Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(5), 2193-2199**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125224

模糊赋范线性空间的$1-n$宽度

——模糊$1-n$宽度

蒋 浩

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年4月17日；录用日期：2023年5月9日；发布日期：2023年5月19日

摘 要

本文基于T. Bag和S. K. Samanta于2003年建立的模糊赋范线性空间，提出了1-范数、模糊$1-n$宽度的概念，并研究其相关性质。

关键词

模糊赋范线性空间，1-范数，模糊$1-n$-宽度

$1-n$ Width of Fuzzy Normed Linear Space

—Fuzzy $1-n$ Width

Hao Jiang

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 17th, 2023; accepted: May 9th, 2023; published: May 19th, 2023

Abstract

In this thesis, we propose the definitions of 1-norm and fuzzy $1-n$ width based on the fuzzy norm proposed by T. Bag and S. K. Santa in 2003, and investigate their main properties as well.

Keywords

Fuzzy Normed Linear Space, 1-Norm, Fuzzy $1-n$-Width

文章引用: 蒋浩. 模糊赋范线性空间的 $1-n$ 宽度[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2193-2199.
DOI: 10.12677/aam.2023.125224

1. 引言

2003 年，Bag 和 Samanta [1]建立了模糊赋范线性空间，给出了模糊范数的定义。1936 年，Kolmogorov [2]做了宽度的开创性工作，开始了宽度问题的研究。关于经典 n-宽度的其他结果可见参考文献[3]。本文探讨的主要内容是基于 T. Bag 和 S. K. Samanta 于 2003 年提出的模糊赋范线性空间。他们在文献[1]中定义了 α -范数的概念，我们根据 α -范数是上升集簇的性质，选取确界逼近的方式，定义了 1-范数的概念。再结合经典宽度的研究，给出模糊 $1-n$-宽度的概念，并讨论其相关性质。

2. 预备知识

2.1. 模糊赋范线性空间

定义 2.1 [1]：(模糊范数的定义)设 X 是线性空间，θ 为其零元，N 为 $X\times R$ 上的模糊子集。如果对 $\forall x,y\in X$，$c\in R$，有

(N1) $\forall t\le 0$，有 $N(x,t)=0$；

(N2) $\forall t\in R$ 且 $t>0$，有 $N(x,t)=1$ 当且仅当 $x=\theta$；

(N3) $\forall t\in R$ 且 $t>0$，如果 $c\ne 0$，有 $N(|c|x,t)=N(x,t/|c|)$；

(N4) $\forall s,t\in R$，有 $N(x+y,s+t)\ge\min\{N(x,s),N(y,t)\}$；

(N5) $N(x,\cdot)$ 为 R 上的不减函数且 $\lim\limits_{t\to+\infty}N(x,t)=1$.

则称 N 为 X 上的模糊范数，(X,N) 为模糊赋范线性空间。

注[4]：$N(x,t)$ 表示 x 的范数是实数 t 的真值。

定义 2.2：设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，A 为 X 的子集。

1) A 中所有模糊收敛点列的模糊极限所成之集称为 A 的导集，记为 A'。

2) 若 $A'\subseteq A$，则称 A 为模糊闭集。

3) 称 $A\cup A'$ 为 A 的模糊闭包，记为 $\bar{A}$。

定义 2.3：设 (X,N) 是模糊赋范线性空间，对 $x\in X$，$\alpha\in(0,1]$，令 $\|x\|_\alpha$：

$$\|x\|_\alpha=\begin{cases}\inf\limits_{t\in R}\{t:N(x,t)\ge\alpha\} & \alpha\in(0,1)\\ \sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha & \alpha=1\end{cases}$$

称 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 X 上的 α -范数。

我们在引入(N6)条件，模糊范数满足(N6)条件，1-范数是有限数。例子 2.1.4 满足该条件。

(N6)：$\forall x\in X,\exists t_x>0$，使得 $N(x,t_x)=1$。

例 2.4：设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，对 $\forall x\in X$，$\forall t\in R$，令

$$N(x,t)=\begin{cases}1, & t>\|x\|\\ \dfrac{2t}{t+\|x\|}, & 0<t\le\|x\|\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

则 (X,N) 是模糊赋范线性空间。

定理 2.5：设(X,N)是模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足条件(N6)，对任意 $x,y\in\mathrm{X}$ i) $\|x\|_1\ge 0$；ii) $\|\beta x\|_1=\beta\|x\|_1(\forall\beta>0)$；iii) $\|x+y\|_1\le\|x\|_1+\|y\|_1$。

证：i) 对 $\forall x\in X$，$\|x\|_1=\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha$，当 $t<0$ 时，$N(x,t)=0$

$$\inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\ge\alpha\}\ge 0,\alpha\in(0,1)\Rightarrow\|x\|_\alpha\ge 0,\alpha\in(0,1)$$

则 $\|x\|_1=\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha\ge 0$。

ii) 如果 $\beta\ne 0$，那么

$$\begin{aligned}\|\beta x\|_1&=\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(cx,t)\ge\alpha\}=\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(x,t/|c|)\ge\alpha\}\\&=\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{|\beta|t:N(x,t)\ge\alpha\}=|\beta|\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\ge\alpha\}=|\beta|\|x\|_1\end{aligned}$$

如果 $\beta=0$，

$$\|\beta x\|_1=\|0\|_1=0=0\|x\|_1=\beta\|x\|_1$$

iii) 对 $\alpha\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha&=\inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\ge\alpha\}+\inf_{s\in R}\{s:N(y,s)\ge\alpha\}\\&=\inf_{t,s\in R}\{t+s:N(x,t)\ge\alpha,N(y,s)\ge\alpha\}\\&\overset{\text{由(N4)得}}{\ge}\inf_{t+s\in R}\{t+s:N(x+y,t+s)\ge\alpha\}\\&=\inf_{t\in R}\{t:N(x+y,t)\ge\alpha\}=\|x+y\|_\alpha\end{aligned}$$

因为对 $\forall\alpha\in(0,1)$，$\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha)\ge\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha\ge\|x+y\|_\alpha$

所以，

$$\sup_{\alpha\in(0,1)}(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha)\ge\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x+y\|_\alpha$$

又因为 $\forall\alpha\in(0,1)$，

$$\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha\ge\|x\|_\alpha,\sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\|y\|_\alpha\Rightarrow\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha+\sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha$$

所以，

$$\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha+\sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\sup_{\alpha\in(0,1)}(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha)$$

则 $\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha+\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x+y\|_\alpha$，因此，$\|x\|_1+\|y\|_1\ge\|x+y\|_1$。

定义 2.6：设(X,N)为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$是 X 中的点列，$\alpha\in(0,1]$如果 $\exists x\in\mathrm{X}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_\alpha=0\,.$$

则称$\{x_n\}$依 α -范收敛且 α -范收敛到 x，记为 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha}x$，$x$ 称为$\{x_n\}$的 α -极限。

定义 2.7：设(X,N)为模糊赋范线性空间，A 是 X 的子集，$\alpha\in(0,1]$。

1) A 中所有依 α -范收敛点列的 α -极限所成之集称为 A 的 α -导集，记为 A'_α。

2) 若 $A'_\alpha\subseteq A$，则称 A 为 α -闭集。

3) 称 $A\bigcup A'_\alpha$ 为 A 的 α -闭包，记为 $\overline{A_\alpha}$ 。

2.2. 经典宽度

定义 2.8 [5]：设 $\left(\mathrm{X},\|\cdot\|\right)$ 为赋范线性空间，A 是 X 的非空子集，$n\in\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 。称 $d_n\left(A\right):=d_n\left(A,\mathrm{X}\right):=\inf\limits_{\mathrm{X}_n}\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in\mathrm{X}_n}\|x-y\|$，为 A 在 X 中的 Kolmgolov n-宽度。其中，X_n 取遍 X 中的所有维数不超过 n 的线性子空间。

Kolmgolov n-宽度具有以下主要性质：

性质 2.9 [5]：设 $\left(\mathrm{X},\|\cdot\|\right)$ 为赋范线性空间，A 是 X 的非空子集，

1) $d_n\left(\overline{A}\right)=d_n\left(A\right)$，其中 $\overline{A}$ 表示 A 在 $\left(\mathrm{X},\|\cdot\|\right)$ 中的闭包。

2) 对任一标量 α ，有

$$d_n\left(\alpha A\right)=|\alpha|d_n\left(A\right),$$

其中 $\alpha A=\{\alpha x|x\in A\}$ 。

3) 设 $b\left(A\right)=\{\alpha x:x\in A,|\alpha|\le 1\}$ 表示 A 的平衡包，则

$$d_n\left(A\right)=d_n\left(b\left(A\right)\right).$$

4) $d_n\left(coA\right)=d_n\left(A\right)$，其中 coA 表示 A 的凸包。

5) $d_n\left(A\right)\ge d_{n+1}\left(A\right),n=0,1,\cdots$

6) 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$\mathrm{X}\subseteq Y$ 和 $A\subseteq\mathrm{X}$ ，则

$$d_n\left(A,\mathrm{X}\right)\ge d_n\left(A,Y\right).$$

7) 对于任何两个集合 $A,B\subseteq\mathrm{X}$ ，设 $E\left(A;B\right)=\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B}\|x-y\|$，则如果 $B\subseteq A$，有

$$d_n\left(A\right)-E\left(A;B\right)\le d_n\left(B\right)\le d_n\left(A\right).$$

关于 Kolmgolov n-宽度与线性 n-宽度更详细的论述可参阅见 Pinkus [5]的专著《n-Widths in Approximation Theory》。

3. 模糊 Kolmgorov $1-n$-宽度

定义 3.1：设 $\left(\mathrm{X},N\right)$ 是模糊赋范线性空间模糊范数 N 满足(N6)条件，A 为 X 的非空子集，$n\in N$ ，称

$$d_n\left(A\right):=d_n\left(A,\mathrm{X},N\right):=\inf_{\mathrm{X}_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\|x-y\|_1$$

为 A 在 X 中的模糊 Kolmgorov $1-n$-宽度，简称模糊 $1-n$-宽度。其中，X_n 取遍 X 中所有维数不超过 n 的线性子空间，$\|x-y\|_1=\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\inf\limits_{t\in R}\{t:N\left(x-y,t\right)\ge\alpha\}$ 。

注：$d_n\left(A\right)$ 表示真值逼近于 1 的情况下，用 n 维子空间对 A 的最佳逼近。

下面，为方便起见，定理 3.2 至定理 3.8 中，假设 $\left(\mathrm{X},N\right)$ 是模糊赋范线性空间，A_1，A_2，A_3 为 X 中非空子集。

定理 3.2：设 $A_1\subseteq A_2$ ，则 $d_n\left(A_1\right)\le d_n\left(A_2\right)$ 。

证：任取 X 中维数不超过 n 的线性子空间，则

$$\left\{\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\|x-y\|_1\middle|x\in A_1\right\}\subseteq\left\{\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\|x-y\|_1\middle|x\in A_2\right\}.$$

所以，

$$\sup_{x\in A_1}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1\le\sup_{x\in A_2}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1 .$$

由 X_n 的任意性及模糊 $1-n$-宽度的定义知，

$$d_n(A_1)=\inf_{X_n}\sup_{x\in A_1}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1\le\inf_{X_n}\sup_{x\in A_2}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1=d_n(A_2).$$

即 $d_n(A_1)\le d_n(A_2)$。

定理 3.3：设 β 为标量，则 $d_n^\alpha(\beta A)=|\beta|d_n^\alpha(A)$。

证：由模糊 $1-n$-范宽度的定义知：

$$d_n(\beta A)=\inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\|\beta x-y\|_1$$

当 $\beta=0$ 时，$\inf_{y\in X_n}\|\beta x-y\|_1=\inf_{y\in X_n}\|y\|_1=\|\theta\|_1=0$

那么，

$$d_n(\beta A)=|\beta|d_n(A)=0$$

当 $\beta\ne 0$ 时，

$$\begin{aligned}d_n(\beta A)&=\inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\|\beta x-y\|_1\\&=\inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(\beta x-y,t)\ge\alpha\}\\&=\inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(x-y,t/|\beta|)\ge\alpha\}\\&=|\beta|\inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(x-y,t)\ge\alpha\}\\&=|\beta|d_n(A).\end{aligned}$$

定理 3.4：$d_n^\alpha(\bar{A}_1)=d_n^\alpha(A)$，其中 $\bar{A}_1$ 表示 A 的 1-闭包。

证：由于 $\bar{A}_1=A\cup A_1'\supseteq A$，故由定理 3.2 知 $d_n^\alpha(A)\le d_n^\alpha(\bar{A}_1)$。因此，只需证：$d_n^\alpha(A)\ge d_n^\alpha(\bar{A}_1)$ 即可。

事实上，不妨设 $\bar{A}_1\setminus A\ne\varnothing$ (若 $\bar{A}_1\setminus A=\varnothing$，则 $A=\bar{A}_1$，定理显然成立)。

对 $\forall x_0\in\bar{A}_1\setminus A$，则 $x_0\in A_1'$，从而存在 $\{x_n\}\subseteq A$，使得：

$$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x_0 .$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0(\varepsilon)$，$\forall n\ge n_0$，有

$$\|x_n-x_0\|_1<\varepsilon .$$

对 X 的任一维数不超过 n 的线性子空间 X_n，由定理 2.5 知

$$\inf_{y\in X_n}\{\|x_0-y\|_1\}\le\inf_{y\in X_n}\{\|x_n-x_0\|_1+\|x_n-y\|_1\}\le\inf_{y\in X_n}\{\|x_n-y\|_1\}+\varepsilon .$$

因此，

$$\inf_{y\in X_n}\{\|x_0-y\|_1\}\le\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1+\varepsilon .$$

再注意到 $\bar{A}=(\bar{A}\setminus A)\cup A$，有，

$$\sup_{x\in\bar{A}}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1\le\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_1+\varepsilon .$$

从而，

$$d_n(\bar{A})\le d_n(A)+\varepsilon .$$

由 ε 的任意性知：

$d_n\left(\bar{A}\right)\le d_n\left(A\right)$ 即证。

定理 3.5： $d_n\left(coA\right)=d_n\left(A\right)$，其中 coA 是 A 的凸包。

证：由于 $A\subseteq coA$，所以由定理 3.2 知，

$$d_n\left(A\right)\le d_n\left(coA\right).$$

下证 $d_n\left(A\right)\ge d_n\left(coA\right)$，

由于 $coA=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\middle|\lambda_i\ge 0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,x_i\in A,m\in\mathrm{N}\right\}$，再注意到一个事实，

$$\left\|x+y-z\right\|_1\le\left\|x-\lambda_1 z\right\|_1+\left\|y-\lambda_2 z\right\|_1,$$

其中， $0<\lambda_1,\lambda_2<1$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 。

由模糊 $1-n$-宽度的定义知，

$$\begin{aligned}
d_n\left(coA\right)&=\inf_{\mathrm{X}_n}\sup_{\substack{x\in coA\\ x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i}}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i-y\right\|_1\\
&\le\inf_{\mathrm{X}_n}\sup_{x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\in coA}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\sum_{i=1}^{m}\left\|\lambda_i x_i-\lambda_i y\right\|_1\\
&\le\inf_{\mathrm{X}_n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sup_{x_i\in A}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|x_i-y\right\|_1\\
&=\inf_{\mathrm{X}_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|x-y\right\|_1\\
&=d_n^{\alpha}\left(A\right).
\end{aligned}$$

定理 3.6： $d_{n+1}\left(A\right)\le d_n\left(A\right)$ 。

证：由模糊 $1-n$-宽度的定义，再注意到 X 的任一不超过 n 维的线性子空间一定是 X 中维数不超过 $n+1$ 的线性子空间，该定理易证。

定理 3.7：设 A，B 为 X 的非空子集，且 $B\subseteq A$，记 $E\left(A,B\right)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\left\|x-y\right\|_1$，则

$$d_n\left(A\right)-E\left(A,B\right)\le d_n\left(B\right)\le d_n\left(A\right).$$

证：由于 $B\subseteq A$ 和定理 3.2 知， $d_n\left(B\right)\le d_n\left(A\right)$ 。所以，只需证 $d_n\left(A\right)-E\left(A,B\right)\le d_n\left(B\right)$ 。

设 X_n 为 X 的任一维数不超过 n 的线性子空间。 $\forall x\in A$， $\forall b\in B$， 有

$$\begin{aligned}
\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|x-y\right\|_1&\le\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\{\left\|x-b\right\|_1+\left\|y-b\right\|_1\right\}\\
&=\left\|x-b\right\|_1+\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|y-b\right\|_1\\
&\le\left\|x-b\right\|_1+\sup_{b\in B}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|y-b\right\|_1.
\end{aligned}$$

再由 b 的任意性知，

$$\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|x-y\right\|_1\le\inf_{b\in B}\left\|x-b\right\|_1+\sup_{b\in B}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|y-b\right\|_1.$$

从而，

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in A}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|x-y\right\|_1&\le\sup_{x\in A}\inf_{b\in B}\left\|x-b\right\|_1+\sup_{b\in B}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|y-b\right\|_1\\
&=E\left(A,B\right)+\sup_{b\in B}\inf_{y\in\mathrm{X}_n}\left\|y-b\right\|_1.
\end{aligned}$$

故

$$d_n(A) \le E(A,B) + d_n(B).$$

即 $d_n(A) - E(A,B) \le d_n(B)$。

定理 3.8：设 (X, N) 与 (Y, N) 为具有同一模糊范数的模糊赋范线性空间，且 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}$，$A$ 是 X 的非空子集，则 $d_n(A, \mathrm{X}) \ge d_n(A, \mathrm{Y})$。

证明：由模糊 $1-n$-宽度的定义，并注意到 X 的任一线性子空间必为 Y 的线性子空间易得本结论。

4. 结论

本文以 T. Bag 和 S. K. Samanta 于 2003 年提出的模糊范数为研究对象，给出了模糊 $1-n$ 宽度的概念，研究其相关性质。这些工作为进一步研究模糊赋范线性空间中的逼近问题提供了一条路径。下一步，我们将讨论赋予模糊范数 $N(x,t) = \begin{cases} 1, & t > \|x\| \\ \dfrac{2t}{t+\|x\|}, & 0 < t \le \|x\| \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$ (其中 $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间)的模糊 Kolmogorov $1-n$ 宽度与经典 Kolmogorov n-宽度的联系。

致　谢

我要感谢我的导师，从本文的撰写到定稿，都给予了我极大的支持。再次向您致以最崇高的谢意。

参考文献

[1] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **3**, 687-705.

[2] Kolmogorov, A. (1936) Uber die deste Annaherung yon funktionen einer gegebenen functionenklasse. *Annals of Mathematics*, **37**, 107-111. https://doi.org/10.2307/1968691

[3] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory. Springer Berlin Heidelberg, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1

[4] Bag, T. and Samanta, S.K. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **151**, 513-547. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004

[5] Bag, T. and Samanta, S.K. (2006) Fixed Point Theorems on Fuzzy Normed Linear Spaces. *Information Sciences*, **176**, 2910-2931. https://doi.org/10.1016/j.ins.2005.07.013