Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2207-2219
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125226

基于分式模型的非单调自适应信赖域方法

杨玉梅

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2023年4月19日；录用日期：2023年5月11日；发布日期：2023年5月22日

摘 要

本文针对无约束优化问题提出了一个基于分式模型的非单调自适应信赖域的算法。首先用折线法求解子问题，之后算法结合非单调线搜索技术得到步长，产生下一个迭代点，提高算法的收敛速度；并引入自适应半径，避免传统信赖域半径更新的局限性。在一定的假设条件下，证明了该算法具有全局收敛性，数值实验证明了非单调自适应分式模型信赖域算法是有效的并且优于原来求解分式模型的算法，并且比二次模型和锥模型更为有效和稳健。

关键词

无约束优化，分式模型，非单调信赖域，自适应半径，全局收敛性

A Nonmonotone Adaptive Trust Region Method Based on Fractional Model

Yumei Yang

College of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Apr. 19th, 2023; accepted: May 11th, 2023; published: May 22nd, 2023

Abstract

This paper proposes a nonmonotone adaptive trust region algorithm based on fractional model for unconstrained optimization problems. First, the dogleg step method is used to solve the subproblem, and then the algorithm combines nonmonotonic line search technology to obtain the step size, generates the next iteration point, and improves the convergence speed of the algorithm; The adaptive radius is introduced to avoid the limitations of traditional trust region radius updating. Under certain assumptions, it is proved that the algorithm has global convergence. Numerical experiments show that the nonmonotonic adaptive fractional model trust region algorithm is effective and superior to the original algorithm for solving fractional models, and is more effective

文章引用: 杨玉梅. 基于分式模型的非单调自适应信赖域方法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2207-2219.
DOI: 10.12677/aam.2023.125226

and robust than the quadratic model and the cone model.

Keywords

Unconstrained Optimization, Fractional Model, Nonmonotone Trust Region, Adaptive Radius, Global Convergence

1. 引言

目前，最优化理论与方法在自然科学、经济管理、工程设计、环境保护、地震勘探、国家安全等领域上被广泛地应用，现已成为运筹学的一个重要分支。在许多亟待解决的、对社会有重大影响的大规模复杂科学和工程问题一般都是非线性的，如大气科学中的同化问题、信息科学中的模式识别问题、地球科学中的反演问题等。因此，研究高效的非线性最优化计算方法不仅具有重要的科学意义，而且具有广泛的应用前景。

很多非线性优化问题的数学模型本身是无约束的，求解相对容易，而无约束问题解法的基本思想又常常可以推广到一般有约束的情形。求解无约束优化问题的主要方法有信赖域法和线搜索法[1]。在实际应用中，信赖域方法比线搜索方法在解决 Hessian 矩阵不正定和 x_k 为鞍点等问题上更具优势，使得它在优化领域取得了较好的发展[2]。

传统的信赖域方法是基于二次函数，如果目标函数非二次性比较强或者其曲率变化剧烈，那么二次模型方法可能会产生一个比较差的函数极小值的估计值。1980 年，Davidon [3]针对二次模型的不足首次提出了锥函数，即二次函数的推广形式。用锥函数逼近原函数，可以插值较多的函数和梯度信息，比二次函数逼近更为一般[4]。以锥函数为基础所形成的方法简称锥模型方法。这类方法的提出引起了很多国内外学者对其做深入的研究，其中包括国外的 Ariyawansa，Di，Wright 和 Sorensen 教授，我国的李正峰、倪勤、孙文瑜教授等。此外，锥模型中含有参量 a_k，虽然可以提供一定的自由度来充分利用迭代点中的梯度和函数值信息，但其水平参向量只有一个，这会影响其搜索方向的选择。对此，2015 年朱红兰和倪勤等人首次提出了分式模型[5]，即是锥函数的推广形式，拥有三个水平向量，可以提供更多的插值信息。

近年来，信赖域算法常常应用非单调技术去提升算法的效率和性能。1986 年，Grippo 等[6] [7]为了克服单调技术要求在每次迭代中都减少目标函数值的缺点，提出了一种具有直线搜索技术的非单调信赖域方法。基于 Grippo 等人提出的非单调技术上，2004 年，Zhang 和 Hager [8]发现非单调技术有一些缺点。例如，数值性能严重依赖于参数 M 的选择；在任何迭代中生成的良好函数值可能都没有用处等。为了克服这些缺点，Zhang 和 Hager 提出了另一种非单调技术。受前人的启发，2012 年，Ahookhosh 等人[9]提出了更为简化的非单调参数。

传统信赖域方法通过使用 r_k 来修改信赖域在迭代点处的半径，效率不高且参数难取。2002 年，Zhang 等人[10]在中提出了自适应半径。2008 年，Shi 和 Guo [11]提出了另一种自适应半径，解决了 Zhang 等人提出的自适应半径不适合大规模问题的缺点。2018 年，盛洲等人[12]提出了一种较为简便的自适应信赖域方法求解无约束优化问题的，该方法由一般信赖域方法和修正正割方程驱动。2019 年，Xue 等人[13]提出了一种新的改进的非单调自适应信赖域方法，用于解决无约束优化问题。2022 年，Kamandi [14]等

人在此前的基础上提出了一种有效的非单调自适应信任域方法。

2011 年，冯琳和段复建[15]基于锥模型提出非单调自适应信赖域算法。2015 年，王开荣和曾刘拴[16]采用滤子技术改进了锥模型的非单调自适应信赖域方法。

从理论分析的角度出发，基于分式模型非单调自适应信赖域算法是具备全局收敛性的，从数值实验分析，该算法是可行的，有效的。但是，由于分式模型的插值较多，导致计算量较大；以及引用非单调自适应技术，导致算法比较复杂，所以关于分式模型的非单调自适应算法的国内外研究并不多。

因此，为了克服单调技术的局限性以及传统信赖域依靠 r_k 来设定半径的困难，本文基于朱红兰等人[5]提出的分式模型，之后结合 Ahookhosh 等人[9]的非单调技术，盛洲等人[12]的自适应技术提出一个求解分式模型的非单调自适应信赖域算法。

2. 非单调自适应分式模型信赖域方法

本文考虑无约束优化问题

$$\min_{x\in R^n} f(x) \tag{1}$$

其中 $f:R^n\to R$ 是二次连续可微函数。

1980 年，Davidon [3]提出的锥函数为

$$\tilde{\phi}_k(s)=f_k+\frac{g_k^{\mathrm{T}}s}{1-a_k^{\mathrm{T}}s}+\frac{s^{\mathrm{T}}B_k s}{2\left(1-a_k^{\mathrm{T}}s\right)^2}, \tag{2}$$

其中 $a_k\in R^n$ 是水平参向量。当 $a_k=0$ 时，锥函数退化为二次函数。此外，锥模型中含有参量 a_k，虽然可以提供一定的自由度来充分利用迭代点中的梯度和函数值信息，但其水平参向量只有一个，这会影响其搜索方向的选择。因此，朱红兰等人首次提出了如下分式模型[5]：

$$\phi_k(s)=\frac{1+c_k^{\mathrm{T}}s}{\left(1-a_k^{\mathrm{T}}s\right)\left(1-b_k^{\mathrm{T}}s\right)}g_k^{\mathrm{T}}s+\frac{\left(1+c_k^{\mathrm{T}}s\right)^2}{2\left(1-a_k^{\mathrm{T}}s\right)^2\left(1-b_k^{\mathrm{T}}s\right)^2}s^{\mathrm{T}}B_k s, \tag{3}$$

以及相应的分式模型信赖域子问题：

$$\begin{aligned}&\min_{s\in R^n}\phi_k(s)\\&\text{s.t. } \|s\|\le\tilde{\Delta},\left|\left(1-a_k^{\mathrm{T}}s\right)\left(1-b_k^{\mathrm{T}}s\right)\right|>\omega.\end{aligned} \tag{4}$$

其中参数向量 $a_k,b_k,c_k\in R^n$ 是有界的。如果 $b_k=c_k=0$，$\phi_k(s)$ 退化为锥模型。如果 $a_k=b_k=c_k=0$，则 $\phi_k(s)$ 为二次模型。基于这个新的分式模型(4)，文献[5]提出了一个简化的分式信赖域子问题：

$$\begin{aligned}&\min_{s\in R^n}\phi_k(s)\\&\text{s.t. } \|s\|\le\Delta_k,\end{aligned} \tag{5}$$

其中 Δ_k 是信赖域半径，且有

$$\Delta_k=\min\left\{\tilde{\Delta}_k,\frac{\omega}{\|a_k\|},\frac{\omega}{\|b_k\|},\frac{\omega}{\|c_k\|}\right\},0<\omega<\frac{1}{3}. \tag{6}$$

参数向量满足

$$\|a_k\|\Delta_k<\omega,\|b_k\|\Delta_k<\omega,\|c_k\|\Delta_k<\omega. \tag{7}$$

非单调技术由于在信赖域方法中引用可以得到较好的数值结果，得到了很大的发展。Grippo 等[6] [7]在 1986 年提出了一种具有直线搜索技术的非单调信赖域方法，其步长 α_k 满足 $\alpha_k \in \left\{s, \rho s, \rho s^2, \cdots\right\}$，且有：

$$f\left(x_k + \alpha_k s_k\right) \le f_{l(k)} + \beta \alpha_k g_k^{\mathrm{T}} s_k \tag{8}$$

其中 $s > 0, \rho \in (0,1), \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$。一般非单调项 $f_{l(k)}$定义为：

$$f_{l(k)} = \max_{0 \le j \le m(k)} \left\{ f\left(x_{k-j}\right) \right\} \tag{9}$$

其中

$$m(0) = 0, 0 \le m(k) \le \min\left\{m(k-1)+1, N\right\}, k \ge 1,$$

N 为非负整数。

2012 年，Ahookhosh 等人[9]提出了更为简化的非单调参数 R_k，满足：

$$f\left(x_k + \alpha_k s_k\right) \le R_k + \beta \alpha_k g_k^{\mathrm{T}} s_k, \tag{10}$$

其中

$$R_k = \eta_k f_{l(k)} + \left(1 - \eta_k\right) f\left(x_k\right) \tag{11}$$

其中 $\eta_k \in \left(\eta_{\min}, \eta_{\max}\right); \eta_{\min} \in [0,1); \eta_{\max} \in \left[\eta_{\min}, 1\right)$ 是两个前缀常量。

当信赖域半径更新时，通常依赖参数的选取，具有盲目性。2018 年，盛洲等人[12]提出了一种由修正正割方程驱动的自适应方法，其中修正方程为：

$$B_{k+1} d_k = q_k, \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} q_k &= y_k + h_k d_k, \\ y_k &= g_{k+1} - g_k, \\ h_k &= \frac{\left(g_{k+1} + g_k\right)^{\mathrm{T}} d_k + 2\left(f_k - f_{k+1}\right)}{\left\|d_k\right\|^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

新的自适应半径为：

$$\Delta_k := c^p \frac{\left\|d_{k-1}\right\|}{\left\|q_{k-1}\right\|} \left\|g_k\right\|, \tag{14}$$

其中 $c \in (0,1)$。

修改后的 BFGS 更新公式为

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k d_k d_k^{\mathrm{T}} B_k}{d_k^{\mathrm{T}} B_k d_k} + \frac{q_k q_k^{\mathrm{T}}}{q_k^{\mathrm{T}} d_k}. \tag{15}$$

3. 基于分式模型的非单调自适应信赖域算法

为了求解问题(5)，我们用如下的分式模型来近似 $f(x)$：

$$\varphi_k(s) = f_k + \phi_k(s), \tag{16}$$

其中 $\phi_k(s)$ 由(3)式可得。

该分式模型满足下面五个插值条件[5]：

$$\phi_k(0)=f_k,\nabla\phi_k(0)=g_k,$$

$$\phi_k(-s_{k-1})=f_{k-1},\phi_k(-s_{12})=f_{k-2},\phi_k(-s_{13})=f_{k-3},$$

其中

$$s_{k-1}=x_k-x_{k-1},s_{12}=x_k-x_{k-2},s_{13}=x_k-x_{k-3},$$

由上面的插值条件，得到

$$a_k=v_1g_{k-1},b_k=v_2B_{k-1}s_{k-1},c_k=v_3g_k,$$

其中 v_1,v_2,v_3 参考文献[5]可得。

接着，给出如下折线法来求解分式模型(16)，求解近似解的详细过程可参考文献[17] [18]。

算法 1 子问题的求解

步 1：计算分式模型(16)的牛顿点 s_N，最速下降点 s_{Cp}。

步 2：若 $\|s_N\|\le\Delta_k$，则 $s_*=s_N$，算法停止，否则转步 3。

步 3：令 $s_*=s_{Cp}$。

有了算法 1，结合 Ahookhosh 等人的非单调技术和盛洲等人的自适应技术，下面给出一个求解分式模型(16)的非单调自适应信赖域算法。

算法 2 基于折线法的非单调自适应分式模型信赖域算法

步 0. 设

$u\in(0,1),\Delta_{\max}>0,\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right),\varepsilon>0,\eta\in(0,1),c\in(0,1),x_0\in R^n,B_0=I,\Delta_0\in(0,\Delta_{\max}],\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\rho\in(0,1)$。

令 $k=0$，$p=0$。

步 1. 计算 $f_k=f(x_k),g_k=\nabla f(x_k)$。假设满足 $\|g_k\|\le\varepsilon$ 时，则 $x_{k+1}=x_k$，算法停止，否则，转步骤 2。

步 2. 通过算法 1 计算 s_k。

步 3. 校正信赖域半径。

$$\Delta_k:=c^p\frac{\|s_{k-1}\|}{\|q_{k-1}\|}\|g_k\|. \tag{17}$$

步 4. 计算 R_k，选择合适的参数 $\eta_k\in[\eta_{\min},\eta_{\max}]$，计算

$$r_k=\frac{R_k-f(x_k+s_k)}{\varphi_k(0)-\varphi(s_k)}. \tag{18}$$

如果 $r_k\ge u$，则 $x_{k+1}=x_k+s_k$，转步 5；否则，令 $x_{k+1}=x_k+\alpha_ks_k$，计算 α_k 使其满足式(10)，$p=p+1$，转步 3。

步 5. 计算 q_k，如果 $s_k^{\mathrm{T}}q_k>0$，则用(15)式迭代 B_{k+1} 进行修正，否则令 $B_{k+1}=B_k$。令 $k=k+1$，转步 1。

备注：1) 算法 2 中“步骤 3 − 步骤 4 − 步骤 3”的过程称为内循环。

2) 记集合 $I=\{k:r_k\ge u\},J=\{k:r_k<u\}$。

3) 定义模型(16)的预测下降量为

$$Pred(s)=\varphi_k(0)-\varphi_k(s)$$

4. 收敛性分析

为了证明算法 2 的收敛性，现给出以下假设：

(H1) 有界闭集 $L(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\le f(x_0)\}$ 满足 $L(x)\subseteq\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$，且 $f(x)$ 二阶连续可微。

(H2) 存在一个正数 m 使得对所有 $s\in\mathbb{R}^n, k\in N$，有

$$s^{\mathrm{T}}B_k s\ge m\|s\|^2. \tag{19}$$

(H3) 矩阵 B_k 是一致有界的，存在一个正常数 M_1 使得对所有 $k\in N$，有

$$\|B_k\|\le M_1. \tag{20}$$

引理 1 [18] 假设(7)成立，如果 s_k 是由算法 1 生成的子问题(16)的解，则有，

$$Pred(s_k)\ge\frac{1}{2}\frac{\|g_k\|}{\|B_k\|}\min\left\{\|g_k\|,\frac{\xi\Delta_k}{\|B_k^{-1}\|}\right\}. \tag{21}$$

其中 $\xi=\dfrac{1-\omega}{(1+\omega)^2},\omega\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$。

引理 2 [12] 如果 B_{k+1} 由 BFGS 公式(15)更新，则 B_k 正定，$s_k^{\mathrm{T}}q_k>0$ 当且仅当 B_{k+1} 正定。

引理 3 若 s_k 是由算法 1 生成的子问题(16)的解，$\|g_k\|\neq 0$，则 $\exists\tilde{k}>0$，使得

$$g_k^{\mathrm{T}}s_k+\kappa_k g_k^{\mathrm{T}}s_k+\frac{1}{2}s_k^{\mathrm{T}}B_k s_k\le-\tilde{k}\|g_k\|^2. \tag{22}$$

其中

$$\tilde{k}=\frac{1}{2M_1}\min\{1,\xi c^p\},\xi=\frac{1-\omega}{(1+\omega)^2},\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

证明：定义

$$Pred(s_k)=-h_k g_k^{\mathrm{T}}s_k-\frac{1}{2}h_k^2 s_k^{\mathrm{T}}B_k s_k. \tag{23}$$

其中

$$h_k=\frac{1+c_k^{\mathrm{T}}s_k}{\left(1-a_k^{\mathrm{T}}s_k\right)\left(1-b_k^{\mathrm{T}}s_k\right)}>0. \tag{24}$$

由分式模型定义可得，

$$\left|a_k^{\mathrm{T}}s_k\right|\le\|a_k\|\Delta_k\le\omega,\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

同理可得

$$\left|b_k^{\mathrm{T}}s_k\right|\le\omega,\left|c_k^{\mathrm{T}}s_k\right|\le\omega,\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

因此，可得

$$\frac{1}{1-a_k^{\mathrm{T}}s_k}=1+a_k^{\mathrm{T}}s_k+o\left(\|s_k\|\right), \tag{25}$$

$$\frac{1}{1-b_k^{\mathrm{T}}s_k}=1+b_k^{\mathrm{T}}s_k+o\left(\|s_k\|\right), \tag{26}$$

所以，可得

$$h_k g_k^{\mathrm{T}} s_k = g_k^{\mathrm{T}} s_k + \kappa_k g_k^{\mathrm{T}} s_k + o\left(\|s_k\|^2\right), \tag{27}$$

$$h_k^2 s_k^{\mathrm{T}} B_k s_k = s_k^{\mathrm{T}} B_k s_k + o\left(\|s_k\|^2\right), \tag{28}$$

其中

$$\kappa_k = a_k^{\mathrm{T}} s_k + b^{\mathrm{T}} s_k + c^{\mathrm{T}} s_k. \tag{29}$$

则由引理 1 和(27)、(28)得

$$-g_k^{\mathrm{T}} s_k - \kappa_k g_k^{\mathrm{T}} s_k - o\left(\|s_k\|^2\right) - \frac{1}{2} s_k^{\mathrm{T}} B_k s_k - \frac{1}{2} o\left(\|s_k\|^2\right) \ge \frac{1}{2}\frac{\|g_k\|}{\|B_k\|}\min\left\{\|g_k\|, \frac{\xi\Delta_k}{\|B_k^{-1}\|}\right\},$$

且由(12)和矩阵的相容性可得

$$\Delta_k = c^p \frac{\|s_{k-1}\|}{\|q_{k-1}\|}\|g_k\| \ge c^p \left\|B_k^{-1}\right\|\|g_k\|, \tag{30}$$

则有

$$\begin{aligned}
-g_k^{\mathrm{T}} s_k - \kappa_k g_k^{\mathrm{T}} s_k - \frac{1}{2} s_k^{\mathrm{T}} B_k s_k &\ge \frac{1}{2}\frac{\|g_k\|}{\|B_k\|}\min\left\{\|g_k\|, \frac{\xi\Delta_k}{\|B_k^{-1}\|}\right\} \\
&\ge \frac{1}{2}\frac{\|g_k\|}{\|B_k\|}\min\left\{\|g_k\|, \frac{\xi c^p \|B_k^{-1}\|\|g_k\|}{\|B_k^{-1}\|}\right\} \\
&\ge \frac{1}{2}\frac{\|g_k\|^2}{\|B_k\|}\min\left\{1, \xi c^p\right\} \\
&\ge \frac{1}{2M_1}\min\left\{1, \xi c^p\right\}\|g_k\|^2
\end{aligned}$$

令 $\tilde{k} = \frac{1}{2M_1}\min\left\{1, \xi c^p\right\}$，则证明完毕。

引理 4 若序列$\{x_k\}$由算法 2 生成。那么对于所有 $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$，有 $x_k \in L(x_0)$，$\left\{f_{l(k)}\right\}$是递减序列。

证明：根据 $f_{l(k)}, R_k$ 定义，可得

$$f_{l(k)} = \eta_k f_{l(k)} + (1-\eta_k) f_{l(k)} \ge \eta_k f_{l(k)} + (1-\eta_k) f_k = R_k. \tag{31}$$

显然有，$f_0 = R_0$。现假设 $x_k \in L(x_0)$ 成立，我们需通过数学归纳法证明 $x_{k+1} \in L(x_0)$ 成立即可。从以下两个方面证明：

1) 当 $k \in I$，则有

$$R_k - f(x_k + s_k) \ge \mu\left(Pred(s_k)\right) \ge \frac{1}{2}\mu\frac{\|g_k\|}{\|B_k\|}\min\left\{\|g_k\|, \frac{\xi\Delta_k}{\|B_k^{-1}\|}\right\} \ge 0. \tag{32}$$

2) 当 $k \in J$，由 α_k 的定义可知 $\alpha_k > 0$，由(7)、(29)可得 $0 < \|\kappa_k\| \le 3\omega < 1$，由假设(H2)得 $s^{\mathrm{T}} B_k s \ge m\|s\|^2 > 0$，则有

$$g_k^{\mathrm{T}} s_k < g_k^{\mathrm{T}} s_k + \kappa_k g_k^{\mathrm{T}} s_k + \frac{1}{2} s_k^{\mathrm{T}} B_k s_k.$$

由引理 3 得到 $\beta\alpha_k g_k^{\mathrm{T}} s_k \le 0$。则有

$$f\left(x_k+\alpha_k s_k\right)\le R_k+\beta\alpha_k g_k^{\mathrm{T}}s_k\le R_k. \tag{33}$$

通过式子(31)~(33)可得

$$f_{k+1}\le R_k\le f_{l(k)}\le f_0, k\in \mathrm{N}\cup\{0\} \tag{34}$$

所以，$x_{k+1}\in L\left(x_0\right)$成立。

接着，证明序列$\left\{f_{l(k)}\right\}$是递减数列。为此考虑以下情况：

1) 对$k<N$，明显有$m(k)=k$。因此，对任意k，有$f_k\le f_0$，可得$f_{l(k)}=f_0$。

2) 对$k\ge N$，$m(k+1)\le m(k)+1$。根据$f_{l(k+1)}$的定义和(34)，可得

$$f_{l(k+1)}=\max_{0\le j\le m(k+1)}\left\{f\left(x_{k+1-j}\right)\right\}\le \max_{0\le j\le m(k)+1}\left\{f_{k+1-j}\right\}=\max\left\{f_{l(k)},f_{k+1}\right\}\le f_{l(k)}. \tag{35}$$

因此，这两种情况都表明$f_{l(k+1)}$是递减序列。

引理 5 若序列$\{x_k\}$由算法 2 生成，则有

$$f_{k+1}\le R_{k+1}, \forall k\in \mathrm{N}\cup\{0\}. \tag{36}$$

证明：根据$f_{l(k+1)}$的定义，对于所有的$k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$，我们有$f_{k+1}\le f_{l(k+1)}$，则

$$\begin{aligned} f_{k+1}&=\eta_{k+1}f_{k+1}+\left(1-\eta_{k+1}\right)f_{k+1}\\ &\le \eta_{k+1}f_{l(k+1)}+\left(1-\eta_{k+1}\right)f_{k+1}\\ &=R_{k+1},\quad \forall k\in \mathrm{N}\cup\{0\}. \end{aligned}$$

引理 6 [19]若序列$\{x_k\}$由算法 2 生成，则有

$$\lim_{k\to\infty} f_{l(k)}=\lim_{k\to\infty} f\left(x_k\right). \tag{37}$$

引理 7 假设(H1)、(H2)、(H3)成立，则存在常数$Q>0$使得对任意的k有

$$\left\|\left[f\left(x_k\right)-f\left(x_k+s_k\right)\right]-\left[\phi_k(0)-\phi_k\left(s_k\right)\right]\right\|\le\frac{1}{2}\left(Q-\tilde{k}\right)\Delta_k^2. \tag{38}$$

证明：假设存在正数Q，使得$\left\|\nabla^2 f(x)\right\|\le Q$，则由引理 3 和 Taylor 展开式得

$$\begin{aligned} &\left\|\left[f\left(x_k\right)-f\left(x_k+s_k\right)\right]-\left[\phi_k(0)-\phi_k\left(s_k\right)\right]\right\|\\ &=\left|f\left(x_k\right)-f\left(x_k+s_k\right)+g_k^{\mathrm{T}}s_k+\kappa_k g_k^{\mathrm{T}}s_k+\frac{1}{2}s_k^{\mathrm{T}}B_k s_k+o\left(\left\|s_k\right\|^2\right)\right|\\ &=\left|-\frac{1}{2}s_k^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\left(x_k+v_k s_k\right)s_k+\kappa_k g_k^{\mathrm{T}}s_k+\frac{1}{2}s_k^{\mathrm{T}}B_k s_k+o\left(\left\|s_k\right\|^2\right)\right|\\ &\le\frac{1}{2}\left(Q-\tilde{k}\right)\left\|s_k\right\|^2\\ &\le\frac{1}{2}\left(Q-\tilde{k}\right)\Delta_k^2, \end{aligned}$$

其中$\tilde{k}=\dfrac{1}{2M_1}\min\left\{1,\xi c^p\right\}$。则结论得证。

定理 1 假设(H1)、(H2)、(H3)成立，序列$\left\{\left\|g_k\right\|\right\},\left\{\left\|B_k\right\|\right\}$是有界的，那么对任意的$\varepsilon>0$，算法 2 在有限次迭代后终止。

证明：反证法。

首先证明$\left\|g_k\right\|>\varepsilon>0$时必有$\lim\limits_{k\to\infty}\Delta_k=0$。由$r_k$的定义知：

(1) 若 $k\in I$ 时，

$$R_k-f\left(x_k+s_k\right)\geq\mu\left(Pred\left(s_k\right)\right)\geq\frac{1}{2}\mu\frac{\|g\|}{\|B\|}\min\left\{\|g\|,\frac{\xi\Delta_k}{\left\|B^{-1}\right\|}\right\}\geq\frac{1}{2}\mu\varepsilon\min\left\{\frac{\varepsilon}{M_1},\xi\Delta_k\right\},\tag{39}$$

其中 $\xi=\dfrac{1-\omega}{(1+\omega)^2},\omega\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$。

因 f_k 有界可得 R_k 有界，所以

$$+\infty>\sum_{k=1}^{\infty}R_k-f\left(x_k+s_k\right)\geq\sum_{k\in I}R_k-f\left(x_k+s_k\right)\geq\sum_{k\in I}\mu\left(Pred\left(s_k\right)\right)\geq\sum_{k\in I}\frac{1}{2}\mu\varepsilon\min\left\{\frac{\varepsilon}{M_1},\xi\Delta_k\right\},\tag{40}$$

又因为

$$\sum_{k\in I}\frac{1}{2}\mu\varepsilon\min\left\{\frac{\varepsilon}{M_1},\xi\Delta_k\right\}<+\infty,\tag{41}$$

所以 $\sum\limits_{k\in I}\Delta_k$ 是收敛的，故必有 $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta_k=0$。

由于 $\Delta_k:=c^p\dfrac{\|s_{k-1}\|}{\|q_{k-1}\|}\|g_k\|\geq c^p\dfrac{\|g_k\|}{\|B_k\|}$，对充分大的 k，则有

$$\Delta_k\geq c^p\frac{\varepsilon}{M_1}>0\tag{42}$$

这与 $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta_k=0$ 矛盾，从而定理得证。

(2) 若 $k\in J$ 时，由(34)~(36)可得

$$f_k\leq R_k\leq f_{l(k)},\tag{43}$$

因 f_k 有界以及引理 6 可得 R_k 有界且收敛，所以 $R_k-f\left(x_k+\alpha_k s_k\right)\geq-\beta\alpha_k g_k^{\mathrm{T}}s_k>0$。
因为 s_k 是下降方向，有 $f_{k+1}\leq f_k$，可得 $R_k\geq\max\left\{f_{k+1},f_{k+2},\cdots\right\}-\beta\alpha_k g_k^{\mathrm{T}}s_k$.
又根据 R_k 的定义得 R_{k+1} 是 $f_{l(k+1)}$ 和 $f_{(k+1)}$ 的凸组合，则有 $R_{k+1}\leq\max\left\{f_{l(k+1)},f_{k+1}\right\}$，可得

$$R_k-R_{k+1}\geq-\beta\alpha_k g_k^{\mathrm{T}}s_k>0.\tag{44}$$

所以对充分大的 k，这与 R_k 收敛矛盾，从而定理得证。

定理 2 假设(H1)、(H2)、(H3)成立，则有

$$\liminf_{k\to\infty}\|g_k\|=0.\tag{45}$$

证明：反证法

假设存在充分大的 k，有 $g_k\geq\varepsilon_0>0$。由引理 7 和式子(4-24)得

$$\begin{aligned}\left|\frac{f\left(x_k\right)-f\left(x_k+s_k\right)}{Pred\left(s_k\right)}-1\right|&=\left|\frac{\left[f\left(x_k\right)-f\left(x_k+s_k\right)\right]-\left[\phi_k(0)-\phi_k\left(s_k\right)\right]}{Pred\left(s_k\right)}\right|\\&=\left|\frac{\frac{1}{2}\left(Q-\tilde{k}\right)\Delta_k^2}{Pred\left(s_k\right)}\right|\leq\frac{\left(Q-\tilde{k}\right)\Delta_k^2}{\varepsilon\min\left\{\frac{\varepsilon}{M_1},\xi\Delta_k\right\}}.\end{aligned}$$

又 $r_k = \frac{R_k - f(x_k + s_k)}{Pred(s_k)} \ge \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{Pred(s_k)}$，令 $k \to \infty$，由于 $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = 0$，则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{Pred(s_k)} = 1. \tag{46}$$

所以，必存在一个充分大的 k，有 $r_k \ge u$，且存在 $c > 0$ 使得

$$\Delta_k := c^p \frac{\|s_{k-1}\|}{\|q_{k-1}\|} \|g_k\| \ge c^p \frac{\|g_k\|}{\|B_k\|} > c^p \frac{\varepsilon_0}{M_1} > 0,$$

这与 $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = 0$ 矛盾，从而定理得证。

5. 数值结果

本节给出算法 2 (non monotonic adaptive fractional trust region, NAFTR)的数值试验结果，并与分式模型信赖域算法(fractional trust region, FTR) (文献[18]中算法 3)做比较。算法用 Matlab R2020a 编程实现，数值实验在 PC 机上 Windows 系统中进行。

本节选出的 18 个测试函数选自于文献[20] [21]，初始点的选取与文献[18]相同。同时在本文的算法 2 中取 $a_k = b_k = c_k = 0$，得到二次模型信赖域子问题(non monotonic adaptive trust region, NATR)；取 $b_k = c_k = 0$，得到锥模型信赖域子问题(non monotonic adaptive conic trust region, NACTR)，一起与分式模型子问题进行比较。算法 2 选取的迭代终止条件为最后一次迭代梯度的范数小于 10^{-4}。在表中，$\|g_k\|$是最后一次迭代梯度的欧式范数；CPU(s)表示算法总的迭代时间(单位秒)。如果计算不出结果或者时间超过 200 s 或者迭代次数超过 1000 次，则用“----”表示。在算法 2 中选择的参数为：

$$\omega = 0.33, \Delta_0 = 1, \Delta_{\max} = 10, u = 0.25, N = 4, \rho = 0.5.$$

另外，本文选择 $\eta_0 = 0.15$ 且 η_k 按如下方式更新：

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_0/2, \text{ if } k = 1, \\ (\eta_{k-1} + \eta_{k-2})/2, \text{ if } k \ge 2. \end{cases}$$

以及半径相关参数 c 的更新方式如下：

$$c = \begin{cases} 0.3, \text{ if } \frac{\Delta_{\max}}{10} < \Delta \le \Delta_{\max}, \\ 0.45, \text{ if } 10^{-6} < \Delta \le \frac{\Delta_{\max}}{10}, \\ 0.6, \text{ o.w.} \end{cases}$$

测试函数如表 1，数值结果如表 2，表 3。

Table 1. Testing issues
表 1. 测试问题

序号	问题	序号	问题
1	Cube	10	Tridiagonal Exponential
2	Penalty-I	11	Cragg and Levy
3	Beale	12	Discrete Boundary Value
4	Meyer	13	Banded Trigonometric

Continued

5	Box three-dimensional	14	Powell singular
6	Extended Powell	15	Kowalik and Osborne
7	Variably Dimensioned	16	Osborne 1
8	Rosenbrock	17	Biggs EXP6
9	Extended Trigonometric	18	Osborne 2

Table 2. Numerical results
表 2. 数值结果

		FTR			NAFTR		
维数	问题	iter	$\|g\|$	CPU(s)	iter	$\|g\|$	CPU(s)
	1	59	3.74E−06	0.061504	38	2.84E−05	0.145804
$n = 2$	2	5	1.70E−05	0.029041	4	4.88E−05	0.026123
	3	12	6.74E−05	0.041022	12	6.35E−05	0.046634
$n = 3$	4	10	6.91E−08	0.044549	7	2.54E−06	0.043505
	5	9	3.61E−05	0.031359	6	3.51E−05	0.031807
	6	15	2.50E−05	0.043475	5	2.13E−05	0.030988
	7	19	5.21E−05	0.053929	17	2.41E−05	0.047176
	8	13	2.41E−05	0.046874	13	2.12E−05	0.041107
	9	16	1.00E−05	0.043479	14	5.92E−06	0.044744
	10	5	2.60E−05	0.035514	5	2.60E−05	0.032612
	11	31	3.70E−05	0.038376	21	3.68E−05	0.043551
$n = 4$	12	28	1.96E−05	0.066571	15	1.85E−05	0.05221
	13	14	4.45E−05	0.041774	11	1.03E−05	0.042105
	14	12	5.50E−05	0.037276	5	3.94E−05	0.028003
	15	7	1.40E−05	0.033318	5	4.52E−06	0.038266
$n = 5$	16		----		3	8.98E−06	0.026815
$n = 6$	17		----		4	1.61E−07	0.031292
$n = 11$	18	19	9.07E−05	0.090275	11	4.33E−05	0.057756

Table 3. Numerical results of the improved algorithm under different level vectors
表 3. 改进后算法在不同水平向量下的数值结果

	NATR			NACTR			NAFTR		
问题	Iter	$\|g\|$	CPU(s)	Iter	$\|g\|$	CPU(s)	Iter	$\|g\|$	CPU(s)
1	76	4.61E−05	0.047647			----	38	2.84E−05	0.145804
2	5	6.50E−05	0.027404	6	4.47E−05	0.030134	4	4.88E−05	0.026123
3	26	3.54E−05	0.036242	16	8.65E−07	0.032607	12	6.35E−05	0.046634
4	12	1.35E−12	0.040898		----		7	2.54E−06	0.043505

Continued

5	5	6.72E−05	0.031516	3	6.90E−05	0.02819	6	3.51E−05	0.038266
6	62	8.08E−05	0.039225	16	8.65E−07	0.032607	5	2.13E−05	0.030988
7	87	1.50E−05	0.041899	39	4.62E−05	0.043765	17	2.41E−05	0.047176
8	60	3.59E−06	0.03704	18	4.38E−06	0.034834	13	2.12E−05	0.041107
9	13	2.13E−05	0.033469	13	2.03E−05	0.033915	14	5.92E−06	0.044744
10	4	9.27E−06	0.03049	4	9.37E−06	0.030877	5	2.60E−05	0.032612
11	58	9.50E−05	0.034378	30	7.95E−05	0.037838	21	3.68E−05	0.043551
12	21	2.07E−05	0.039496	14	6.43E−05	0.030783	15	1.85E−05	0.05221
13	11	2.09E−05	0.029485	11	2.09E−05	0.03027	11	1.03E−05	0.042105
14		----			----		5	3.94E-05	0.028003
15	57	5.33E−05	0.039107	27	9.13E−05	0.041883	5	4.52E−06	0.053581
16	12	1.74E−12	0.038211	4	6.39E−06	0.032931	3	8.98E−06	0.031292
17	7	2.45E−07	0.038249	7	4.11E−07	0.038187	4	1.61E−07	0.057756
18	14	2.83E−05	0.036563	12	7.31E−05	0.05278	11	4.33E−05	0.057756

表 2 为 NAFTR 和 FTR 在 18 个测试问题下的数值比较，其中维数最高为 11。对于其中的 15 个测试问题，NAFTR 算法的迭代次数或者是 CPU 运行时间是优于 FTR 算法的，3 个问题的数值结果几乎和原算法一样。

与此同时，在 NAFTR 算法中使水平向量 $a_k = b_k = c_k = 0$ 或者 $b_k = c_k = 0$，分别得到二次模型以及锥模型信赖域子问题。数值结果如表 3 所示，可以看出，分式模型子问题的数值结果明显优于二次模型子问题和锥模型子问题。

6. 结论

本文从理论上证明了非单调自适应分式模型信赖域算法的全局收敛性。在数值实验中，新算法比文献[18]的算法 3 的数值结果更优。从一定程度上证明了引用非单调自适应技术能使信赖域算法的效率更高，尤其在维度较高的问题上。

另外，分式模型子问题拓宽了信赖域子问题的适用性，在大规模以及较复杂的问题上分式模型是比二次模型和锥模型子问题更为有效和稳健的。

因此，无论是从理论还是数值结果上看，非单调自适应分式模型信赖域算法都值得我们进一步探究。但是，本文对分式模型的水平向量的插值条件或者是子问题求解方法的研究比较单一，这些内容都需要我们深思研究。

参考文献

[1] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科技出版社, 1999.

[2] Powell, M.J.D. and Yuan, Y.X. (1991) A Trust Region Algorithm for Equality Constrained Optimization. *Mathematical Programming*, **49**, 189-211. https://doi.org/10.1007/BF01588787

[3] Davidon, W.C. (1980) Conic Approximations and Collinear Scalings for Optimizers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **17**, 268-281. https://doi.org/10.1137/0717023

[4] Ni, Q. (2005) Optimality Conditions for Trust-Region Subproblems Involving a Conic Model. *SIAM Journal on Optimization*, **15**, 826-837. https://doi.org/10.1137/S1052623402418991

[5] Zhu, H., Ni, Q. and Zeng, M. (2015) A Quasi-Newton Trust Region Method Based on a New Fractional Model. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, **5**, 237-249. https://doi.org/10.3934/naco.2015.5.237

[6] Grippo, L., Lampariello, F. and Lucidi, S. (1986) A Nonmonotone Line Search Technique for Newton's Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **23**, 707-716. https://doi.org/10.1137/0723046

[7] Grippo, L., Lampariello, F. and Lucidi, S. (1989) A Truncated Newton Method with Nonmonotone Line Search for Unconstrained Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **60**, 401-419. https://doi.org/10.1007/BF00940345

[8] Zhang, H. and Hager, W.W. (2004) A Nonmonotone Line Search Technique and Its Application to Unconstrained Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **14**, 1043-1056. https://doi.org/10.1137/S1052623403428208

[9] Ahookhosh, M., Amini, K. and Peyghami, M.R. (2012) A Nonmonotone Trust-Region Line Search Method for Large-Scale Unconstrained Optimization. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 478-487. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.021

[10] Zhang, X., Zhang, J. and Liao, L. (2002) An Adaptive Trust Region Method and Its Convergence. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **45**, 620-631.

[11] Shi, Z.J. and Guo, J. (2008) A New Trust Region Method with Adaptive Radius. *Computational Optimization and Applications*, **41**, 225-242. https://doi.org/10.1007/s10589-007-9099-8

[12] Cui, Z.R., *et al*. (2018) A New Adaptive Trust Region Algorithm for Optimization Problems. *Acta Mathematica Scientia*, **38**, 479-496. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30762-8

[13] Xue, Y., Liu, H. and Liu, Z. (2019) An Improved Nonmonotone Adaptive Trust Region Method. *Applications of Mathematics*, **64**, 335-350. https://doi.org/10.21136/AM.2019.0138-18

[14] Kamandi, A. and Amini, K. (2022) A New Nonmonotone Adaptive Trust Region Algorithm. *Applications of Mathematics*, **67**, 233-250. https://doi.org/10.21136/AM.2021.0122-20

[15] 冯琳, 段复建. 基于锥模型的非单调自适应信赖域算法[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2011(4): 580-586.

[16] 王开荣, 曾刘拴. 基于锥模型的非单调自适应信赖域算法[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2015, 49(2): 171-178.

[17] 陆晓平, 倪勤, 刘浩. 解新锥模型信赖域子问题的折线法[J]. 应用数学学报, 2007, 30(5): 855-871.

[18] 朱红兰, 倪勤, 党创寅, 等. 求解无约束优化问题的分式模型信赖域算法[J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(4): 531-546.

[19] Ahookhosh, M. and Amini, K. (2010) A Nonmonotone Trust Region Method with Adaptive Radius for Unconstrained Optimization Problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **60**, 411-422. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.04.034

[20] Moré, J.J., Garbow, B.S. and Hillstrom, K.E. (1981) Testing Unconstrained Optimization Software. *ACM Transactions on Mathematical Software* (*TOMS*), **7**, 17-41. https://doi.org/10.1145/355934.355936

[21] 诸梅芳, 薛毅, 张凤圣. 锥模型的拟 NEWTON 型信赖域方法[J]. 高等学校计算数学学报, 1995, 17(1): 36-47.