Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(5), 2187-2192**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125223

Hans汉斯

微元法的一个理解与思考

梁东颖[1]**，晁绵涛**[2*]

[1]广西交通职业技术学院基础部，广西 南宁
[2]广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁

收稿日期：2023年4月17日；录用日期：2023年5月9日；发布日期：2023年5月19日

摘 要

微元法是分析、解决实际问题的常用方法，也是从部分到整体的思维方法。微元法是一类常用的数学建模方法。本文从微积分的角度出发，给出一个微元法的理解。分析了微元法的难点与关键点。为克服难点，本文提出了从量的定义导出微元法的观点，给出了一个基于量的定义的微元法。该观点可以帮助理解和简化微元法在实际问题中的应用。通过两个定理初步解释了微元法的数学原理。最后通过两个例子，展示了从量的定义导出微元法的优点。

关键词

微元法，定积分，牛顿莱布尼茨公式

An Understanding and Consideration of Differential Element Method

Dongying Liang[1]**, Miantao Chao**[2*]

[1]Department of Basic, Guangxi Vocational and Technical College of Communications, Nanning Guangxi
[2]College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi

Received: Apr. 17th, 2023; accepted: May 9th, 2023; published: May 19th, 2023

Abstract

Differential element method, widely used in mathematical modeling, is a common method for analyzing and solving practical problems. The main idea of the method is to divide the research object into infinitely many small parts, extract the representative parts for analysis and processing, and then consider it comprehensively from parts to the whole. Firstly, the paper provides an un-

*通讯作者。

文章引用: 梁东颖, 晁绵涛. 微元法的一个理解与思考[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2187-2192.
DOI: 10.12677/aam.2023.125223

derstanding of the differential element method in the view of calculus and analyzes the key and difficult points of learning this method. In order to overcome the difficult points, the paper derives the differential element method from the definition of quantity, which can help us to understand and simplify the application of the method in practical problems. Then we preliminarily explain the mathematical principles of the method through two main theorems. Finally, the paper presents two examples to demonstrate the advantages of deriving the differential element method from the definition of quantities.

Keywords

Differential Element Method, Definite Integral, Newton Leibniz Formula

1. 引言

微元法的一般步骤：第一步，找所求量增量的一个近似可求量；第二步，将近似可求量表达成为某个函数与自变量增量的高阶无穷小之和；第三步，对第二步的函数取定积分[1] [2] [3]。两个自然的问题：每一步的目的是什么？以及为什么这样所得定积分的值就是所求的量？如果这两个问题不能解答清楚，在解决实际问题过程中往往不知道每一步该怎么做，特别是，如何找第一步中的近似可求量。为解决这些疑惑，本文就从以下几个方面展开论述：第一，微元法的理解与导出；第二，微元法的关键点与难点及其处理方法；第三，从量的定义导出微元法的优点。

本文余下章节主要内容如下：第二节，利用牛顿莱布尼茨公式给出了微元法的一个解释，并给出了微元法的一个新的表述形式。第三节，为了克服微元法在实际应用中的难点提出了从量的定义到处微元法的观点，并提出了一个基于量的定义的微元法。通过两个定理初步解释了量的定义导出微元法的数学原理。第四节，通过两个例题，展示了从量的定义导出微元法的优点。

2. 微元法的导出及理解

应用定积分求解某个分布在$[a,b]$上的量Φ时，其过程是“分割、近似求和、取极限”，利用定积分的定义可得到

$$\Phi = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

上式表明：如果求出被积函数$f(x)$，就可以求出量Φ。那么，有没有办法直接求出被积函数$f(x)$呢？我们来看一下$f(x)$与量$\Phi'(x)$的关系。

对任意的$x\in[a,b]$，分布在$[a,x]$上的量记为$\Phi(x)$，则$\Phi(x)$是定义在$[a,b]$上的函数。显然，$\Phi(a)=0$，$\Phi(b)$是所求的量。如果能求出函数$\Phi(x)$的导函数$\Phi'(x)$且$\Phi'(x)$连续，则由牛顿莱布尼茨公式可得所求量

$$\Phi(b)=\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b \Phi'(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

对比(1)与(2)知，此处$\Phi'(x)$相当于(1)中的$f(x)$。这告诉我们只需求出$\Phi(x)$的导函数$\Phi'(x)$问题就解决了。当前面临的问题是：在$\Phi(x)$的表达式及函数值都不知道的前提下，如何求出其导函数？由导函数的定义知道

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$$

其中 $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$。虽然 $\Delta\Phi$ 不知道，但如果能给出其近似可求量 $\Delta'\Phi$，使得 $\Delta\Phi=\Delta'\Phi+o(\Delta x)$，则

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta'\Phi+o(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta'\Phi}{\Delta x}=f(x)$$

至此，我们发现上面的分析提供了一个求解分布在 $[a,b]$ 上的量 Φ 的方法：通过选取 $[x,x+\Delta x]$ 上的增量 $\Delta\Phi$ 的近似可求量 $\Delta'\Phi$，进而求出 $\Phi'(x)$ 即 $\mathrm{d}\Phi=f(x)\mathrm{d}x$ (微元)，最后得到所求量 $\Phi=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。这个方法称为微元法。$\Delta'\Phi$ 是增量 $\Delta\Phi$ 的近似可求量，与增量 $\Delta\Phi$ 或 $\Delta'\Phi$ 相关的变量有 x，Δx。我们不妨设 $\Delta'\Phi=h(x,\xi,\Delta x)$，$\xi\in[x,x+\Delta x]$，则求分布在 $[a,b]$ 上的量 Φ 的微元法可描述如下：

微元法 A：

Step1. 在 $[x,x+\Delta x]\subset[a,b]$ 上取 Φ 的增量 $\Delta\Phi$ 的近似可求量

$$\Delta'\Phi=h(x,\xi,\Delta x),\quad \xi\in[x,x+\Delta x]$$

(使得 $\Delta\Phi=\Delta'\Phi+o(\Delta x)$)。

Step 2. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta'\Phi}{\Delta x}=f(x)$，记 $\mathrm{d}\Phi=f(x)\mathrm{d}x$。

Step 3. $\Phi=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

注. 微元法求某个量与定积分定义求某个量的区别：定积分的定义求量是采用“分割、近似求和、取极限”的过程导出定积分进而求出所求量。微元法是直接找出定积分的被积函数，进而通过求解定积分得到所求量。

3. 微元法的关键点与难点及其处理方法

微元法的关键点与难点是：如何选取 $\Delta\Phi$ 的近似可求量 $\Delta'\Phi$，使得 $\Delta\Phi=\Delta'\Phi+o(\Delta x)$？

为了克服微元法应用的难点，我们提出从量的定义导出微元法的观点，即从所求量 Φ 的定义确定 $\Delta'\Phi$。

首先，我们要明确每个量都有定义，如教材上给出的非闭曲线弧长的定义、三维空间立体的体积定义等。量定义的一般形式如下：

定义设物体 O 介于 $[a,b]$ 之间，$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为区间 $[a,b]$ 上的任意分割。若 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta'\Phi_i=A$ (其中 $\Delta'\Phi_i$ 为对应于 $[x_{i-1},x_i]$ 的某一个可计算量，$\|T\|=\max\{|x_i-x_{i-1}|\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$)，则极限 A 定义为对象 O 的量 Φ。

有了量的定义，我们如何求量呢？$\Delta\Phi$ 的近似可求量 $\Delta'\Phi$ 可以按照定义中的 $\Delta'\Phi_i$ 进行选取。基于此微元法可如下表述(称为微元法 B)

微元法 B：

1. 根据量的定义，写出 $[x,x+\Delta x]$ 上 Φ 的增量 $\Delta\Phi$ 的近似可求量

$$\Delta'\Phi=h(x,\xi,\Delta x),\quad \xi\in[x,x+\Delta x]。$$

2. 求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta'\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x}=f(x)。$$

3. 求积分得量 $\Phi=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

从量的定义出发的导出的微元法 B 具有如下的优点：

1) 无需记公式，只需了解定义即可；

2) 便于实际应用：因为实际所求的量都有定义，即在实际应用中 $\Delta'\Phi$ 的选取方式已经给出。

由量的定义导出的微元法 B，如果定义中 $\Delta\Phi = \Delta'\Phi + o(\Delta x)$，则可像微元法 A 一样解释其数学原理。也可以尝试直接从量的定义出发给出微元法 B 的数学原理，即证明定积分恰好等于所求量。为便于理解，我们尝试给出如下两个结果：

定理 1 设 $\Delta'\Phi = h(x,\xi,\Delta x)$。若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta'\Phi}{\Delta x} = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，在任意区间 $[x,x+\Delta x]\subset[a,b]$ 有 $m\Delta t \le \Delta'\Phi \le M\Delta t$，其中 M，m 分别是 $f(x)$ 在区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的上下确界。则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}t = \lim_{\|T\|\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^n \Delta'\Phi_i .$$

证明：对 $[a,b]$ 的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，有

$$m_i\Delta x_i \le \Delta'\Phi_i \le M_i\Delta x_i ,$$

其中 $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$，$M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$。所以

$$\sum\nolimits_{i=1}^n m_i\Delta x_i \le \sum\nolimits_{i=1}^n \Delta'\Phi_i \le \sum\nolimits_{i=1}^n M_i\Delta x_i \tag{1}$$

令 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_{i-1}-x_i|$，记 $s = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^n m_i\Delta t_i$，$S = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^n M_i\Delta t_i$。因 $f(t)$ 上可积，所以 $S = s$。对(1)式两边取极限，有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\|T\|\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^n \Delta'\Phi_i .$$

证毕。

为了进一步认识微元法，我们给出下面的定义。

定义 2 若对 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，使得当 $|\Delta x| < \delta$ 时就有 $\left|\dfrac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x} - f(x)\right| < \varepsilon$，$\forall x\in[a,b]$，则称 $\dfrac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，记作

$$\frac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x} \rightrightarrows f(x)(\Delta x\to 0), \forall x\in[a,b]。$$

定理 2 若 $\dfrac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x} \rightrightarrows f(x)(\Delta x\to 0)$，$\forall x\in[a,b]$ 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^n \Delta'\Phi_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

证明：由于 $\dfrac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x} \rightrightarrows f(x)(\Delta x\to 0)$，$\forall x\in[a,b]$，则对 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，当 $|\Delta x| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{h(x,\xi,\Delta x)}{\Delta x} - f(x)\right| < \varepsilon, \forall x\in[a,b]。$$

对区间 $[a,b]$ 的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，若 $\|T\| < \delta$，则

$$\left|\sum_{i=1}^n \Delta'\Phi_i - \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i\right| < \sum_{i=1}^n \varepsilon\Delta x_i = \varepsilon(b-a)。$$

故 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta'\Phi_i-\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i\right|\le\varepsilon(b-a)$。即

$$\left|A-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\varepsilon(b-a)。$$

由 ε 的任意性，有 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta'\Phi_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。证毕。

4. 微元法 B 的应用举例

为了进一步展示从量的定义导出微元法的优点，我们举几个教材中出现的例子。

4.1. 平面曲线的弧长

先对弧长的概念有一个了解。设弧 AB 是一条没有自交点的非闭的平面曲线，把它称为曲线 C。在 C 上从 A 到 B 依次取分点：$A=P_0,P_1,\cdots,P_n=B$，它们称为对曲线 C 的一个分割，记为 T。然后用线段连接 T 中相邻的两点，得到 C 的 n 条弦 $\overline{P_{i-1}P_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$，这 n 条弦又成为 C 的一条内接折线。记 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}|P_{i-1}P_i|$ 表示 n 条弦当中的最长弦，$S_T=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$ 表示这条内接折线的总长度。

定义 3　如果存在有限极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}S_T=S$，则称曲线 C 是可求长的，并把极限 S 定义为曲线 C 的弧长。

例 1　设曲线 C 是一条没有自交点的非闭的平面曲线，由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$$

给出。若 $x(t)$，$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，求 C 的弧长。

解：下面利用微元法 B，推导出 C 的弧长。

Step 1. 根据量的定义，$\Delta'\phi$ 为区间 $[t,t+\Delta t]$ 上的线段长，则

$$\Delta'\phi=\sqrt{[x(t+\Delta t)-x(t)]^2+[y(t+\Delta t)-y(t)]^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}。$$

Step 2. 确定被积函数。当 $\Delta t\to 0$ 时，对 $\dfrac{\Delta'\phi}{\Delta t}$ 求极限，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta'\phi}{\Delta t}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=f(t)。$$

Step 3. 计算定积分。$S=\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$。

4.2. 旋转曲面的面积

设平面光滑曲线 C 的方程为 $y=f(x),x\in[a,b]$，(不妨设 $f(x)\ge 0$)，这段曲线绕 x 轴旋转一周得到旋转曲面。我们先回顾旋转曲面面积的定义。

定义 4　设旋转曲面介于 $[a,b]$ 之间，$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为区间 $[a,b]$ 上的任意分割。若 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta'S_i=S$，$\Delta'S_i$ 为 $[x_{i-1},x_i]$ 上圆台的侧面积，则称旋转曲面是可求面积的，极限 S 定义为旋转曲面的面积。

例 2　利用微元法 B 推导旋转曲面的面积公式：

Step 1. 根据量的定义，$\Delta'S$ 为 $[x,x+\Delta x]$ 上圆台的侧面积，则

$$\Delta'S=\pi[f(x)+f(x+\Delta x)]\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}。$$

Step 2. 确定被积函数。当 $\Delta x \to 0$ 时，对 $\frac{\Delta' S}{\Delta x}$ 求极限，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta' S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \pi \left[2f(x) + \Delta y \right] \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} 。$$

Step 3. 计算定积分 $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \mathrm{d}x$ 。

上述两例在适当的条件下可以借助定理 1 或者定理 2 证明所求量等于所得定积分。在此就不深入展开分析。

5. 总结

本文从定积分的表达式出发，给出了对微元法提出的一个理解。特别指出微元法中每一步的目的。其次，为了解决微元法的难点与关键点，提出了从量的定义导出微元法的观点。并分析了定义导出微元法的数学原理。最后，通过两个例子展示了由量的定义导出微元法的优点。

基金项目

国家自然科学基金(12061013)；广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2022KY1135)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(第四版)上册[M]. 北京：高等教育出版社, 2010.

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学(第七版)上册[M]. 北京：高等教育出版社, 2014.

[3] 张锐, 詹紫浪. 浅析定积分微元法中微元的选取[J]. 甘肃高师学报, 2022, 27(2): 4-6.