Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2138-2142
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125217

函数$k(u)=|\sin u|+a$所确定的Wulff形

周小静，蓝一涵

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年4月11日；录用日期：2023年5月6日；发布日期：2023年5月12日

摘 要

凸体是积分几何和凸几何分析的重要内容，Wulff形作为一类特殊凸体，具有一定研究价值。利用凸体的支持函数与函数性质，研究函数$k(u)=|\sin u|+a$所确定的Wulff形，给出Wulff形的周长和面积的计算公式。

关键词

支持函数，正连续函数，Wulff形

Wulff Shape Determined by the Function $k(u)=|\sin u|+a$

Xiaojing Zhou, Yihan Lan

Department of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Apr. 11th, 2023; accepted: May 6th, 2023; published: May 12th, 2023

Abstract

Convex body is an important part of integral geometry and convex geometry analysis. As a special convex body, Wulff shape has certain research value. By using the support functions of convex bodies and function properties, this paper discusses the Wulff shape determined by the function $k(u)=|\sin u|+a$, given the formula for calculating the perimeter and area of the Wulff shape.

Keywords

Support Function, Positive Continuous Function, Wulff Shape

文章引用: 周小静, 蓝一涵. 函数$k(u)=|\sin u|+a$所确定的 Wulff 形[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2138-2142.
DOI: 10.12677/aam.2023.125217

1. 引言与主要结果

积分几何和凸几何分析研究领域涉及广泛，在计算机软件和力学等方面也有广泛应用，凸体是积分几何和凸几何分析学科中的重要研究对象，Wulff 形作为特殊凸体值得我们进一步研究。

记 R^n 为 $n(n\geq 2)$ 维欧氏平面，S^{n-1} 为 R^n 中单位球面，S^1 为 R^2 中单位圆周。设 K 为 R^2 中点集，如果对任意两点 $x,y\in K$，$0\leq\lambda\leq 1$，都有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in K$，则称 K 为凸集。具有非空内点的紧凸集称为凸体。

若 K 为 R^2 中的凸体，由文献[1]得出其支持函数 $h_K(u)$ 的定义为：

$$h_K(u)=\sup\{p:G(p,u)\cap K\neq\varnothing\},$$

其中 p 是平面直角坐标系 xOy 原点 o 到直线 $G(p,u)$ 的距离，u 是 ox 轴与过原点又垂直于 G 的射线的夹角，且直线 $G(p,u)$ 的广义法式方程为：

$$G(p,u):x\cos u+y\sin u-p=0,$$

其中 (x,y) 是直线 $G(p,u)$ 上点的坐标。

给出二维欧氏平面 R^2 上一个单参数直线族

$$\{C_\alpha\}:F(x,y,\alpha)=0, \tag{1}$$

其中 α 是参数。当 α 的值变化时，得到族中不同的直线 C_α，并且假定函数 $F(x,y,\alpha)$ 具有一阶与二阶连续偏导数，则有直线族 $\{C_\alpha\}$ 的包络 C 满足方程组

$$\begin{cases}F(x,y,\alpha)=0,\\ F_\alpha(x,y,\alpha)=0.\end{cases} \tag{2}$$

关于包络更详细的定义，参见文献[2]。

引理 1 设曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$$

给出，在 $[\alpha,\beta]$ 上 $y(t)$ 连续，$x(t)$ 连续可微且 $x'(t)\neq 0$ （对于 $y(t)$ 连续可微且 $y'(t)\neq 0$ 的情形可类似地讨论)。记 $a=x(\alpha),b=x(\beta)$ （$a<b$ 或 $b<a$），则由曲线 C 及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的图形，其面积计算公式为

$$A=\int_\alpha^\beta\left|y(t)x'(t)\right|\mathrm{d}t. \tag{3}$$

假设函数 $k_t(u)=k(t,u):I\times S^{n-1}\to(0,\infty)$ 是严格正连续函数，区间 $I\subset R$，则对给定的 $t\in I$，称

$$K_t=\bigcap_{u\in S^{n-1}}\left\{x\in R^n:x\cdot u\leq k(t,u)\right\}$$

是关于函数 $k_t(u)$ 的 Wulff 形，且 Wulff 形是凸体[3]。

关于 Wulff 形的研究已有一些成果。Yi Jun He [4]借助高斯映射等刻画了 Wulff 形的新特征；Ai-Jun Li [5]研究了 Wulff 形及其极线的截面和投影的体积不等式；Huhe Han [6]研究了 Wulff 形和某类凸积分。本

文研究对象与其他不同的是选定了一类严格正的特殊连续函数，研究对应 Wulff 形的形状、周长和面积等。

因函数 $k_t(u)$ 中的 t 对此处的研究无影响，于是记函数 $k_t(u)$ 为 $k(u)$，记 Wulff 形 K_t 为 K，其面积记为 S_K，周长记为 L_K。

在 R^2 上，函数 $k(u): S^1 \to (0,\infty)$。取 $k(u)=|\sin u|+a$，实数 $a>0$，显然 $k(u)$ 是严格正的连续函数，所以由它可以确定一个 Wulff 形。本文研究了函数 $k(u)=|\sin u|+a$ 所确定的 Wulff 形的相关问题，得到如下主要结果：

定理 1 若函数 $k(u)=|\sin u|+a$，且实数 $a>0$，则该函数所确定的 Wulff 形是操场域，它的两段圆弧分别以点 $(0,1)$ 和点 $(0,-1)$ 为圆心，以 a 为半径。

2. 定理的证明

定理 1 的证明 给定函数 $k(u)=|\sin u|+a(a>0)$，因为它在定义域区间 $u\in[0,2\pi]$ 上不可导，所以不能直接在 $[0,2\pi]$ 上通过求导来讨论，又因为不可导的点只有 $u=\pi$，于是可将定义域分为 $u\in[0,\pi]$ 和 $u\in[\pi,2\pi]$ 两个部分进行考虑。

在区间 $u\in[0,\pi]$ 上，$|\sin u|=\sin u$，根据直线 $G(k(u),u)$ 的方程是 $x\cos u+y\sin u-k(u)=0$，得到直线族 $\{C_u\}$ 的方程为：

$$\{C_u\}: x\cos u+y\sin u-\sin u-a=0,$$

其中 $u\in[0,\pi]$ 是参数。代入方程组(2) $\begin{cases}F(x,y,u)=0,\\ F_u(x,y,u)=0,\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}x\cos u+y\sin u-\sin u-a=0,\\ -x\sin u+y\cos u-\cos u=0,\end{cases} \tag{4}$$

根据上式解得

$$x=a\cos u,\quad y=a\sin u+1,$$

进而有

$$x^2+(y-1)^2=a^2,$$

它表示以 $(0,1)$ 为圆心，以 a 为半径的圆，此圆上的点并不都是 Wulff 形边界上的点，因为还要考虑 $u\in[0,\pi]$ 这一限制。在区间 $[0,\pi]$ 上，当 $u=0$ 时，$x=a$，$y=1$；当 $u=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=1+a$；当 $u=\pi$ 时，$x=-a$，$y=1$，Wulff 形边界的轨迹是连续的，当 u 从 0 到 π 变化时，满足(4)式的点刚好是以 $(0,1)$ 为圆心，以 a 为半径的圆的上半圆弧，它参与构成 Wulff 形的边界。

同理考虑区间 $u\in[\pi,2\pi]$，因为 $|\sin u|=-\sin u$，又根据直线 $G(k(u),u)$ 的方程是 $x\cos u+y\sin u-k(u)=0$，得到直线族 $\{C_u\}$ 的方程为：

$$\{C_u\}: x\cos u+y\sin u+\sin u-a=0,$$

其中 $u\in[\pi,2\pi]$ 是参数。代入方程组(2) $\begin{cases}F(x,y,u)=0,\\ F_u(x,y,u)=0,\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}x\cos u+y\sin u+\sin u-a=0,\\ -x\sin u+y\cos u+\cos u=0,\end{cases} \tag{5}$$

根据上式解得

$$x = a\cos u,\ \ y = -1 + a\sin u,$$

进而有

$$x^2 + (y+1)^2 = a^2,$$

它表示以$(0,-1)$为圆心，以a为半径的圆。在讨论的区间$[\pi,2\pi]$上，当$u=\pi$时，$x=-a$，$y=-1$；当$u=\frac{3\pi}{2}$时，$x=0$，$y=-1-a$；当$u=2\pi$时，$x=a$，$y=-1$，Wulff 形边界的轨迹是连续的，所以只有下半圆弧参与构成 Wulff 形的边界。

再考虑区间端点$u=0,\pi,2\pi$。当$u=0$时，直线$G(k(0),0)$的方程是$x=a$；当$u=\pi$时，直线$G(k(\pi),\pi)$的方程是$x=-a$；当$u=2\pi$时，直线$G(k(2\pi),2\pi)$的方程是$x=a$，结合 Wulff 形的定义分析可以知道，直线$x=-a$和直线$x=a$与前面得到的两个半圆弧构成的闭合凸体就是函数$k(u)=|\sin u|+a$所确定的 Wulff 形，是一个操场域，它的两段圆弧分别以点$(0,1)$和点$(0,-1)$为圆心，以a为半径。

推论 1 若函数$k(u)=|\sin u|+a\,(a>0)$，K是$k(u)$所确定的 Wulff 形，则K的周长$L_K=2a\pi+4$，K的面积$S_K=a^2\pi+4a$。

证明 因为函数$k(u)=|\sin u|+a\,(a>0)$所确定的 Wulff 形是由两个半圆和一个矩形组成的操场域，所以通过简单计算容易得到它的面积$S_K=a^2\pi+4a$，周长$L_K=2a\pi+4$。

此外，也可以应用公式(3)计算函数$k(u)=|\sin u|+a$所确定的 Wulff 形的面积，有

$$\begin{aligned} S_K &= \int_0^{\pi}\left|a^2\sin^2 u + a\sin u\right|\mathrm{d}u + \int_{\pi}^{2\pi}\left|a^2\sin^2 u - a\sin u\right|\mathrm{d}u \\ &= 2\left(\frac{\pi a^2}{2} + 2a\right) = \pi a^2 + 4a. \end{aligned}$$

具体取函数$k(u)=|\sin u|+3$得到图 1 如下，在函数$k(u)=|\sin u|+a$中将参数a取为其他值，得到图 2 如下：

图 1 中所示 Wulff 形的面积为：

$$S_K = 3^2\times\pi + 4\times 3 = 12 + 9\pi.$$

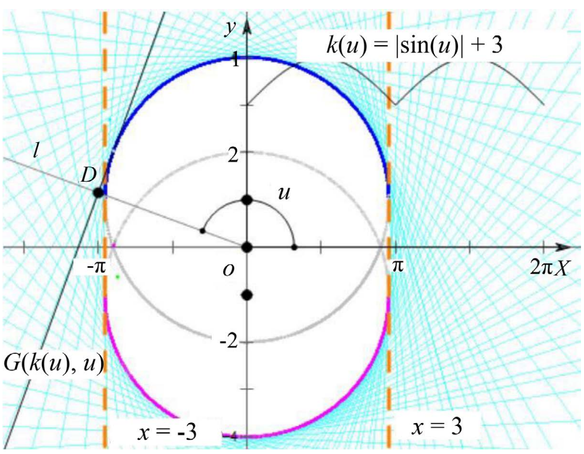

Figure 1. The Wulff shape determined by the function $k(u)=|\sin u|+3$

图 1. 函数$k(u)=|\sin u|+3$所确定的 Wulff 形

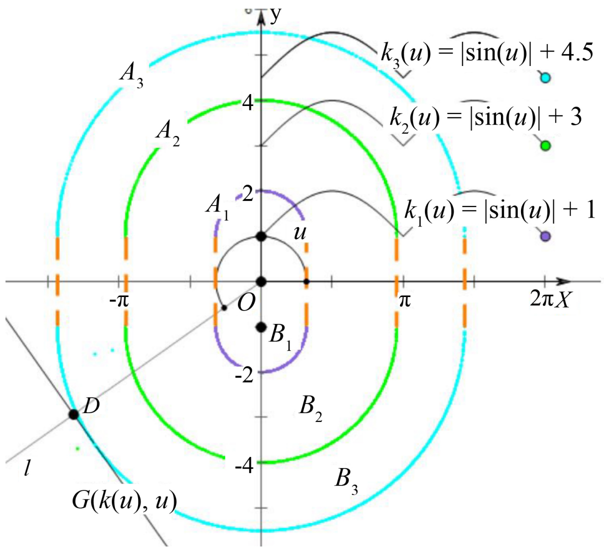

Figure 2. The Wulff shape determined by the function $k(u)=|\sin u|+a\ (a=1,3,4,5)$

图 2. 函数 $k(u)=|\sin u|+a\ (a=1,3,4,5)$ 所确定的 Wulff 形

关于函数 $k(u)=a|\sin bu|+c$ 所确定的 Wulff 形是后续的研究内容。基于上述结论，可研究函数 $k(u)=|\cos u|+a\,(a>0)$ 所确定的 Wulff 形及其相关性质。

参考文献

[1] 任德麟. 积分几何引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.

[2] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[3] Böröczky, K.J., Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G.Y. (2012) The Log-Brunn-Minkowski Inequality. *Advances in Mathematics*, **231**, 1974-1997. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.07.015

[4] He, Y.J. and Li, H.Z. (2008) Integral Formula of Minkowski Type and New Characterization of the Wulff Shape. *Acta Mathematica Sinica* (*English Series*), **24**, 697-704. https://doi.org/10.1007/s10114-007-7116-6

[5] Li, A.J., Huang, Q.Z. and Xi, D.M. (2017) Volume Inequalities for Sections and Projections of Wulff Shapes and Their Polars. *Advances in Applied Mathematics*, **91**, 76-97. https://doi.org/10.1016/j.aam.2017.05.010

[6] Han, H.H. and Nishimura, T. (2017) Strictly Convex Wulff Shapes and C^1 Convex Integrands. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 3997-4008. https://doi.org/10.1090/proc/13510