Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(5), 2303-2309**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125234

Hans汉斯

一类可积非局部CLL方程的求解

方日荣

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年4月24日；录用日期：2023年5月19日；发布日期：2023年5月26日

摘　要

本文基于耦合的Chen-Lee-Liu方程，通过约化得到一类可积非局部的CLL方程，并由可积非局部CLL方程Lax对出发，构造了双边Darboux变换，从而得到零背景下解的表达式。经典的Chen-Lee-Liu (CLL)方程是数学和物理中最重要的可积系统之一，可用于描述光纤中的传播脉冲。目前已经通过Darboux变换法、黎曼－希尔伯特方法、逆散射方法等方法对CLL方程进行求解，得到许多有趣的解。本文从经典耦合的CLL方程扩展到非局部的CLL方程，增添了些与经典CLL方程不同的数学物理性质，具有研究意义。

关键词

Chen-Lee-Liu方程，双边Darboux变化，Lax对

Solution to a Class of Integrable Nonlocal CLL Equations

Rirong Fang

School of Mathematics, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 24th, 2023; accepted: May 19th, 2023; published: May 26th, 2023

Abstract

In this paper, we based on the coupled Chen Lee Liu equation and obtained a class of integrable nonlocal CLL equations through a reduction. Starting from the Lax pair of integrable nonlocal CLL equation, a binary l Darboux transformation is constructed to obtain the expression of the solution under zero background. The classic Chen-Lee-Liu (CLL) equation is one of the most important integrable systems in mathematics and physics, which can be used to describe the propagation of pulses in optical fibers. At present, many interesting solutions have been obtained by solving the CLL equation using methods such as Darboux transformation, Riemann Hilbert problem, and inverse scattering problem. This paper extends from the classical coupled CLL equation to the non-

文章引用: 方日荣. 一类可积非局部 CLL 方程的求解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2303-2309.
DOI: 10.12677/aam.2023.125234

local CLL equation, adding some mathematical physics properties different from the classical CLL equation, which is of research significance.

Keywords

Chen-Lee-Liu Equation, Binary Darboux Transformation, Lax Pair

1. 引言

经典的 Chen-Lee-Liu (CLL)方程[1]

$$iu_t + u_{xx} + i|u|^2 u_x = 0, \tag{1}$$

是数学和物理中最重要的可积系统之一，用于描述光纤中的传播脉冲。该方程(1)可以通过双哈密顿方法从非线性 Schröodinger (NLS)方程

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0, \tag{2}$$

导出，因而也被称为二阶导数非线性 Schödinger 方程(DNLSII)。此外还有两个导数型 NLS 方程，即 KN 方程(DNLSI)

$$u_t + iu_{xx} + \left(|u|^2 u\right)_x = 0. \tag{3}$$

和 GI 方程(DNLSIII)

$$iu_t + u_{xx} - iu^2 u_x^* + \frac{1}{2}u^3\left(u^*\right)^2 = 0, \tag{4}$$

2. 预备知识

Darboux 变换法、黎曼－希尔伯特方法、逆散射方法等都是构造方程解的有效的工具，在求解 CLL 方程中也得到了广泛的使用，借助与这些方法得到了很多有意思的解。Ming-Jun Xu 等人 2019 年使用黎曼－希尔伯特问题构造 CLL 方程的 Lax 对，利用势矩阵的不同对称性，得到两个 N 孤子解公式并给出两个解的等价性[2]。关于 CLL 方程的研究已经扩展到扰动的 CLL 方程，Kudryashov (2019)通过行波约化求解，利用 Weierstrass 和 Jacobi 椭圆函数得到行波约化的一般解[3]。Sibel Tarla (2022)等人利用 Jacobi 椭圆函数，基于扰动的 CLL 方程，得到一些新的 Jacobi 椭圆函数、连杆、三角、双曲、指数、周期和奇异孤立波解[4]。在 2007 年，Moses 等人通过设计了一个实验来证明光脉冲传播涉及自陡化，而没有伴随的自相位调制，得到 CLL 的物理性质[5]。在这项物理实验中促使构造出包括三阶和五阶的任意组合模型，并导出一个高阶 CLL 方程[6]：

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3i}{2}|u|^2 u_{xx} - \frac{3}{4}|u|^4 u_x + \frac{3i}{2}u_x^2 u^* = 0, \tag{5}$$

基于矩阵黎曼－希尔伯特方法研究(2)的逆散射变换，用 Laurent 展开法给出高阶极点解和 N 孤子解，展示并分析了高阶极点孤子的动力学和相互作用。

对于 CLL 方程的非局部方面的部分研究是基于耦合的 CLL 方程，通过不同的约化得到非局部 CLL 方程，这些扩展到非局部的 CLL 方程又增添了些与经典 CLL 方程不同的数学物理性质，具有研究意义。由耦合的高阶 CLL 方程[7]：

$$\begin{aligned} &u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2} iuvu_{xx} - \frac{3}{4} u^2 v^2 u_x + \frac{3}{2} iu_x^2 v = 0, \\ &v_t + v_{xxx} + \frac{3}{2} iuvv_{xx} - \frac{3}{4} u^2 v^2 v_x + \frac{3}{2} iv_x^2 u = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

通过约束 $v = u^*$ 得到(5)。考虑约束 $u = v(-x,-t)$ 得到非局部高阶 CLL 方程[8]：

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3i}{2} uu(-x,-t) u_{xx} - \frac{3}{4} u^2 u(-x,-t)^2 u_x + \frac{3i}{2} u_x^2 u(-x,-t) = 0, \tag{7}$$

又由耦合的 CLL 方程：

$$\begin{aligned} &iu_t + u_{xx} - iuu_x v = 0, \\ &iv_t - v_{xx} - ivv_x u = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

考虑约束 $v = -u^*(x,t)$ 得到 CLL 方程(1)，其中 * 表示复共轭，那么考虑约束 $v = -u^*(-x,-t)$ 得到一个可积非局部非线性 CLL 方程:

$$iu_t + u_{xx} + iuu_x u^*(-x,-t) = 0. \tag{9}$$

3. 非局部 CLL 方程的双边 Darboux 变换

关于非局部 CLL 方程(9)的 Lax 对为：

$$\Phi_x = U\Phi = \left(-i\sigma_3\lambda^2 + Q\lambda - \frac{i}{4}\sigma_3 Q^2\right)\Phi, \tag{10a}$$

$$\Phi_t = V\Phi = \left(-2i\sigma_3\lambda^4 + 2Q\lambda^3 - iQ^2\sigma_3\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}Q^3 - iQ_x\sigma_3\right)\lambda + \frac{1}{4}(Q_x Q - QQ_x) - \frac{i}{8}Q^4\sigma_3\right)\Phi, \tag{10b}$$

其中

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^*(-x,-t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这里 λ 是谱参数，(T 表示转置)。方程(9)可由 Lax 对(10)的相容性条件 $U_t - V_x + UV - VU = 0$ 导出。

那么下面我们取 $\Phi = \Phi(x,t;\lambda_j) = (\phi_1, \phi_2)^{\mathrm{T}}$ 是 Lax 对(10)在 $\lambda = \lambda_j$ 处的特征函数。同样可证明

$$\Psi(x,t;\lambda_j) = \begin{pmatrix} -\phi_2^*(-x,-t;\lambda_j) \\ \phi_1^*(-x,-t;\lambda_j) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

是 Lax 对(10)在 $\lambda = \lambda_j^*$ 处的特征函数。为了简便，我们将 $\Phi(x,t;\lambda_j), \Psi(x,t;\lambda_j), \phi_i(x,t;\lambda_j)$ 简记为 Φ_j, Ψ_j, ϕ_i^j。

那么 Lax 对的伴随问题为

$$\begin{aligned} \theta_x &= -\theta U(\lambda), \\ \theta_t &= -\theta V(\lambda). \end{aligned} \tag{12}$$

可验证 $\theta(x,t;\lambda_j^*) = \Phi(-x,-t;\lambda_j)^\dagger M$ 是伴随问题(12)在 $\lambda = -\lambda_j$ 处的一个特征函数，其中上标 † 表示矩阵的复共轭转置。其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

接下来构造可积非局部 CLL 方程的双边 Darboux 矩阵[9]：

令 $\eta_1=(\Phi_1,\Psi_1)$，得到 Lax 对(10)的一个双边 Darboux 变换：

$$\Phi[1]=T\Phi=\Phi-\eta_1\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\Omega(\eta_1,\Phi),\quad T=I-\eta_1\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\Phi_1^{\dagger}M}{\lambda_1^*-\lambda}\\ \frac{\Psi_1^{\dagger}M}{-\lambda_1-\lambda}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

其中

$$\Omega(\eta_1,\eta_1)=\begin{pmatrix}\frac{\Phi_1^{\dagger}M\Phi_1}{\lambda_1^*-\lambda_1} & \frac{\Phi_1^{\dagger}M\Psi_1}{\lambda_1^*+\lambda_1^*}\\ \frac{\Psi_1^{\dagger}M\Phi_1}{-\lambda_1-\lambda_1} & \frac{\Psi_1^{\dagger}M\Psi_1}{-\lambda_1+\lambda_1^*}\end{pmatrix},\quad \Omega(\eta_1,\Phi)=\begin{pmatrix}\frac{\Phi_1^{\dagger}M\Phi}{\lambda_1^*-\lambda}\\ \frac{\Psi_1^{\dagger}M\Phi}{-\lambda_1-\lambda}\end{pmatrix}.$$

引理 2.1 当 $N=1$ 时，变换(13)是 Lax 对(10)的一阶 Darboux 变换，将 Lax 对转变为

$$\Phi_x[1]=U[1]\Phi[1]=\left(-i\sigma_3\lambda^2+\lambda Q[1]-\frac{i}{4}Q[1]^2\sigma_3\right)\Phi[1], \tag{14a}$$

$$\begin{aligned}\Phi[1]_t=V[1]\Phi[1]=&\left(-2i\sigma_3\lambda^4+2\lambda^3Q[1]-i\lambda^2Q[1]^2\sigma_3+\lambda\left(\frac{1}{2}Q[1]^3-iQ[1]_x\sigma_3\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{4}\left(Q[1]_xQ[1]-Q[1]Q[1]_x\right)-\frac{i}{8}Q[1]^4\sigma_3\right)\Phi[1],\end{aligned} \tag{14b}$$

新旧位势矩阵间关系为：

$$Q[1]=Q+i\left[\eta_1\Omega_1^{-1}\eta_1^{\dagger}M,\sigma_3\right].$$

矩阵 $Q[1]$ 和矩阵 Q 有着一样的结构。则方程(9)的解表达式为：

$$u[1]=u+2i\frac{\begin{vmatrix}\Omega_1 & \mathrm{a}_2^{\dagger}\\ \mathrm{a}_1 & 0\end{vmatrix}}{|\Omega_1|}. \tag{15}$$

其中

$$\mathrm{a}_1=\begin{pmatrix}\phi_1 & -\phi_2^*(-x,-t)\end{pmatrix},\quad \mathrm{a}_2=\begin{pmatrix}\phi_2 & \phi_1^*(-x,-t)\end{pmatrix}.$$

证明：首先证明 $Q[1]$ 和 Q 有相同的结构，设 $S=\eta_1\Omega_1^{-1}\eta_1^{\dagger}M$ 。需证：$-S_{12}^*(-x,-t)=S_{21}$ 。

易得证 $S^{\dagger}=M\eta_1\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}\eta_1^{\dagger}$ 。那么有 $-SM=\eta_1\left(-\Omega^{-1}\right)^{\dagger}\eta_1^{\dagger}$，$MS^{\dagger}=\eta_1\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}\eta_1^{\dagger}$ 。如果有 $-\Omega^{-1}=\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}$ 成立，那么有 $-SM=MS^{\dagger}$，即 $S=-MS^{\dagger}M$ 。

由 $I^{\dagger}=\left(\Omega\Omega^{-1}\right)^{\dagger}=\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}\Omega^{\dagger}=\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}(-\Omega)$，得到 $-\Omega^{-1}=\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}$ 。即如果我们有 $\Omega=-\Omega^{\dagger}$ 成立，则能得到 $-\Omega^{-1}=\left(\Omega^{-1}\right)^{\dagger}$ 成立，又易证 $\Omega=-\Omega^{\dagger}$ 成立。

有 $S_{12}=\begin{pmatrix}\phi_1 & -\phi_2^*(-x,-t)\end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix}\phi_2 & \phi_1^*(-x,-t)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$S_{21}=\begin{pmatrix}\phi_2 & \phi_1^*(-x,-t)\end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix}\phi_1 & -\phi_2^*(-x,-t)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，那么

$$\begin{aligned}-S_{12}^*(-x,-t)&=\begin{pmatrix}-\phi_1^*(-x,-t) & \phi_2\end{pmatrix}\left[-\Omega^{-1*}(-x,-t)\right]\begin{pmatrix}-\phi_2^*(-x,-t) & -\phi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\\&=\begin{pmatrix}\phi_2 & \phi_1^*(-x,-t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\left[-\Omega^{-1*}(-x,-t)\right]\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1 & -\phi_2^*(-x,-t)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

只要有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left[-\Omega^{-1*}(-x,-t)\right]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P\left[-\Omega^{-1*}(-x,-t)\right]P = \Omega^{-1}$，即有 $-S_{12}^{*}(-x,-t) = S_{21}$。那么根据由 $I = \Omega^{-1}(-x)\Omega(-x)$，如果有 $\Omega^{*}(-x) = P^{-1}\Omega^{*}P^{-1}$ 成立，那么

$$\Omega^{-1*}(-x) = \left(\Omega^{*}(-x)\right)^{-1} = \left(P^{-1}\Omega^{*}P^{-1}\right)^{-1} = P\Omega^{-1*}P.$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $Q[1]$ 和 Q 有相同的结构。

证明变换(13)是一个双边 Darboux 变换，那么需要证明下列等式成立：

$$\begin{aligned} U[1] &= T_x T^{-1} + TU(\lambda)T^{-1}, \\ V[1] &= T_t T^{-1} + TV(\lambda)T^{-1}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中矩阵 T 的逆矩阵为

$$T^{-1} = I - \begin{pmatrix} \dfrac{\Phi_1}{\lambda-\lambda_1} & \dfrac{\Psi_1}{\lambda+\lambda_1^{*}} \end{pmatrix}\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\eta_1^{\dagger}M. \tag{17}$$

令

$$\begin{aligned} F[\lambda] &= U[1] - T_x T^{-1} - TU(\lambda)T^{-1} = U[\lambda] + T\left(\partial x - U(\lambda)\right)T^{-1}, \\ G[\lambda] &= V[1] - T_t T^{-1} - TV(\lambda)T^{-1} = V[\lambda] + T\left(\partial t - V(\lambda)\right)T^{-1}. \end{aligned}$$

则 $-\lambda_1^{*}$ 是 $F[\lambda]$ 和 $G[\lambda]$ 的一个一阶极点。根据等式

$$\begin{pmatrix} -\Phi_1^{\dagger}M \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\Phi_1}{-\lambda_1^{*}-\lambda_1} & \dfrac{\Psi_1}{-\lambda_1^{*}+\lambda_1} \end{pmatrix}\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\begin{pmatrix} -\Phi_1^{\dagger}M \\ -\Psi_1^{\dagger}M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Phi_1^{\dagger}M \\ 0 \end{pmatrix},$$

那么函数 $F[\lambda]$ 和 $G[\lambda]$ 在 $\lambda = -\lambda_1^{*}$ 处的留数为

$$\begin{aligned} Res_{-\lambda_1^{*}}F(\lambda) &= \left(\lambda+\lambda_1^{*}\right)F(\lambda)\big|_{\lambda=-\lambda_1^{*}} \\ &= \eta_1\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\begin{pmatrix} \Phi_1^{\dagger}M \\ 0 \end{pmatrix}\left(\partial x - U\left(-\lambda_1^{*}\right)\right)\left(I - \begin{pmatrix} \dfrac{\Phi_1}{-\lambda_1^{*}-\lambda_1} & \dfrac{\Psi_1}{-\lambda_1^{*}+\lambda_1} \end{pmatrix}\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\eta_1^{\dagger}M\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Res_{-\lambda_1^{*}}G(\lambda) &= \left(\lambda+\lambda_1^{*}\right)G(\lambda)\big|_{\lambda=-\lambda_1^{*}} \\ &= \eta_1\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\begin{pmatrix} \Phi_1^{\dagger}M \\ 0 \end{pmatrix}\left(\partial x - V\left(-\lambda_1^{*}\right)\right)\left(I - \begin{pmatrix} \dfrac{\Phi_1}{-\lambda_1^{*}-\lambda_1} & \dfrac{\Psi_1}{-\lambda_1^{*}+\lambda_1} \end{pmatrix}\Omega(\eta_1,\eta_1)^{-1}\eta_1^{\dagger}M\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

同样地，可以得到函数 $F[\lambda]$ 和 $G[\lambda]$ 在 $\lambda = \lambda_1^{*}, \lambda = -\lambda_1, \lambda = \lambda_1$ 处的一阶极点的留数都是零。在函数的 ∞ 处，进行洛朗展开，可以推出 $F[\infty]$ 和 $G[\infty]$ 处都为零。综上，可知函数 $F[\lambda]$ 和 $G[\lambda]$ 恒为零。

进一步，得到非局部方程的 N 次变换：

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_1^{1} & -\phi_2^{1*}(-x,-t) & \cdots & \phi_1^{N} & -\phi_2^{N*}(-x,-t) \\ \phi_2^{1} & \phi_1^{1*}(-x,-t) & \cdots & \phi_2^{N} & \phi_1^{N*}(-x,-t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

并且

$$W_N=\begin{pmatrix}\Omega(\eta_1,\eta_1) & \Omega(\eta_1,\eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_1,\eta_N)\\ \Omega(\eta_2,\eta_1) & \Omega(\eta_2,\eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_2,\eta_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Omega(\eta_N,\eta_1) & \Omega(\eta_N,\eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_N,\eta_N)\end{pmatrix},\quad \Omega(\eta,\Phi)=\begin{pmatrix}\Omega(\eta_1,\Phi)\\ \Omega(\eta_2,\Phi)\\ \vdots\\ \Omega(\eta_N,\Phi)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

新旧函数间的关系为：

$$U_1[N]=U_1+\left[RW_N^{-1}R^{\dagger}M,\sigma_3\right]. \tag{19}$$

即为

$$u[1]=u+2i\frac{\begin{vmatrix}W_N & \mathrm{a}_2^{\dagger}\\ \mathrm{a}_1 & 0\end{vmatrix}}{|W_N|}. \tag{20}$$

这里 a_1 和 a_2 表示矩阵 R 的第一行和第二行向量。

4. 非局部 CLL 方程的零背景解

考虑方程(9)的种子解 $u=0$，设 $\Phi_j(x,t;\lambda_j)=(\phi_1^j,\phi_2^j)^{\mathrm{T}}$ (T 表示转置)是 Lax 对(10)对应 $\lambda=\lambda_j$ 处的特征函数。那么

$$\phi_1^j=\alpha_j\mathrm{e}^{-i\lambda_j^2\left(x+2\lambda_j^2t\right)},\quad \phi_2^j=\beta_j\mathrm{e}^{i\lambda_j^2\left(x+2\lambda_j^2t\right)}.$$

那么时间谱问题的特征函数表达为：

$$\Phi_j=\begin{pmatrix}\phi_1^j\\ \phi_2^j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_j\mathrm{e}^{-i\lambda_j^2\left(x+2\lambda_j^2t\right)}\\ \beta_j\mathrm{e}^{i\lambda_j^2\left(x+2\lambda_j^2t\right)}\end{pmatrix},\quad j=1,2,3,\cdots,N. \tag{21}$$

将上式代入方程(19)，得到零背景的种子解下，非局部方程 CLL 的解为：

$$u[1]=2i\frac{\alpha_1\beta_1\left(\lambda_1^{2*}-\lambda_1^2\right)\mathrm{e}^{\theta_1+\theta_1^*}}{\alpha_1\alpha_1^*\lambda_1^2\mathrm{e}^{\theta_1-\theta_1^*}+\beta_1\beta_1^*\lambda_1\lambda_1^*\mathrm{e}^{-\theta_1+\theta_1^*}} \tag{22}$$

这里 * 表示共轭，其中 $\theta_1=-i\lambda_j^2\left(x+2\lambda_j^2t\right)$。

5. 结论

由已经研究的耦合的 CLL 方程出发，通过一个约化，将耦合的 CLL 方程约化成一个非局部的可积 CLL 方程。接着，通过耦合 CLL 方程的 Lax 对，写出非局部 CLL 方程的 Lax 对，从而构造了可积非局部 CLL 方程的一个双边 Darboux 变换，并给出证明，通过这个变化给出了非局部 CLL 方程在零背景解表达式。

参考文献

[1] Tsuchida, T. and Wadati, M. (1999) New Integrable Systems of Derivative Nonlinear Schrödinger Equations with Multiple Components. *Physics Letters A*, **257**, 53-64. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00272-8

[2] Xu, M.J., Xia, T.C. and Hu, B.B. (2019) Riemann-Hilbert Approach and N-Soliton Solutions for the Chen-Lee-Liu Equation. *Modern Physics Letters B*, **33**, Article ID: 1950002. https://doi.org/10.1142/S0217984919500027

[3] Kudryashov, N.A. (2019) General Solution of the Traveling Wave Reduction for the Perturbed Chen-Lee-Liu Equation.

Optik, **186**, 339-349. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.04.127

[4] Tarla, S., Ali, K.K., Yilmazer, R., *et al*. (2022) New Optical Solitons Based on the Perturbed Chen-Lee-Liu Model through Jacobi Elliptic Function Method. *Optical and Quantum Electronics*, **54**, 131. https://doi.org/10.1007/s11082-022-03527-9

[5] Moses, J., Malomed, B.A. and Wise, F.W. (2007) Self-Steepening of Ultrashort Optical Pulses without Self-Phase-Modulation. *Physical Review A*, **76**, Article 021802. https://doi.org/10.1364/NLO.2007.TuC3

[6] Ma, X.X. (2022) Riemann-Hilbert Approach for a Higher-Order Chen-Lee-Liu Equation with High-Order Poles. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **114**, Article 106606. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106606

[7] Yao, Y. and Huang, Y. (2020) Nonlocal-Derivative NLS Equations and Group-Invariant Soliton Solutions. *Advances in Difference Equations*, **1**, 1-13. https://doi.org/10.1186/s13662-020-2530-5

[8] Jin, J., Zhang, W.Y., Zhang, Y. and Wu, L.F. (2023) Exact Solutions of the Nonlocal Higher-Order Chen-Lee-Liu Equation. *Optik*, **277**, 170700. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170700

[9] Ling, L.M., Zhao, L.C. and Guo, B.L. (2016) Darboux Transformation and Classification of Solution for Mixed Coupled Nonlinear Schrödinger Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **20**, 285-304. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.08.023