

# 受科技因素影响的Solow模型的动力学分析

田娜娜\*, 黄东卫#

天津工业大学数学科学学院, 天津

收稿日期: 2023年4月24日; 录用日期: 2023年5月19日; 发布日期: 2023年5月26日

## 摘要

随着经济的快速发展, 环境问题日益突出。为了防止环境系统的逐渐恶化抑制经济的发展, 迫切需要实现经济与环境的协调发展。本文在索洛环境净化模型的基础上, 引入生产科技因素, 考虑科技因素对模型的影响。它能较好地解释经济环境系统运行的动态演化规律。一方面生产技术的进步可以提高生产率, 另一方面也可以加快对环境污染的控制。通过对模型的定性分析和数值模拟, 可以探索资本与环境污染之间的相互关系, 实现经济与环境的协调发展。

## 关键词

Solow模型, 非线性动力学, 环境, 数值模拟

# Dynamical Analysis of Solow Model Suffered from Technology Factors

Nana Tian\*, Dongwei Huang#

School of Mathematical Sciences, Tiangong University, Tianjin

Received: Apr. 24<sup>th</sup>, 2023; accepted: May 19<sup>th</sup>, 2023; published: May 26<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

With the rapid development of economy, environmental problems have become increasingly prominent. In order to prevent the gradual deterioration of the environmental system and restrain the development of the economy, it is urgent to realize the coordinated development of the economy and the environment. This paper is based on the Solow model with environmental purification, we introduce production technology to consider the impact of production technology on the model. It

\*第一作者。

#通讯作者。

can explain the dynamic evolution law of economic environment system operation well. On the one hand, the progress of production technology can improve productivity; on the other hand, it can also speed up the control of environmental pollution. Through theoretical analysis and numerical simulation of the model, we can explore the mutual relationship between capital and environmental pollution, and realize the coordinated development of economy and environment.

## Keywords

Solow Model, Nonlinear Dynamics, Environment, Numerical Simulation

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

经济系统是由相互联系、相互作用的若干经济元素如资本积累、劳动力、科技因素等结合而成的有机整体。在处理有关该系统的问题时,既要考虑其经济效益,又要考虑其对生态环境的影响。随着社会主义市场经济的迅速发展,环境保护问题也日益突出,为避免对环境体系的逐步污染而抑制国民经济的增长的情况,迫切需要实现经济和环保的和谐增长;我们将在 Solow 模型的基础上,将生产技术因素引入该模型。在发展经济学中有著名 Solow 经济增长模型,许多学者对于该模型进行了不同的研究和发展。熊俊对影响 Solow 模型生产函数的各种因素进行了说明,并进行了扩展[1];魏立桥等人以广东省为实例研究了带有环境污染与人均收入水平之间的关系[2];Stamuv 和 Georgios 从多种方面研究 Solow 模型,Stamuv 基于 Solow 模型引进了时滞与脉冲控制;Georgios 研究了人口增长对经济增长模型的影响[3][4];陆根尧等人基于环境库兹涅茨曲线假说,以浙江省为实例研究了 Solow 经济增长与环境污染的关系,提出了建设性的意见[5];Massimiliano Ferrara 等人研究了带有污染的 Solow 模型的稳定性和非线性动力学[6];张五六基于 Solow 模型,研究了中国经济增长方式的转变特征[7];李俊瑞等人引入了环境净化这一概念并对带有环境净化的 Solow 模型进行了动态分析[8];Gori L.等人建立了一个具有种群动态和时滞的 Solow 模型,以简单的方式确定了经济影响人口统计学的原因[9];Neto J. P. J.等人在 Solow-Swan 经济增长模型中加入了报酬递减和递增的规模,经过稳定性分析表明,较高的规模效益有利于经济聚集和经济周期的形成[10];张焕明等人探索了城市化进程中能源和环境约束对中国经济增长的影响[11];Yao Zhang 等人在经典 Solow 增长模型的基础上,考虑自然资源和土地资源,并对实际区域的数据进行了分析,得出政府应调整各地区的产业结构,优化资源禀赋利用,减轻对自然资源的依赖,实现经济的可持续发展[12];Istemi Berk 等人将能源消耗纳入生产要素,改进了 Solow 经济增长模型,发展和验证了一个合理的二氧化碳排放方程理论[13];Nicolò Cangiotti 和 Mattia Sensi 在 Solow-Swan 模型中考虑非恒定的规模效益,得到了通解,并对 Cobb-Donglas 生产函数进行了计算,得到了精确解[14];Li Kong 等人基于 Cobb-Douglas 生产函数和 Solow 残差思想,从整体经济、行业和部门层面考察了北京市的能源反弹效应[15]。这些学者都是基于 Solow 经济增长模型对影响经济的各个方面进行了分析研究。

本篇论文是我们考虑到科技进步在经济发展和环境污染治理中所起的作用,我们将科技进步引入到带有污染的 Solow 经济增长模型中,进一步分析科技进步在经济增长和污染治理所起的作用;也可以通过调节代表科技进步的参数,进而在低污染的条件下实现经济稳定增长,最终实现经济与环境的协调发

展。

由于科技因素的进步, 科技在生产和生活中的作用也日益凸显。生产技术的进步可以带动经济的发展, 同时在环境污染的治理中也起到了不可磨灭的作用。本文基于带有环境净化的 Solow 模型, 根据现实因素, 引入科技因素, 优化模型。对得到的模型进行稳定性分析, 探究在何种条件下经济与环境能够协调发展。并对得到的结果进行数值模拟加以论证。

## 2. 基础理论

该模型是在 Solow 模型上, 除了设定总产量  $QQ = F(K, L)$ , 消费品量  $C$ 、投资量(生产积累量)  $S$ ,  $S = s_1 Q$ , 劳动力数量  $L$ 、资本量  $K$ , 这几个经济指标外, Natail 加入了环境参数, 即环境污染量  $P$ , 并假定总产量  $Q$  的一部分  $E$  用于治理环境减少污染, 此时  $Q = C + S + E, E = s_2 Q$ , 并且假设一单位的  $E$  可以减少  $\omega$  单位的污染,  $\omega > 1$ , 另外, 李俊瑞在此基础上考虑环境本身对污染的净化, 假设环境系统对污染物的净化能力为  $m$ ,  $0 < m < 1$ , 假定环境污染物存量  $P$  与物质生产、经济活动总量和环境自净的能力有关, 则其模型的表达式如下:

$$\begin{cases} \dot{K} = s_1 Q - \theta K \\ \dot{L} = nL \\ \dot{P} = (\varepsilon - \omega s_2) Q - mP \end{cases} \quad (1.1)$$

其中,  $\theta$  表示损耗率,  $\varepsilon$  表示总产量  $Q$  中废弃物的污染部分,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $s_1, s_2$  分别为投资比例和环境污染治理比例,  $0 \leq s_1, s_2 \leq 1, s_1 + s_2 \leq 1$ 。

## 3. 建立模型

这里将李俊瑞的带有环境净化的 Solow 模型进行优化扩展。考虑到科技因素对生产函数的影响。

假定产品的生产决定于资本量  $K$ 、劳动力数量  $L$ 、科技因素  $A$  和污染物存量  $P$ , 也就是说总产量由生产函数  $F(K, AL, P)$  决定, 即:  $Y = F(K, AL, P)$ , 假定科技因素  $A$  满足  $\dot{A} = gA$ ,  $0 < g < 1$

在规模收益不变的情况下, 按人均计算:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, A, \frac{P}{L}\right) \quad (2.1)$$

在这里, 定义  $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ ,  $p(t) = \frac{P(t)}{L(t)}$ ,  $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ ,  $k(t)$  表示资本劳动率,  $p(t)$  表示产生总污染的人均污染率,  $y(t)$  表示人均产量。可将  $k(t)$  简记为  $k$ ;  $p(t)$  简记为  $p$ ;  $y(t)$  简记为  $y$ 。

结合以上的式子, 系统(1.1)可以化为:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_1 y - (\theta + n)k \\ \dot{p} = (\varepsilon - \omega s_2) y - (m + n)p \end{cases} \quad (2.2)$$

假设这里的生产函数采用 Cobb-Douglas 生产函数形式。式(2.1)中污染物存量  $P$  对物质生产的贡献为负, 假定系数标准化为 1, 则可以得到

$$y = k^{a_1} A^{a_2} p^{a_3} = k^{a_1} (e^{gt})^{a_2} p^{a_3} = e^{a_2 gt} k^{a_1} p^{a_3} \quad (2.3)$$

其中, 可由  $\frac{\dot{A}}{A} = g$  得到  $A = e^{gt}$ ;  $0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 1, a_3 < 0$ 。

若将(2.3)代入系统(2.2), 得到的是非自治系统, 为了得到自治系统, 我们做了以下替换:

令  $\hat{k} = ke^{-\xi t}$ ;  $\hat{p} = pe^{-\eta t}$ , 满足以下式子:

$$\begin{cases} \xi - (a_1 + a_3)\xi - a_2g = 0 \\ \eta - (a_1 + a_3)\eta - a_2g = 0 \end{cases}$$

可以解得:  $\xi = \eta = \frac{a_2g}{1 - a_1 - a_2}$ , 代入系统(2.2)可得:

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} = s_1\hat{k}^{a_1}\hat{p}^{a_3} - (\theta + \xi + n)\hat{k} \\ \dot{\hat{p}} = (\varepsilon - \omega s_2)\hat{k}^{a_1}\hat{p}^{a_3} - (m + n + \eta)\hat{p} \end{cases}$$

为了方便计算, 将其简化为:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_1k^{a_1}p^{a_3} - (\theta + \xi + n)k \\ \dot{p} = (\varepsilon - \omega s_2)k^{a_1}p^{a_3} - (m + n + \eta)p \end{cases} \quad (2.4)$$

综上, 我们得到了受科技因素影响的带有环境净化的 Solow 模型(2.4)。

#### 4. 系统非零平衡点的稳定性

在本节研究系统(2.4)平衡点的稳定性。令  $s_1k^{a_1}p^{a_3} = (\theta + \xi + n)k$ ,  $(\varepsilon - \omega s_2)k^{a_1}p^{a_3} = (m + n + \eta)p$ , 得到非零平衡点  $(k^*, p^*)$ 。

系统(2.4)在平衡点  $(k^*, p^*)$  处的雅可比矩阵为:

$$J|_{(k^*, p^*)} = \begin{pmatrix} a_1s_1k^{*a_1-1}p^{*a_3} - (\theta + n + \xi) & s_1a_3k^{*a_1}p^{*a_3-1} \\ (\varepsilon - \omega s_2)a_1k^{*a_1-1}p^{*a_3} & (\varepsilon - \omega s_2)a_3k^{*a_1}p^{*a_3-1} - (m + n + \eta) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

由于  $s_1k^{a_1}p^{a_3} = (\theta + \xi + n)k$ ,  $(\varepsilon - \omega s_2)k^{a_1}p^{a_3} = (m + n + \eta)p$ , (3.1)式可化为

$$J|_{(k^*, p^*)} = \begin{pmatrix} (a_1 - 1)(\theta + n + \xi) & \frac{s_1a_3(m + n + \eta)}{\varepsilon - \omega s_2} \\ \frac{a_1(\theta + n + \xi)(\varepsilon - \omega s_2)}{s_1} & (a_3 - 1)(m + n + \eta) \end{pmatrix}$$

特征方程为:

$$\begin{aligned} |\lambda E - J| &= \lambda^2 - [(a_3 - 1)(m + n + \eta) + (a_1 - 1)(\theta + n + \xi)]\lambda \\ &\quad + (a_1 - 1)(a_3 - 1)(\theta + n + \xi)(m + n + \eta) + a_1a_3(m + n + \eta)(\theta + n + \xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

定理 1. 系统(2.4)在非零平衡点  $(k^*, p^*)$  处是渐近稳定的, 如果满足以下任意一个条件

1) 当  $\Delta \geq 0$  时,  $(a_3 - 1)(m + n + \eta) + (a_1 - 1)(\theta + n + \xi) < 0$ ,

$$[(a_1 - 1)(a_3 - 1) + a_1a_3](m + n + \eta)(\theta + n + \xi) > 0$$

2) 当  $\Delta < 0$  时,  $(a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2 < 0$

证明: 1) 记  $b_1 = m + n + \eta$ ,  $b_2 = \theta + n + \xi$  则(3.2)式可化为:

$$\lambda^2 - [(a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2]\lambda + [(a_1 - 1)(a_3 - 1) + a_1a_3]b_1b_2 = 0 \quad (3.3)$$

由此可以得到:  $\Delta = [(a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2]^2 - 4[(a_1 - 1)(a_3 - 1) + a_1a_3]b_1b_2$

当  $\Delta \geq 0$  时: 根据韦达定理, 方程(3.3)的两个特征值满足:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = (a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = [(a_1 - 1)(a_3 - 1) + a_1 a_3] b_1 b_2 \end{cases}$$

由  $(a_3 - 1)(m + n + \eta) + (a_3 - 1)(\theta + n + \xi) < 0$ ,  $[(a_1 - 1)(a_3 - 1) + a_1 a_3](m + n + \eta)(\theta + n + \xi) > 0$ , 并且  $b_1 = m + n + \eta, b_2 = \theta + n + \xi$ , 可以得到  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , 所以系统(2.4)在非零平衡点  $(k^*, p^*)$  处是渐近稳定的。

2) 当  $\Delta < 0$  时, 方程(3.3)有复根  $\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha, \beta \neq 0$ , 将其代入方程(3.3)中可得:

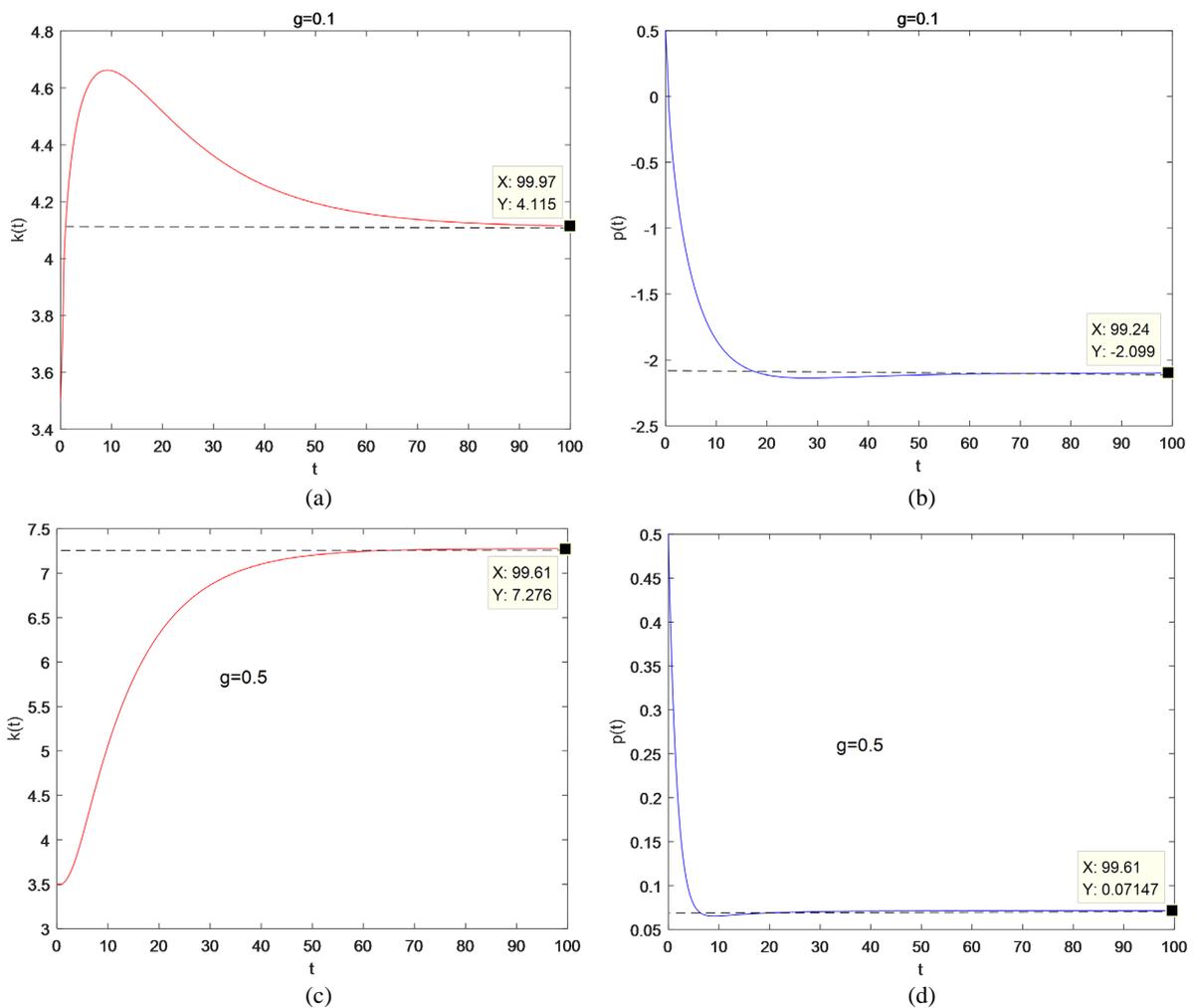
$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 - [(a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2]\alpha + [(a_1 - 1)(a_3 - 1) + a_1 a_3] b_1 b_2 = 0 \\ 2\alpha\beta - [(a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2]\beta = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

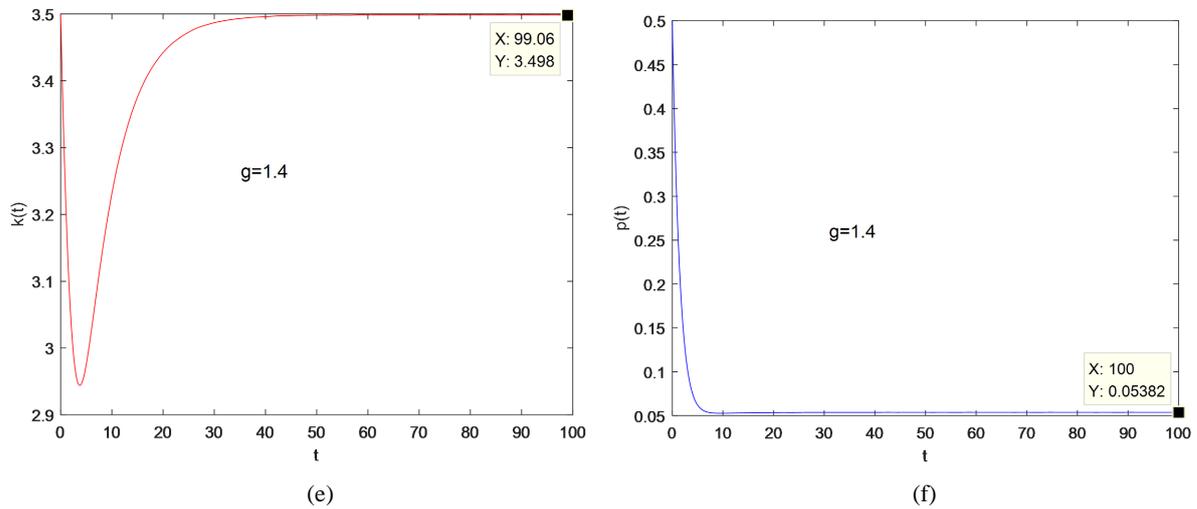
从(3.4)式可以得到  $\alpha = \frac{1}{2}(a_3 - 1)b_1 + \frac{1}{2}(a_1 - 1)b_2$ , 因为  $(a_3 - 1)b_1 + (a_1 - 1)b_2 < 0$ , 可得  $\alpha < 0$ , 所以系统(2.4)在非零平衡点  $(k^*, p^*)$  处是渐近稳定的。

## 5. 数值模拟

### 5.1. 系统非零平衡点 $(k^*, p^*)$ 的存在

如图 1 所示, 当资本投入生产时, 短时间会迅速积累资本, 同时也会积累污染物, 资本积累的速度





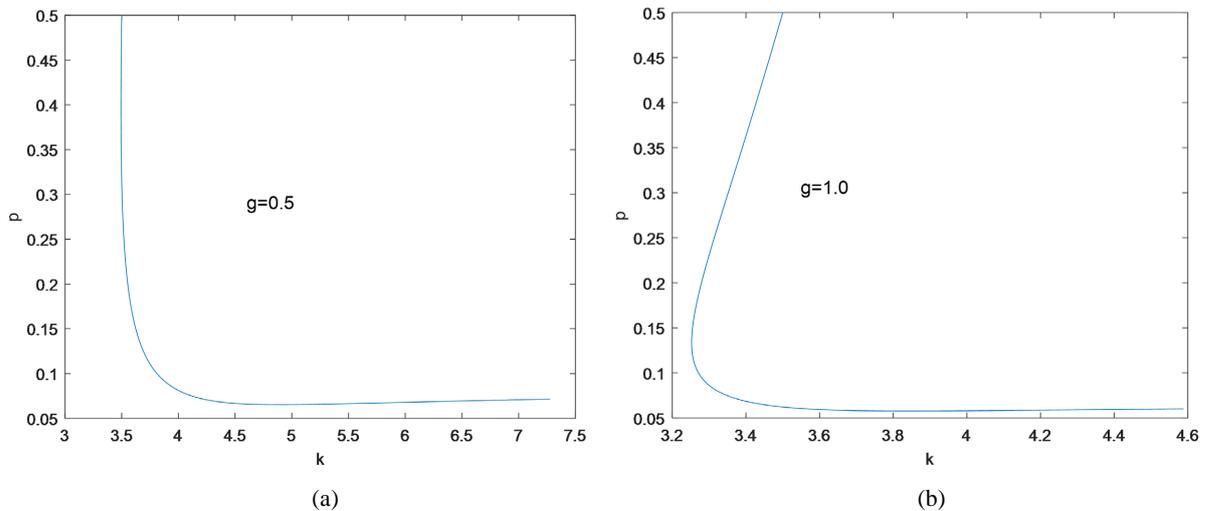
**Figure 1.** Compared the  $(k(t), p(t))$  time history diagrams of Solow model with different parameter values of  $g$   
**图 1.** 比较参数  $g$  取不同值时模型的  $(k(t), p(t))$  的时间历程图

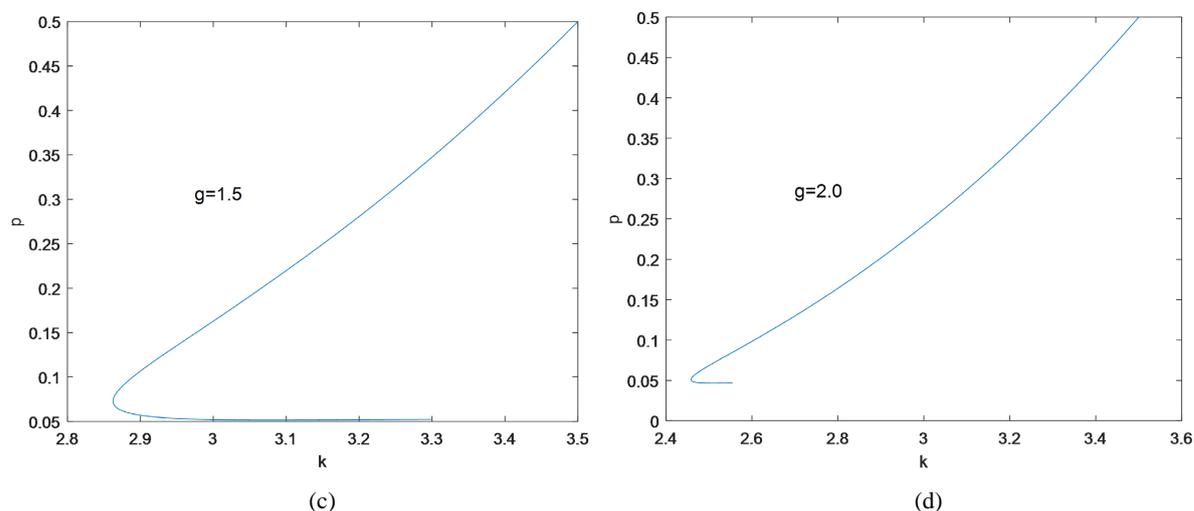
会逐渐减慢，最后会趋于稳定状态。由于初始存在污染物存量，总产量的一部分会用于环境污染治理，与此同时，环境系统也对污染物也有一定的自净能力，所以污染物积累量会逐渐降低，最后会趋于稳定状态。

### 5.2. 科技因素对资本积累和污染物积累量的影响

如图 2 所示，将科技因素应用到生产中。一方面会直接影响产品的产出，进而影响资本的积累。图 2 中各幅图对比可看出在一定范围内适当的调整参数值  $g$ ，会增加资本的积累量，但若是将参数值取的超出一定的范围，资本的积累量会降低。这说明工厂适当地引进技术设备可以增加收入额，但是若工厂超额引进技术设备就会减少收入，甚至会亏损；另一方面，由于科技因素的引进，工厂可以最大程度的减少污染物的排放，同时也可以利用设备来进行污染治理，由图 2 可以看出污染物的积累量在逐步降低。

观察参数  $g$  所取得不同值时，系统在一定时间后都会变得稳定，也就是说，在给定条件下，经济与环境能够达到协调发展。





**Figure 2.** Compared the phase diagram of Solow model with different parameter values of  $g$   
**图 2.** 比较参数  $g$  取不同值时模型的相图

## 6. 结论

本文基于带有环境净化的 Solow 模型, 考虑科技因素在经济生产中的应用, 构造了带有科技因素和环境净化的 Solow 模型, 并对其进行了稳定性分析, 得到了在一定条件下经济和环境能够协调持续发展。并且研究了在不同参数值  $g$  下模型的动力学行为, 得出在适当的范围内调整参数值可以提高经济发展, 同时也会降低环境污染, 达到经济和环境的双赢局面。由此可以知道合理的应用科技因素可以在低污染的前提下最大程度的提高经济, 从而实现经济与环境协调发展。当然影响经济运行的因素是非常复杂的, 而且有许多因素作用有时滞性, 还有些因素具有随机性, 这正是我们今后要着力探索的方向。

## 基金项目

国家自然科学基金面上项目(11672207)。

## 参考文献

- [1] 熊俊. 经济增长因素分析模型: 对索洛模型的一个扩展[J]. 数量经济技术经济研究, 2005, 22(8): 25-34..
- [2] 魏立桥, 赵晓娜, 景文宏. 基于环境污染的经济增长模型——以广东省为例[J]. 软科学, 2008, 22(2): 54-56.
- [3] Karras, G. (2010) Land and Population Growth in the Solow Growth Model: Some Empirical Evidence. *Economics Letters*, **109**, 66-68. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2010.08.019>
- [4] Stamova, I.M. and Stamov, A.G. (2012) Impulsive Control on the Asymptotic Stability of the Solutions of a Solow Model with Endogenous Labor Growth. *Journal of the Franklin Institute*, **349**, 2704-2716. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.07.001>
- [5] 陆根尧, 盛龙. 基于环境库兹涅茨曲线假说的经济增长与环境污染关系研究——以浙江省为例[J]. 工业技术经济, 2012(4): 28-35.
- [6] Ferrara, M., Guerrini, L. and Sodini, M. (2014) Stability and Nonlinear Dynamics in a Solow Model with Pollution. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **19**, 565-577. <https://doi.org/10.15388/NA.2014.4.3>
- [7] 张五六. 中国经济增长方式转变特征测度——基于贝叶斯时变参数状态空间模型[J]. 统计与信息论坛, 2015, 30(6): 20-27.
- [8] 李佼瑞, 张艳霞. 带有环境净化的双随机参数 SOLOW 模型的稳定性[J]. 统计与信息论坛, 2016, 31(6): 7-13.
- [9] Gori, L., Guerrini, L. and Sodini, M. (2018) Time Delays, Population and Economic Development. *Chaos*, **28**, Article ID: 055909. <https://doi.org/10.1063/1.5024397>

- 
- [10] Neto, J.P.J., Claeysen, J.C.R. and Júnior, S.S.P. (2019) Returns to Scale in a Spatial Solow—Swan Economic Growth Model. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **533**, Article ID: 122055. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122055>
- [11] Zhang, H., Ma, R., Cui, L., *et al.* (2022) Exploring the Impacts of Energy and Environmental Constraints on China's Urbanization Process. *Computers & Industrial Engineering*, **169**, Article ID: 108170. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108170>
- [12] Zhang, Y., Liu, W., Khan, S.U., *et al.* (2022) An Insight into the Drag Effect of Water, Land and Energy on Economic Growth across Space and Time: The Application of Improved Solow Growth Model. *Environmental Science and Pollution Research*, **29**, 6886-6899. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-16053-0>
- [13] Berk, I., Onater-Isberk, E. and Yetkiner, H. (2022) A Unified Theory and Evidence on CO<sub>2</sub> Emissions Convergence. *Environmental Science and Pollution Research*, **29**, 20675-20693. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-17131-z>
- [14] Cangiotti, N. and Sensi, M. (2022) Exact Solutions for a Solow-Swan Model with Non-Constant Returns to Scale. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. (Preprint) <https://doi.org/10.1007/s13226-022-00341-7>
- [15] Kong, L., Mu, X., Hu, G., *et al.* (2023) Will Energy Efficiency Improvements Reduce Energy Consumption? Perspective of Rebound Effect and Evidence from Beijing. *Energy*, **263**, Article ID: 125665. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.125665>