Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2263-2273
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125231

Hans汉斯

带最大密度限制的Navier-Stokes方程的耗散测度值解

李婷婷，华嘉乐

东华大学理学院，上海

收稿日期：2023年4月24日；录用日期：2023年5月19日；发布日期：2023年5月25日

摘　要

本文研究具有最大密度限制的可压Navier-Stokes方程，其中，最大密度限制是由一个奇性的压强项给定的。利用带有参数K的Brenner模型，我们构造了Navier-Stokes方程的逼近解。为了处理压强的奇性，引入一个逼近压强 $p^{\theta,\delta}$，其中 θ,δ 为逼近参数。当这些参数 $K,\theta,\delta \to 0$ 时，我们证明逼近解收敛到Navier-Stokes方程的耗散测度值解。

关键词

可压Navier-Stokes方程，弱解，最大密度限制，耗散测度值解

Dissipative Measure-Valued Solution of Navier-Stokes Equation with Maximum Density Constraint

Tingting Li, Jiale Hua

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Apr. 24th, 2023; accepted: May 19th, 2023; published: May 25th, 2023

Abstract

This paper considers the compressible Navier-Stokes equation with maximum density constraint, where the maximum density constraint is imposed by a singular pressure term. Approximate solutions of the Navier-Stokes equation are constructed using the Brenner model with a parameter K. To deal with the singularity of pressure, an approximate pressure $p^{\theta,\delta}$ is introduced, where θ,δ

文章引用: 李婷婷, 华嘉乐. 带最大密度限制的 Navier-Stokes 方程的耗散测度值解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2263-2273. DOI: 10.12677/aam.2023.125231

are the approximate parameters. When $K, \theta, \delta \to 0$, we show that the approximate solutions converge to the dissipative measure-valued solution of the Navier-Stokes equation.

Keywords

Compressible Navier-Stokes Equation, Weak Solution, Maximum Density Constraint, Dissipative Measure-Valued Solution

1. 引言

在本文中，主要研究定义在$(0,T)\times\Omega, T>0$上的带有奇性压强项的可压 Navier-Stokes 方程：

$$\begin{aligned}&\partial_t\rho+\operatorname{div}_x(\rho\mathbf{u})=0,\\&\partial_t(\rho\mathbf{u})+\operatorname{div}_x(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla_x[p(\rho)]-\operatorname{div}(\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}))=0,\\&(\rho,(\rho\mathbf{u}))_{|t=0}=(\rho_0,\rho_0\mathbf{u}_0),\end{aligned}\tag{1}$$

这里，Ω 是 R^d 的有界开子集($d=2$ 或 3)，并且满足李普希茨边界条件。$\rho\geq 0$ 和 $\mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_d)^{\mathrm{T}}$ 分别是流体的密度和速度。另外，速度 $\mathbf{u}$ 还满足齐次狄利克雷边界条件：

$$\mathbf{u}_{|\partial\Omega}=0.\tag{2}$$

我们将粘性张量表示为：

$$\operatorname{div}(\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}))=\mu\left(\nabla_x\mathbf{u}+\nabla_x^t\mathbf{u}-\frac{2}{3}\operatorname{div}_x\mathbf{u}\mathbb{I}\right)+\eta\operatorname{div}_x\mathbf{u}\mathbb{I},\ 其中\mu>0,\eta\geq 0.$$

我们要求密度具有最大值 ρ_*，这通过引入一个有奇性的压强项实现[1] [2] [3] [4]

$$p(\rho)=\frac{\rho_*\rho^\gamma}{(\rho_*-\rho)^\gamma},\ \gamma>1.\tag{3}$$

由压力具有奇性导致密度不能超过 ρ_*：

$$0\leq\rho(t,\mathbf{x})<\rho_*,\ \text{a.e.}\ (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\Omega.\tag{4}$$

假设初始值 $\rho_0,\mathbf{u}_0$ 满足

$$\begin{gathered}0\leq\rho_0<\rho_*\ \text{ a.e in }\Omega,\ p(\rho_0)\in L^1(\Omega),\\\rho_0\mathbf{u}_0\in\left(L^2(\Omega)\right)^d,\ \rho_0\mathbf{u}_0\mathbf{1}_{\{\rho_0>0\}}=0\ \text{ a.e in }\Omega,\\\rho_0|\mathbf{u}_0|^2\mathbf{1}_{\{\rho_0>0\}}\in L^1(\Omega),\end{gathered}\tag{5}$$

$$M_0=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\rho_0\mathrm{d}y<\rho_*.\tag{6}$$

在本文中，我们要求解满足分布意义下的能量不等式：

$$\partial_t \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + P(\rho)\right]\mathrm{d}x + \int_\Omega \left[\mathbb{S}(\nabla_x \mathbf{u}):\nabla_x \mathbf{u}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 0, \tag{7}$$

这里，$P(\rho)$ 为压强势

$$P(\rho) := \rho\int_0^\rho \frac{p(z)}{z^2}\mathrm{d}z. \tag{8}$$

Diperna 首先在[5]中介绍了满足守恒律的偏微分方程的测度值解。在无粘性流体动力学领域，[6] [7] [8]给出各种模型测度值解的存在性。Neustupa 在[8]中研究了(1)的测度值解，但是并没有涉及能量。为了弥补这一点，Feireisl 在[9]引入一个耗散测度值(DMV, dissipative measure-valued)解的概念，给出了一个研究 Naiver-Stokes 方程的框架。不同于常见的弱解，DMV 解可对较广泛的 γ 值存在[9]。而且一系列逼近模型和数值格式可被说明收敛于 DMV 解，并且耗散测度值解满足弱强唯一性原理[9]。弱强唯一性原理是指只要存在经典解，DMV 解与具有相同初值的经典解保持一致。这一原理对于不可压的纳维－斯托克斯方程在[10]和[11]中给出了证明。

目前，研究关于有最大密度限制(1.3)的纳维－斯托克斯方程的论文较少。在文献[1]中对交通流模型进行了这样限制，其中压强项为 $p^\epsilon(\rho) = \epsilon p(\rho)$，$p$ 满足(3)，ϵ 为模型参数，文中主要研究奇性极限 $\epsilon \to 0$。文献[3]分析了具有最大密度约束 $p^\epsilon(\rho) = \epsilon p(\rho)$ 的自驱动个体的宏观模型。在这两篇文献中都将两相(自由/拥塞)模型视作为模型随 $\epsilon \to 0$ 得到的极限。根据[12]中提到的术语，称该极限模型为硬拥塞模型(hard congestion model)，相反地，称 $\epsilon > 0$ 的模型为软拥塞模型(soft congestion model)。[3]研究了一个自组织宏观流体模型 $\epsilon \to 0$ 的一维黎曼问题。[2] [4]分别对欧拉系统和自组织流体动力学模型进行了软拥塞模型的数值实验。[13]中获得了关于多维纳维－斯托克斯方程的硬拥塞模型和软拥塞模型的严格结果，并严格证明了 $\epsilon \to 0$ 极限。在[14]中，分析了纳维－斯托克斯方程的软拥塞模型的数值格式。[15]研究了在 exterior domain 中类似的具有软拥塞的纳维－斯托克斯方程，并证明了弱解的存在性。[12]研究了一维欧拉方程的软拥塞模型，详细介绍了奇性压力对光滑解爆破的影响，还证明了光滑解的奇性极限趋于硬拥塞的欧拉方程。在[16]中，证明了软拥塞欧拉系统二维黎曼问题的容许弱解的非唯一性，其中初始值与[18]一致。

本文的目的是利用 Brenner 模型构造近似解收敛到纳维－斯托克斯方程(1) (2)的耗散测度值解。相比于[13] [14]中的弱解，利用耗散测度值解可给出一个更简易的证明。

由于压强具有奇性，我们需要引入一个截断参数 $\delta \in (0,1)$ 和人为的压力项 $\theta\rho^J$，其中 J 是足够大的正数，具体值在后续给出。给定近似压强 $p^{\theta,\delta}$ 满足

$$p^{\theta,\delta}(\rho) = \theta\rho^J + \begin{cases} \dfrac{\rho_*^\gamma \rho^\gamma}{(\rho_* - \rho)^\gamma}, & 0 < \rho \le \rho_* - \delta, \\ \dfrac{\rho_*^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}}\rho^\gamma - C_0(\delta), & \rho > \rho_* - \delta, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $C_0(\delta) = \left[\dfrac{\rho_*^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}} - \dfrac{\rho_*^\gamma}{\delta^\gamma}\right](\rho_* - \delta)^\gamma$。需要注意的是在 $\rho > \rho_* - \delta$ 时，$\dfrac{\rho_*^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}}\rho^\gamma - C_0(\delta) \ge 0$。这种截断的灵感来自[13] [14]中具有拥塞的纳维－斯托克斯方程中的压强截断。将(8)中 p 替换成 $p^{\theta,\delta}$，可以给出与近似压强对应的压强势 $P^{\theta,\delta}$ 的定义。其准确的表达式将在后面给出。

为了研究系统(1)的测度值解，我们考虑 Brenner 在文献[17]中提出的粘性可压流体模型。对固定的 $\theta, \delta > 0, K > 0$，Brenner 模型具有下列形式

$$\partial_t \rho^\delta + \mathrm{div}_x\left(\rho^\delta \mathbf{u}^\delta\right) = K\Delta\rho^\delta, \tag{10}$$

$$\partial_t\left(\rho^\delta \mathbf{u}^\delta\right)+\operatorname{div}_x\left(\rho^\delta \mathbf{u}^\delta \otimes \mathbf{u}^\delta\right)+\nabla_x\left[p^{\theta,\delta}(\rho)\right]=\operatorname{div}\left(\mathbb{S}\left(\nabla_x \mathbf{u}^\delta\right)\right)+K\operatorname{div}_x\left(\mathbf{u}^\delta \otimes \nabla_x \rho^\delta\right),$$

且满足相关边界条件

$$\left.\mathbf{u}^\delta\right|_{\partial\Omega}=0, \nabla_x \rho^\delta \cdot \left.\mathbf{n}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

此外，方程(10)的光滑解满足完全的能量平衡

$$\partial_t \int_\Omega\left[\frac{1}{2}\rho^\delta\left|\mathbf{u}^\delta\right|^2+P\left(\rho^\delta\right)\right]\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[\mathbb{S}\left(\nabla_x \mathbf{u}^\delta\right):\nabla_x \mathbf{u}^\delta+KP''\left(\rho^\delta\right)\left|\nabla_x \rho^\delta\right|^2\right]\mathrm{d}x=0. \tag{11}$$

我们首先要证明对固定的 $K>0$，当 $\theta,\delta\to 0$，该方案存在一组弱解 $\rho_K,\mathbf{u}_K$。再让 $K\to 0$，由弱解 $\{\rho_K,\mathbf{u}_K\}$ 可得带有奇性压强 p 的纳维–斯托克斯方程系统的耗散测度值解。

定理 1.1. 假设 Ω 是 R^2 或 R^3 上的规则的有界区域，若对初始值 $\{\rho_0,\mathbf{u}_0\}$ 有 $\int_\Omega \frac{1}{2}\rho_0\left|\mathbf{u}_0\right|^2+P(\rho_0)\mathrm{d}x$ 有界，则方程存在耗散测度值解

$$\mathcal{V}_{t,x}\in L^\infty_{\text{weak}}\left((0,T)\times\Omega;\mathcal{P}\left([0,\infty)\times R^N\right)\right),\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\right\rangle\equiv\rho,\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\mathbf{v}\right\rangle\equiv\mathbf{u},$$

详细定义见定义 2.2，且满足初始值 $\mathcal{V}_{0,x}=\delta_{\rho_0(x),\mathbf{m}_0(x)}$。

2. 定义及引理

在此节中介绍基础的符号与定义以及其后证明所需的引理。

2.1. 符号和定义

定义 2.1. (弱形式，见[18]中定义 2.1) 对于(1) (2)，有下列弱形式：

对任意 $s\in[0,T],\varphi\in C^1([0,T]\times\Omega)$ 有

$$\left[\int_\Omega \rho\varphi\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s}=\int_0^s\int_\Omega\left[\rho\partial_t\varphi+\rho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t; \tag{12}$$

对任意 $s\in[0,T],\boldsymbol{\varphi}\in C^1\left([0,T]\times\Omega;R^N\right)$ 有

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s}=&\int_0^s\int_\Omega\left[\rho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}+\rho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}):\nabla_x\boldsymbol{\varphi}+p(\rho)\operatorname{div}_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_0^s\int_\Omega\left[\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{13}$$

注 2.1. 对于近似压强 $p^{\theta,\delta}(\rho)$ 有类似的定义。

关于能量不等式，对任意 $s\in[0,T],\varphi\in C^1([0,T]\times\Omega),\varphi\ge 0$ 有

$$\begin{aligned}&\left[\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+P(\rho)\right)\varphi\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s}\\&\le\int_0^s\int_\Omega\left[\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+P(\rho)\right)\partial_t\varphi+\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+P(\rho)\right)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi+p(\rho)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad-\int_0^s\int_\Omega\left[\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{14}$$

定义 2.2. (耗散测度值解，见[9]中定义 2.1) 我们称 $\{\mathcal{V}_{t,x}\}_{t\in(0,T),x\in\Omega}$ 为方程(1)的耗散测度值解，如果概率测度

$$\{\mathcal{V}_{t,x}\}_{t\in(0,T),x\in\Omega}\in L^\infty_{\text{weak}}\left((0,T)\times\Omega;\mathcal{P}\left([0,\infty)\times R^N\right)\right),\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\right\rangle\equiv\rho,\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\mathbf{v}\right\rangle\equiv\mathbf{u},$$

初始条件为$\mathcal{V}_{0,x}\in\mathcal{P}(\mathcal{F})$。存在耗散缺陷(dissipative defect)$\mathcal{D}\in L^{\infty}(0,T),\mathcal{D}\geq 0$，其中$\mathcal{P}$表示概率测度集，使得该测度满足

- 连续方程 存在测度$r^{C}\in L^{1}\left([0,T];\mathcal{M}(\bar{\Omega})\right)$ $\chi\in L^{1}(0,T)$使得对几乎所有的$s\in(0,T)$和每个$\varphi\in C^{1}\left([0,T]\times\bar{\Omega}\right)$有

$$\left|\left\langle r^{C}(s);\nabla_{x}\varphi\right\rangle\right|\leq\chi(s)\mathcal{D}(s)\|\varphi\|_{C^{1}(\bar{\Omega})}$$

和

$$\left[\int_{\Omega}\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\right\rangle\varphi\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s}=\int_{0}^{s}\int_{\Omega}\left[\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\right\rangle\partial_{t}\varphi+\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\mathbf{v}\right\rangle\cdot\nabla_{x}\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{0}^{s}\left\langle r^{C};\nabla_{x}\varphi\right\rangle\mathrm{d}t. \tag{15}$$

- 动量方程 速度$\mathbf{u}$满足$\mathbf{u}=\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\mathbf{v}\right\rangle\in L^{2}\left(0,T;W_{0}^{1,2}\left(\Omega;R^{N}\right)\right)$，存在测度$r^{M}\in L^{1}\left([0,T];\mathcal{M}(\bar{\Omega})\right)$和$\xi\in L^{1}(0,T)$使得对几乎所有的$s\in(0,T)$和每个$\boldsymbol{\varphi}\in C^{1}\left([0,T]\times\bar{\Omega};R^{N}\right),\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega}=0$有

$$\left|\left\langle r^{M}(s);\nabla_{x}\boldsymbol{\varphi}\right\rangle\right|\leq\xi(s)\mathcal{D}(s)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{C^{1}(\bar{\Omega})}$$

和

$$\begin{aligned}&\left[\int_{\Omega}\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\mathbf{v}\right\rangle\cdot\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s}\\&=\int_{0}^{s}\int_{\Omega}\left[\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau\mathbf{v}\right\rangle\cdot\partial_{t}\boldsymbol{\varphi}+\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\tau(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\right\rangle:\nabla_{x}\boldsymbol{\varphi}+\left\langle\mathcal{V}_{t,x};p(\tau)\right\rangle\mathrm{div}_{x}\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad-\int_{0}^{s}\int_{\Omega}\left[\mathbb{S}(\nabla_{x}\mathbf{u}):\nabla_{x}\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{0}^{s}\left\langle r^{M};\nabla_{x}\boldsymbol{\varphi}\right\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{16}$$

- 能量不等式 对于所有$s\in(0,T)$有

$$\left[\int_{\Omega}\left\langle\mathcal{V}_{t,x};\left(\frac{1}{2}\tau|\mathbf{v}|^{2}+P(\tau)\right)\right\rangle\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s}+\int_{0}^{s}\int_{\Omega}\left[\mathbb{S}(\nabla_{x}\mathbf{u}):\nabla_{x}\mathbf{u}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\mathcal{D}(s)\leq 0. \tag{17}$$

- Poincaré’s inequality 成立：对几乎所有的$s\in(0,T)$有

$$\int_{0}^{s}\int_{\Omega}\left\langle\mathcal{V}_{t,x};|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^{2}\right\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq c_{p}\mathcal{D}(s).$$

注 2.2.对于近似压强$p^{\theta,\delta}(\rho)$有相似的定义。

定义 2.3. (见[19]) 对于L^{1}函数列$\{f_{j}\}$，若给定$\epsilon>0$，存在$\omega>0$(仅依赖ϵ)满足$|E|<\epsilon$使得对所有的j有

$$\int_{E}\left|f_{j}(x)\right|\mathrm{d}x<\epsilon$$

那么称函数列$\{f_{j}\}$是等可积的。

定义 2.4. (见[13]) 假设Ω是$\mathbb{R}^{3}$上的有界李普希茨区域，则存在线性算子$\mathcal{B}_{\Omega}=\left(\mathcal{B}_{\Omega}^{1},\mathcal{B}_{\Omega}^{2},\mathcal{B}_{\Omega}^{3}\right)$满足下列性质：

$$\mathcal{B}_{\Omega}:\overline{L^{p}}(\Omega)\rightarrow\left(W_{0}^{1,p}(\Omega)\right)^{3},1<p<\infty;$$

$$\mathrm{div}\left(\mathcal{B}_{\Omega}(f)\right)=f\ \text{ a.e. in }\Omega,f\in\overline{L^{p}}(\Omega);$$

$$\left\|\nabla\mathcal{B}_{\Omega}(f)\right\|_{L^{p}(\Omega)}\leq c(p,\Omega)\|f\|_{L^{p}(\Omega)},1<p<\infty;$$

若$f=\mathrm{div}(g)$，这里$g\in L^{p}(\Omega),\mathrm{div}(g)\in L^{q}(\Omega),1<q<\infty$，则$\left\|\mathcal{B}_{\Omega}(f)\right\|_{L^{q}(\Omega)}\leq c(q,\Omega)\|g\|_{L^{q}(\Omega)}$，其中$\overline{L^{p}}(\Omega)=\left\{f\in L^{p}(\Omega):\int_{\Omega}f(y)\mathrm{d}y=0\right\}$，并且称$\mathcal{B}$为 Bogovskii 算子。

2.2. 引理

引理 2.1. 对于形如(9)的 $p^{\theta,\delta}$ 有

$$P^{\theta,\delta}(\rho)=\frac{\theta}{J-1}\rho^{J}+\begin{cases}\dfrac{\rho}{(\gamma-1)\left(\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho_*}\right)^{\gamma-1}}, & 0<\rho\le\rho_*-\delta,\\ \dfrac{\rho_*^{\gamma+1}}{(\gamma-1)\delta^{\gamma+1}}\rho^{\gamma}-C_1(\delta)\rho-C_0(\delta)\left[\dfrac{\rho-(\rho_*-\delta)}{\rho_*-\delta}\right], & \rho>\rho_*-\delta,\end{cases}\tag{18}$$

其中

$$C_1(\delta)=\left[\frac{\rho_*^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}}-\frac{\rho_*^{\gamma-1}}{\delta^{\gamma-1}}\right]\frac{(\rho_*-\delta)^{\gamma-1}}{\gamma-1}.$$

且 $p^{\theta,\delta}(\rho)$ 关于 ρ 是一阶连续的，

$$\frac{\mathrm{d}p^{\theta,\delta}}{\mathrm{d}\rho}(\rho)=\theta J\rho^{J-1}+\begin{cases}\dfrac{\gamma}{\rho^2\left(\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho_*}\right)^{\gamma+1}}, & 0<\rho\le\rho_*-\delta,\\ \dfrac{\gamma\rho_*^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}}\rho^{\gamma-1}, & \rho>\rho_*-\delta.\end{cases}\tag{19}$$

注 2.3. 比较(9)，(18)可知，在 ρ 较接近 ρ_* 的区域，由 $P^{\theta,\delta}$ 的一致界不能得到 $p^{\theta,\delta}$ 的一致界，这是最大密度限制带来的难点。

引理 2.2. (见[9])对于方程(10)，通过对能量平衡(11)关于时间 t 积分得到下列先验估计：

$$\sup_{s\in[0,T]}\int_\Omega P^{\theta,\delta}\left(\rho_K^\delta\right)(s,\cdot)\mathrm{d}x\le c\Rightarrow\sup_{s\in[0,T]}\int_\Omega\rho_K^\delta\log\left(\rho_K^\delta\right)(s,\cdot)\mathrm{d}x\le c,$$

$$\sup_{s\in[0,T]}\int_\Omega\rho_K^\delta\left|\mathbf{u}_K^\delta\right|^2(s,\cdot)\mathrm{d}x\le c,\tag{20}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\mathbb{S}\left(\nabla_x\mathbf{u}_K^\delta\right):\nabla_x\mathbf{u}_K^\delta\mathrm{d}x\le c\Rightarrow\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla_x\mathbf{u}_K^\delta\right|^2\mathrm{d}x\le c\Rightarrow\int_0^T\int_\Omega\left|\mathbf{u}_K^\delta\right|^2\mathrm{d}x\le c,$$

$$K\int_0^T\int_\Omega\frac{\left(p^{\theta,\delta}\left(\rho_K^\delta\right)\right)'}{\rho_K^\delta}\left|\nabla_x\rho_K^\delta\right|^2\mathrm{d}x\le c.\tag{21}$$

注 2.4. 这些有界性在 $K\to0,\theta\to0,\delta\to0$ 是一致成立的。

另一方面，由于

$$P_K^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)=\rho^\delta\int_0^{\rho^\delta}\frac{p^{\theta,\delta}(z)}{z^2}\mathrm{d}z\ge\frac{\theta}{J-1}\left(\rho^\delta\right)^J,\tag{22}$$

所以 ρ^δ 在 $L^J((0,T)\times\Omega)$ 上对 K,δ 一致有界，但对 θ 不是一致的。

我们还需要关于 Young 测度的两条引理。

引理 2.3. (见[19])给定 $\Omega\in\mathbf{R}^N$ 是可测集，$z_j:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 是可测函数并且满足

$$\sup_j\int_\Omega g\left(\left|z_j\right|\right)\mathrm{d}x<\infty,$$

其中 $g:[0,\infty)\to[0,\infty]$ 是连续非减函数并且 $\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$，那么存在一个子列(不重新标记)以及一族概率测

度 $\nu=\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ (相关的参数测度)使得对任意 Carathéodory 函数 $\psi(x,\lambda)$，若函数列 $\{\psi(x,z_j(x))\}$ 在空间 $L^1(\Omega)$ 中弱收敛，则弱极限为函数

$$\bar{\psi}(x)=\int_{\mathbf{R}^m}\psi(x,\lambda)\mathrm{d}\nu_x(\lambda).$$

注 2.5. 若函数 $\psi(x,\lambda):\Omega\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^*$ 关于 x 是可测函数，关于 λ 是连续函数，则称 $\psi(x,\lambda)$ 为 Carathéodory 函数(见[19])。

注 2.6. 引理 2.3 中取 $g(t)=t^p, p>1$，则 $L^p(\Omega)$ 中的所有有界函数列都存在能够产生参数测度的子列。但对于 $L^1(\Omega)$ 中的一致有界函数列不一定能得到这种弱收敛性。比如 $p^{\theta,\delta}$ 和 $\rho^\delta(\mathbf{u}^\delta\otimes\mathbf{u}^\delta)$。为此需要下列引理。

引理 2.4. (见[9]) 设给定等可积的函数列 $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$，$\mathbf{Z}_n:Q\to\mathbb{R}^N$ 产生 Young 测度 $\nu_y, y\in Q$，其中 $Q\subset\mathbb{R}^M$ 为有界区域。令

$$G:\mathbb{R}^N\to[0,\infty)$$

为连续函数且使

$$\sup_{n\geq0}\|G(\mathbf{Z}_n)\|_{L^1(Q)}<\infty$$

并且令 F 是连续的且使 $F:\mathbb{R}^N\to R, |F(\mathbf{Z})|\leq G(\mathbf{Z})$，对所有的 $\mathbf{Z}\in\mathbb{R}^N$ 记

$$F_\infty=\tilde{F}-\langle\nu_y,F(Z)\rangle\mathrm{d}y,\ G_\infty=\tilde{G}-\langle\nu_y,G(Z)\rangle\mathrm{d}y$$

其中 $\tilde{F}\in\mathcal{M}(\bar{Q}),\tilde{G}\in\mathcal{M}(\bar{Q})$ 分别是 $\{F(\mathbf{Z}_n)\}_{n\geq1},\{G(\mathbf{Z}_n)\}_{n\geq1}$ 在 $\mathcal{M}(\bar{Q})$ 中的弱 $*$ 极限，则

$$|F_\infty|\leq G_\infty.$$

3. 定理证明

为证明(10)的解在 $K\to0,\delta\to0$ 时收敛到 Navies-Stokes 方程的测度值解，我们需要证明逼近解关于参数 δ,K,θ 的一致估计。由引理 2.2 已经得到部分估计。但不同于[9]，在最大密度限制下，不能从 P^δ 的 L^1 估计中得到 p^δ 的 L^1 估计。因此类似[13]我们定义测试函数

$$\varphi(t,x)=\psi(t)\mathcal{B}\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right),\ \psi(t)\in C_0^\infty((0,T)),\ \psi\geq0,$$

其中 $\overline{\rho^\delta}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\rho^\delta\mathrm{d}y$，$\mathcal{B}$ 是 Bogovskii 算子。

对动量方程乘以上述测试函数得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\psi p^{\theta,\delta}(\rho^\delta)\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\int_0^T\int_\Omega\rho^\delta\mathbf{u}^\delta\cdot\partial_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\rho^\delta(\mathbf{u}^\delta\otimes\mathbf{u}^\delta):\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}):\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^3I_i.\end{aligned}\tag{23}$$

接下来证明，从(20)中得到的先验估计可以控制表达式的右边。事实上，对于第一项可以写作

$$I_1=-\int_0^T\int_\Omega\psi'\rho^\delta\mathbf{u}^\delta\cdot\mathcal{B}\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\psi\rho^\delta\mathbf{u}^\delta\cdot\partial_t\mathcal{B}\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

取 $J>3$，由(22)和 Bogovskii 算子性质，并结合质量方程可以得到

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le C\int_0^T \left\|\rho^\delta\right\|_{L^3(\Omega)} \left\|\mathbf{u}^\delta\right\|_{L^6(\Omega)} \left\|\nabla\mathcal{B}\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\right\|_{L^{6/5}(\Omega)} \mathrm{d}t \\
&\quad + C\int_0^T \left\|\rho^\delta\right\|_{L^3(\Omega)} \left\|\mathbf{u}^\delta\right\|_{L^6(\Omega)} \left\|\mathcal{B}\left(\operatorname{div}\left(\rho^\delta\mathbf{u}^\delta\right)\right)\right\|_{L^{6/5}(\Omega)} \mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^T \left\|\rho^\delta\right\|_{L^3(\Omega)}^2 \left\|\mathbf{u}^\delta\right\|_{L^6(\Omega)} \mathrm{d}t + C\int_0^T \left\|\rho^\delta\right\|_{L^3(\Omega)}^2 \left\|\mathbf{u}^\delta\right\|_{L^6(\Omega)}^2 \mathrm{d}t \\
&\le C.
\end{aligned}
$$

这里 C 为常数，为了记号方便起见，我们将不对 C 进行区分，但它们指代的是不同常数。相似地，对于第二项有

$$
I_2 = \int_0^T\int_\Omega \psi\rho^\delta\left(\mathbf{u}^\delta\otimes\mathbf{u}^\delta\right):\nabla\mathcal{B}\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\le C\int_0^T\int_\Omega \rho^\delta\left|\mathbf{u}^\delta\right|^2\left|\nabla\mathcal{B}\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^T \left\|\rho^\delta\right\|_{L^3(\Omega)}^2 \left\|\mathbf{u}\right\|_{L^6(\Omega)}^2 \mathrm{d}t \le C.
\end{aligned}
$$

对于压力张量 I_3 有

$$
|I_3| \le C\int_0^T \left\|\nabla\mathbf{u}^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\rho^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t \le C.
$$

整合这些估计可以证明(23)的左边对 δ, K 是一致有界的。现在，将(23)式左边项分成下述两个部分

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \psi\, p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T\int_\Omega \psi\, p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathbf{1}_{\left\{\rho^\delta<\frac{\rho_*+M_0}{2}\right\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega \psi\, p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathbf{1}_{\left\{\rho^\sigma\ge\frac{\rho_*+M_0}{2}\right\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

在第一个积分中， $p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)$ 不在奇点 ρ_* 附近，所以该积分是有限的。对于第二项积分有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \psi\, p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\left(\rho^\delta-\overline{\rho^\delta}\right)\mathbf{1}_{\left\{\rho^\delta\ge\frac{\rho_*+M_0}{2}\right\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\ge \left(\frac{\rho_*-M_0}{2}\right)\int_0^T\int_\Omega \psi\, p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\mathbf{1}_{\left\{\rho^\delta\ge\frac{\rho_*+M_0}{2}\right\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

结合(6)和 $p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)$ 定义得

$$
\int_0^T\int_\Omega p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C
$$

并且由第一项积分的控制得到

$$
\int_0^T\int_\Omega \rho^\delta p^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C
$$

从而得到 $p^{\theta,\delta}$ 的 L^1 有界。注意到上述证明中用到引理 2.3 中的各一致有界，故 $p^{\theta,\delta}$ 的 L^1 模对 K,δ 一致有界，但不对 θ 一致有界。

另一方面，由引理 2.3 得

$$
\int_\Omega P^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\mathrm{d}x \le C,
$$

经过简单计算得

$$C \ge \int_\Omega P^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\mathrm{d}x \ge \int_{\rho^\delta \ge \rho_* - \delta} P^{\theta,\delta}\left(\rho^\delta\right)\mathrm{d}x$$
$$\ge \int_{\rho^\delta \ge \rho_* - \delta} \frac{\rho_*^{\gamma+1}}{(\gamma-1)\delta^{\gamma+1}}\rho^\gamma - C_1(\delta)\rho - C_0(\delta)\left[\frac{\rho-(\rho_*-\delta)}{\rho_*-\delta}\right]\mathrm{d}x$$
$$\ge \frac{(\rho_*-\delta)^{\gamma-1}\rho_*^{\gamma-1}}{(\gamma-1)\delta^{\gamma-1}}\mathrm{meas}\left\{\rho^\delta \ge \rho_* - \delta\right\},$$

这里 $\mathrm{meas}\{\cdot\}$ 是通常的勒贝格测度。所以，当 $\rho^\delta \ge \rho_* - \delta$，随着 $\delta \to 0$，该集合的测度收敛到 0。

$$\mathrm{meas}\left\{\rho^\delta \ge \rho_* - \delta\right\} \le \frac{(\gamma-1)\delta^{\gamma-1}}{(\rho_*-\delta)^{\gamma-1}\rho_*^{\gamma-1}} C \to 0 \quad \text{as} \quad \delta \to 0 .$$

因此，当 $\theta \to 0, \delta \to 0$ 时，仍有 $\rho^\delta < \rho_*$ a.e in Ω。故 ρ^δ 在 L^J 上关于 K,δ,θ 是一致有界的。

下面证明当 $\theta,\delta,K \to 0$ 时，方程(10)的逼近解收敛到方程(1)的耗散测度值解。方程(10)满足以下弱形式：

对任意的 $s \in [0,T], \varphi \in C^1\left([0,T]\times\bar{\Omega}\right)$ 有

$$\left[\int_\Omega \rho_K \varphi \mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s} = \int_0^s \int_\Omega \left[\rho_K \partial_t \varphi + \rho_K \mathbf{u}_K \cdot \nabla_x \varphi - K \nabla_x \rho_K \cdot \nabla_x \varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

对任意的 $s \in [0,T], \boldsymbol{\varphi} \in C^1\left([0,T]\times\bar{\Omega}; R^N\right)$ 有

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega \rho_K \mathbf{u}_K \cdot \boldsymbol{\varphi} \mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s} &= \int_0^s \int_\Omega \left[\rho_K \mathbf{u}_K \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + (\mathbf{u}_K \otimes \mathbf{u}_K) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + p(\rho_K)\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_0^s \int_\Omega \left[\mathbb{S}(\nabla_x \mathbf{u}_K) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + K(\mathbf{u}_K \otimes \nabla_x \rho_K) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{26}$$

我们将与 K 相关的项可以写成下列形式

$$K\int_0^s \int_\Omega \nabla_x \rho_K \cdot \nabla_x \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \sqrt{K}\int_0^s \int_\Omega \sqrt{K}\frac{\nabla_x \rho_K}{\sqrt{\rho_K}} \cdot \sqrt{\rho_K}\nabla_x \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$K\int_0^s \int_\Omega (\mathbf{u}_K \otimes \nabla_x \rho_K) : \nabla_x \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \sqrt{K}\int_0^s \int_\Omega \left(\sqrt{\rho_K}\mathbf{u}_K \otimes \sqrt{K}\frac{\nabla_x \rho_K}{\sqrt{\rho_K}}\right) : \nabla_x \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{27}$$

当 ρ_K 较大时，上述积分可以被(20)控制；对较小的 ρ_K，利用 renormalized solution 可以得到关于 $\nabla_x \rho_K$ 的估计，具体方法可见[9]。因此当(21)成立，(26)中与 K 相关的项会随着 $K \to 0$ 消失。

由先验估计和引理 2.3，近似解 $\rho_K, \mathbf{u}_K$ 可以得到一个 Young 测度 $\mathcal{V}_{t,x} \in \mathcal{P}\left([0,\infty)\times R^N\right)$，对几乎所有的 $(t,x) \in (0,T)\times\Omega$ 并且记 $\overline{F(\rho,\mathbf{u})}(t,x) = \left\langle \mathcal{V}_{t,x}; F(\tau,\mathbf{v})\right\rangle$ 其中 $\tau \approx \rho, \mathbf{v} \approx \mathbf{u}$ 为相应的 dummy variable。

因为 $\frac{1}{2}\rho_K|\mathbf{u}_K|^2 + P(\rho_K), \mu|\nabla_x \mathbf{u}_K|^2 + \lambda|\mathrm{div}_x \mathbf{u}_K|^2$ 分别在 $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$ 和 $\mathcal{M}^+\left([0,T]\times\bar{\Omega}\right)$ 上有界，所以存在子列满足

$$\left[\frac{1}{2}\rho_K|\mathbf{u}_K|^2 + P(\rho_K)\right](s,\cdot) \to E \quad \text{weakly-}(*) \text{ in } L^\infty_{\text{weak}}\left(0,T;\mathcal{M}(\bar{\Omega})\right),$$

$$\left[\mu|\nabla_x \mathbf{u}_K|^2 + \lambda|\mathrm{div}_x \mathbf{u}_K|^2\right] \to \sigma \quad \text{weakly-}(*) \text{ in } \mathcal{M}^+\left([0,T]\times\bar{\Omega}\right).$$

这里我们定义一个新测度

$$E_\infty = E - \left\langle \mathcal{V}_{t,x}, \frac{1}{2}\tau|\mathbf{v}|^2 + P(\tau)\right\rangle \mathrm{d}x$$

$$\sigma_\infty = \sigma - \left[\mu\left|\nabla\left\langle \mathcal{V}_{t,x}, \mathbf{v}\right\rangle\right|^2 + \lambda\left(tr\left|\nabla\left\langle \mathcal{V}_{t,x}, \mathbf{v}\right\rangle\right|\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

让能量平衡(11)中的 $K \to 0$ 得，对几乎所有的 $s \in (0,T)$，

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \overline{\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + P(\rho)\right)}(s,\cdot)\mathrm{d}x + E_\infty(s)\left[\bar{\Omega}\right]\\&+\int_0^s\int_\Omega \mu\left|\nabla_x\bar{\mathbf{u}}\right|^2 + \lambda\left|\mathrm{div}_x\bar{\mathbf{u}}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \sigma_\infty\left[[0,s]\times\bar{\Omega}\right]\\&\le \int_\Omega \overline{\left(\frac{1}{2}\rho_0\left|\mathbf{u}_0\right|^2 + P(0)\right)}\mathrm{d}x + E_\infty(0)\left[\bar{\Omega}\right].\end{aligned} \tag{28}$$

由 $\{\rho_K\}$ 在 $L\log L$ 上一致有界得 $\{\rho_K\}$ 在 $C_{\mathrm{weak}}\left([0,T];L^1(\Omega)\right)$ 上是紧的。因此，当 $K \to 0$，对任意 $\varphi \in C^1\left([0,T]\times\bar{\Omega}\right)$，(26)中的连续方程可以写为

$$\left[\int_\Omega \bar{\rho}\varphi\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s} = \int_0^s\int_\Omega\left[\bar{\rho}\partial_t\varphi + \overline{\rho\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{29}$$

这里 $r^C = 0, \chi = 0$。

对(26)中的动量方程取极限，但是其中的 $\rho_K\mathbf{u}_K \otimes \mathbf{u}_K$ 和 $p(\rho_K)$ 仅在 $L^\infty\left(L^1\right)$ 上有界，因此我们需要用到引理2.4，使用与[9]中相似的处理方法。结合p在 L^1 上有界，可以得到 $K \to 0$，对任意 $\boldsymbol{\varphi} \in \left([0,T]\times\bar{\Omega};R^N\right)$，$\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega} = 0$ 有

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega \overline{\rho\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=s} &= \int_0^s\int_\Omega\left[\overline{\rho\mathbf{u}}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} + \overline{\rho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi} + \overline{p(\rho)}\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_0^s\int_\Omega\overline{\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u})}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^s\left\langle r^M;\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right\rangle\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{30}$$

其中对几乎所有的 $s \in (0,T)$，$r^M = \left\{r_{i,j}^M\right\}_{i,j=1}^H$，$r_{i,j}^M \in L_{\mathrm{weak}}^\infty\left(0,T;\mathcal{M}\left(\bar{\Omega}\right)\right)$，$\left|r_{i,j}^M(s)\right| \le cE_\infty(s)$，即 $\xi = c$。

最后，Poincaré’s inequality 成立可见[9]。

因此，当 $K \to 0$ 时，近似解 $\rho_K, \mathbf{u}_K$ 可以得到一组测度值解。定理证明到此结束。

参考文献

[1] Berthelin, F., Degond, P., Delitala, M. and Rascle, M. (2008) A Model for the Formation and Evolution of Traffic Jams. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **187**, 185-220. https://doi.org/10.1007/s00205-007-0061-9

[2] Degond, P., Hua, J. and Navoret, L. (2011) Numerical Simulations of the Euler System with Congestion Constraint. *Journal of Computational Physics*, **230**, 8057-8088. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.07.010

[3] Degond, P., Navoret, L., Bon, R. and Sanchez, D. (2010) Congestion in a Macroscopic Model of Self-Driven Particles Modeling Gregariousness. *Journal of Statistical Physics*, **138**, 85-125. https://doi.org/10.1007/s10955-009-9879-x

[4] Degond, P. and Hua, J. (2013) Self-Organized Hydrodynamics with Congestion and Path Formation in Crowds. *Journal of Computational Physics*, **237**, 299-319. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.11.033

[5] Di Perna, R.J. (1985) Measure-Valued Solutions to Conservation Laws. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **88**, 223-270. https://doi.org/10.1007/BF00752112

[6] Di Perna, R.J. and Majda, A.J. (1987) Oscillations and Concentrations in Weak Solutions of the Incompressible Fluid Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **108**, 667-689. https://doi.org/10.1007/BF01214424

[7] Gwiazda, P. (2010) On Measure-Valued Solutions to a Two-Dimensional Gravity-Driven Avalanche Flow Model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **28**, 2201-2223. https://doi.org/10.1002/mma.660

[8] Neustupa, J. (1993) Measure-Valued Solutions of the Euler and Navier-Stokes Equations for Compressible Barotropic Fluids. *Mathematische Nachrichten*, **163**, 217-227. https://doi.org/10.1002/mana.19931630119

[9] Feireisl, E., Gwiazda, P., Gwiazda, A.Ś. and Wiedemann, E. (2016) Dissipative Measure-Valued Solutions to the Compressible Navier-Stokes System. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55**, Article No. 141. https://doi.org/10.1007/s00526-016-1089-1

[10] Prodi, G. (1959) Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **48**, 173-182. https://doi.org/10.1007/BF02410664

[11] Serrin, J. (1963) The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equation. In: Langer, R.E., Ed., *Nonlinear Problems*, University of Wisconsin Press, Madison, 69-98.

[12] Bianchini, R. and Perrin, C. (2021) Soft Congestion Approximation to the One-Dimensional Constrained Euler Equations. *Nonlinearity*, **34**, 6901-6929. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac1e33

[13] Perrin, C. and Zatorska, E. (2015) Free/congested Two-Phase Model from Weak Solutions to Multidimensional Compressible Navier-Stokes Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **40**, 1558-1589. https://doi.org/10.1080/03605302.2015.1014560

[14] Perrin, C. and Saleh, K. (2022) Numerical Staggered Schemes for the Free-Congested Navier-Stokes Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **60**, 1824-1852. https://doi.org/10.1137/21M1436488

[15] Nečasová, Š., Novotný, A. and Roy, A. (2022) Compressible Navier-Stokes System with the Hard Sphere Pressure Law in an Exterior Domain. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **73**, Article No. 197. https://doi.org/10.1007/s00033-022-01809-6

[16] 华嘉乐，夏黎蓉. 最大密度限制下可压等熵欧拉系统含接触间断时可容许弱解的不唯一性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1089-1106. https://doi.org/10.12677/aam.2022.113118

[17] Brenner, H. (2005) Navier-Stokes Revisited. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **349**, 60-132. https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.10.034

[18] Feireisl, E., Lukáčová-Medvidová, M. and Mizerová, H. (2020) Convergence of Finite Volume Schemes for the Euler Equations via Dissipative Measure-Valued Solutions. *Foundations of Computational Mathematics*, **20**, 923-966. https://doi.org/10.1007/s10208-019-09433-z

[19] Pedregal, P. (1997) Parametrized Measures and Variational Principles. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 30, Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8886-8