6	6	6	8
v_7								8	4	8	8	6
v_8									6	6	4	6
v_9										6	6	4
v_{10}											4	4
v_{11}												4

因此构造了一个 $(14, q^{20} + q^{14} + q^{10} + q^9 + 2q^8 + q^7 + 2(q^6 + q^5 + q^4), 6, 4)_q$ 的常维码。

由命题 3.3 寻找标识向量的方法, 可将其归结成如下搜索标识向量的理论算法, 但此算法在实际运用中, 仍有较大局限性。

对于任意 $u \in \mathbb{F}_2^n$, \mathcal{F}_u 表示对应于 $EF(u)$ 的费勒图, \mathcal{F}'_u 表示删除待定点后的 \mathcal{F}_u , $\overline{\mathcal{B}}_u$ 表示最大 $[\mathcal{F}'_u, \delta]_q$ 码填充的 $EF(u)$ 的集合。

设 $U_{1,\Omega} = \{u \in V \setminus \Omega : d_H(u, v), \text{对于任意的 } v \in \Omega\}$ 且 $U_{2,\Omega} = \{u \in V \setminus (\Omega \cup U_{1,\Omega})$ 根据引理 3.1, 满足 $d_s(\text{rowspace}(V_1), \text{rowspace}(V_2)) \geq d, U \in \overline{\mathcal{B}}_u, V \in \overline{\mathcal{B}}_v, \text{对于任意的 } v \in \Omega\}$ 让 $u_{i,\max}$ 表示对应于 $\{\dim(\mathcal{F}'_u, \delta) : u \in U_{i,\Omega}\}$, $i = 1, 2$ 中最大值的向量。如果最大值大于 1, 则选择任意一个。设 $v_0 = \underbrace{1 \cdots 1}_k \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k}$ 且 $V = \{v \in \mathbb{F}_2^n : v \text{ 的重量为 } k\}$ 。

4. 结束语

本文主要通过固定一些待定点的方法进一步刻画子空间距离与汉明距离的关系, 并在此基础上提升了 $(14, 6, 4)_q$ -常维码的下界。尽管此下界是目前最好的下界, 但非最优的。如何更好地选取标识向量构造最优或几乎最优的常维码, 仍是一个公开的问题。

基金项目

江苏省大学生创新创业项目(202210332117Y)。

参考文献

- [1] Kötter, R. and Kschischang, F.R. (2008) Coding for Errors and Erasures in Random Network Coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, **54**, 3579-3591. <https://doi.org/10.1109/TIT.2008.926449>
- [2] Etzion, T. and Vardy, A. (2011) Error-Correcting Codes in Projective Spaces. *IEEE Transactions on Information Theory*, **57**, 1165-1173. <https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2095232>

-
- [3] Etzion, T. and Silberstein, N. (2009) Error-Correcting Codes in Projective Spaces via Rank-Metric Codes and Ferrers Diagrams. *IEEE Transactions on Information Theory*, **55**, 2909-2919. <https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2021376>
- [4] Trautmann, A.-L. and Rosenthal, J. (2010) New Improvements on the Echelon-Ferrers Construction. *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS*, Budapest, July 2010, 405-408.
- [5] Etzion, T. and Silberstein, N. (2013) Codes and Designs Related to Lifted MRD Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **59**, 1004-1017. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2220119>
- [6] Silberstein, N. and Trautmann, A.-L. (2015) Subspace Codes Based on Graph Matchings, Ferrers Diagrams, and Pending Blocks. *IEEE Transactions on Information Theory*, **61**, 3937-3953. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2435743>
- [7] Gorla, E. and Ravagnani, A. (2017) Subspace Codes from Ferrers Diagrams. *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**, Article ID: 1750131. <https://doi.org/10.1142/S0219498817501316>
- [8] Liu, S., Chang, Y. and Feng, T. (2020) Parallel Multilevel Constructions for Constant Dimension Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **66**, 6884-6897. <https://doi.org/10.1109/TIT.2020.3004315>
- [9] Yu, S., Ji, L. and Liu, S. (2022) Bilateral Multilevel Construction of Constant Dimension Codes. *Advances in Mathematics of Communications*, **16**, 1165-1183. <https://doi.org/10.3934/amc.2022056>
- [10] Liu, S. and Ji, L. (2023) Double Multilevel Constructions for Constant Dimension Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **69**, 157-168. <https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3200052>
- [11] Antrobus, J. and Gluesing-Luerssen, H. (2019) Maximal Ferrers Diagram Codes: Constructions and Genericity Considerations. *IEEE Transactions on Information Theory*, **65**, 6204-6223. <https://doi.org/10.1109/TIT.2019.2926256>
- [12] Etzion, T., Gorla, E., Ravagnani, A. and Wachter-Zeh, A. (2016) Optimal Ferrers Diagram Rank-Metric Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**, 1616-1630. <https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2522971>
- [13] Liu, S., Chang, Y. and Feng, T. (2019) Constructions for Optimal Ferrers Diagram Rank-Metric Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **65**, 4115-4130. <https://doi.org/10.1109/TIT.2019.2894401>
- [14] Liu, S., Chang, Y. and Feng, T. (2019) Several Classes of Optimal Ferrers Diagram Rank-Metric Codes. *Linear Algebra and Its Applications*, **581**, 128-144. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.07.011>
- [15] Zhang, T. and Ge, G. (2019) Constructions of Optimal Ferrers Diagram Rank Metric Codes. *Designs, Codes and Cryptography*, **87**, 107-121. <https://doi.org/10.1007/s10623-018-0491-4>