Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(5), 2318-2326**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125236

Hans汉斯

具有特殊初值的散焦Kundu-Eckhaus方程的正散射问题

张冬冬

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年4月24日；录用日期：2023年5月19日；发布日期：2023年5月26日

摘　要

在本文中，我们主要考虑了具有特殊初值条件的散焦Kundu-Eckhaus (KE)方程的正散射问题。正散射问题是根据一个合适的均匀化变量提出的，这使我们能够在标准复平面上发展讨论相关问题，而不是在两片黎曼曲面或沿切口具有不连续性的切面上。我们首先通过KE方程的Lax对求解出该初值条件下的Jost函数解，然后根据Jost函数解之间存在的散射关系得出相应的散射数据，最后重点讨论了散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 的零点，利用一些特殊的三角函数来研究其零点规律，然后我们发现一个有趣的现象，即在某些情况下散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 的零点不存在或者只存在一个零点。

关键词

散焦Kundu-Eckhaus (KE)方程，Jost函数，散射数据，特殊初值条件，零点

On the Direct Scattering Problem for Defocusing the Kundu-Eckhaus Equation with Special Initial Value

Dongdong Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science & Technology, Shanghai

Received: Apr. 24th, 2023; accepted: May 19th, 2023; published: May 26th, 2023

Abstract

In this article, we consider the forward scattering problem of the defocused Kundu-Eckhaus (KE) equation with special initial conditions. The forward scattering problem is proposed based on a

文章引用: 张冬冬. 具有特殊初值的散焦 Kundu-Eckhaus 方程的正散射问题[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2318-2326.
DOI: 10.12677/aam.2023.125236

suitable uniformization variable, which enables us to discuss related problems on the standard complex plane, rather than on two-sheeted Riemannian surface or cut plane with discontinuities along the cuts. We first solved the Jost function solution under this initial condition by using Lax pairs, and then obtained the scattering data based on the scattering relationship between the Jost function solutions. Finally, we focused on discussing the scattering data $s_{11}(\zeta)$. The zero point of $s_{11}(\zeta)$ should be studied using some special trigonometric function values, and an interesting phenomenon was discovered, namely, in certain cases, the zero point of scattering data $s_{11}(\zeta)$ should not exist or only one zero point should exist.

Keywords

Defocusing Kundu-Eckhaus (KE) Equation, Jost Eigenfunctions, Scattering Coefficients, Special Initial Value Condition (SIVC), Zero Point

1. 引言

Kundu-Eckhaus 方程(KE)方程为

$$iq_t + q_{xx} - 2|q|^2 q + 4T^2|q|^4 q - 4iTu\left(|q|^2\right)_x q = 0, u = \pm 1 \tag{1.1}$$

其中 T 是常数，$q(x,t)$ 是复数函数，当 $u=1$ 时方程(1.1)称为聚焦 KE 方程，当 $u=-1$ 时方程(1.1)称为散焦 KE 方程，该方程是由 Kundu 在考虑 Landau-Lifshitz 方程和高阶 Schrödinger 方程之间的规范关系时提出的[1]。它包含五次非线性，最后一项是非线性光学中的拉曼效应，它代表非克尔非线性效应和自频移效应。KE 方程充分描述了超短光脉冲在非线性光学中的传播，并检测了弱非线性色散物质波中斯托克斯波的稳定性[2] [3]。它是一个具有 Lax 对、Painlevé 性质和哈密顿结构的完全可积系统[4] [5] [6]。

通过对相关文献的系统研究与学习发现，在最近几十年的研究中，KE 方程的研究依然引起了众多人的关注，而 KE 方程的孤立子解已经通过双线性导数方法、Darboux 变换方法、反散射变换方法等方法获得；具有零边界条件的 KE 方程的亮孤子解和长时间渐近性也已经引起了广大的关注与研究[7] [8]。但是散焦 KE 方程和聚焦 KE 方程由于它们的 Lax 对的不同而有很大的不同，而且相比之下，散焦 KE 方程具有更大的研究空间，此外，在现有的文献中，关于其特殊初值条件的问题也存在很大的研究空间，而在实际问题中，我们更多的情况下是需要赋予一定的初值条件才能继续往下研究，所以本文在一定程度上对于 KE 方程的理论体系具有一定的补充。

本文的其余部分安排如下。在第 2 节中，通过散焦 KE 方程的 Lax 对和初值条件求解出相应的 Jost 函数解。在第 3 节中，我们通过 Jost 函数解之间的散射关系求解出具体的散射矩阵和散射数据，并且通过一些特殊的三角函数值得到了一些特殊的零点，此外发现在一些条件下散射数据不存在零点。在第 4 节中，我们将总结了相关结论。

2. Jost 函数解

散焦 KE 方程为

$$iq_t + q_{xx} - 2|q|^2 q + 4T^2|q|^4 q + 4iT\left(|q|^2\right)_x q = 0 \tag{2.1}$$

初值条件为

$$q(x,t) = q_0 = \begin{cases} 0, & x \in [-L, L] \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \tag{2.2}$$

引入散焦 KE 方程的 Lax 对为

$$\Phi_x = U(x,t,k)\Phi \tag{2.3a}$$

$$\Phi_t = V(x,t,k)\Phi \tag{2.3b}$$

其中

$$U(x,t,k) = -ik^2\sigma_3 + Q(x,t) - iTQ(x,t)\sigma_3 \tag{2.4a}$$

$$V(x,t,k) = -2ik^2\sigma_3 + i\sigma_3\left(Q_x - Q^2\right) + 2kQ - 2TQ^3 + 4iT^2Q^4\sigma_3 - T\left(QQ_x - Q_xQ\right) \tag{2.4b}$$

$$Q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q^*(x,t) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4c}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.4d}$$

$$Q_0 = Q_0(x,0) = \begin{cases} Q_0^h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{其他} \\ \mathrm{O}, & x \in [-L, L] \end{cases} \tag{2.4e}$$

其中 O 表示零矩阵，$*$代表复共轭，在本文的后续内容中，凡是涉及到$*$的部分，均代表复共轭，不表示转置。通常情况下，方程(2.1)是 Lax 对(2.3)的相溶性条件，而且我们也称 Lax 对(2.3)中的第一个方程为散射问题，第二个方程为时间发展式。

在初值条件的作用下，Lax 对(2.3)转化

$$\Phi_x = U(x,k)\Phi \tag{2.5a}$$

$$\Phi_t = V(x,k)\Phi \tag{2.5b}$$

其中

$$U(x,t,k) = -ik^2\sigma_3 + Q_0 - iTQ_0\sigma_3 \tag{2.6a}$$

$$V(x,t,k) = -2ik^2\sigma_3 - i\sigma_3 + 2kQ_0 - 2TQ_0 + 4iT^2\sigma_3 \tag{2.6b}$$

由初值条件可知，连续函数 $\Phi_i(x,\alpha)$ 满足等式

$$\lim_{x\to\infty}\Phi_i(x,\alpha) \sim E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(\alpha)x\sigma_3},\quad i = 1,2 \tag{2.7}$$

其中 $\lambda(\alpha) = \alpha^2 - 1, \alpha = k + T$，

$$E(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{i}{\alpha + \lambda(\alpha)} \\ \dfrac{i}{\alpha + \lambda(\alpha)} & 1 \end{pmatrix} = I - \frac{i}{\alpha + \lambda(\alpha)}\sigma_3 Q_0^h \tag{2.8}$$

结合初始条件(2.2)以及等式(2.7)可以得到

$$\Phi_1(x,\alpha)=\begin{cases}E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(\alpha)x\sigma_3}, & x\in(-\infty,-L)\\ \mathrm{e}^{-ik(x+L)\sigma_3}E(\alpha)\mathrm{e}^{i\lambda(k)L\sigma_3}, & x\in[-L,L]\\ E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(\alpha)(x-L)\sigma_3}E^{-1}(\alpha)\mathrm{e}^{-2ikL\sigma_3}E(\alpha)\mathrm{e}^{i\lambda(\alpha)L\sigma_3}, & x\in(L,+\infty)\end{cases} \tag{2.9a}$$

$$\Phi_2(x,\alpha)=\begin{cases}E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(k)(x+L)\sigma_3}E^{-1}(\alpha)\mathrm{e}^{2ikL\sigma_3}E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(\alpha)L\sigma_3}, & x\in(-\infty,L)\\ \mathrm{e}^{-ik(x-L)\sigma_3}E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(\alpha)L\sigma_3}, & x\in[-L,L]\\ E(\alpha)\mathrm{e}^{-i\lambda(\alpha)x\sigma_3}, & x\in(L,+\infty)\end{cases} \tag{2.9b}$$

由于特征值$\lambda(\alpha)$是一个关于α的双值函数，而且当$\alpha=\pm1$时，显然我们可以得到$\lambda(\alpha)=0$，进而能够得到$\det E(\alpha)=0$，进而也能说明矩阵$E(\alpha)$在$\alpha=\pm1$处是不存在逆矩阵的，这也就是说，$\lambda(\alpha)$存在着两个分断点，即$\alpha=\pm1$。为了避免这种情况的出现，这时我们就需要引入一个 Riemann 曲面 K，它由K^+和K^-两个部分组成，而且它们均沿复平面的切割$\Lambda=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$能够链接在一起，从而使$\lambda(\alpha)$通过平面切割时是连续的。为了不失一般性，定义$\operatorname{Im}\alpha<0$在$K^-$上，定义$\operatorname{Im}\alpha>0$在$K^+$上。为了克服特征值$\lambda(\alpha)$的平方根多值性，这里我们需要引入辅助单值化变量$\zeta$，并使之满足变换

$$k=\frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right),\quad \lambda=\frac{1}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right) \tag{2.10}$$

在变换(2.10)的作用下，Jost 函数可以用含有参数ζ来表示，即有

$$\Phi_1(x,\zeta)=\begin{cases}E(\zeta)\mathrm{e}^{-i\lambda x\sigma_3}, & x\in(-\infty,-L)\\ \mathrm{e}^{-ik(x+L)\sigma_3}E(\zeta)\mathrm{e}^{i\lambda L\sigma_3}, & x\in[-L,L]\\ E(\zeta)\mathrm{e}^{-i\lambda(x-L)\sigma_3}E^{-1}(\zeta)\mathrm{e}^{-2ikL\sigma_3}E(\zeta)\mathrm{e}^{i\lambda L\sigma_3}, & x\in(L,+\infty)\end{cases} \tag{2.11a}$$

$$\Phi_2(x,\zeta)=\begin{cases}E(\zeta)\mathrm{e}^{-i\lambda(x+L)\sigma_3}E^{-1}(\zeta)\mathrm{e}^{2ikL\sigma_3}E\mathrm{e}^{-i\lambda L\sigma_3}, & x\in(-\infty,-L)\\ \mathrm{e}^{-ik(x-L)\sigma_3}E(\zeta)\mathrm{e}^{-i\lambda L\sigma_3}, & x\in[-L,L]\\ E(\zeta)\mathrm{e}^{-i\lambda x\sigma_3}, & x\in(L,+\infty)\end{cases} \tag{2.11b}$$

其中

$$E=\begin{pmatrix}1 & -i\zeta^{-1}\\ i\zeta^{-1} & 1\end{pmatrix}=I-i\zeta^{-1}\sigma_3Q_0^h \tag{2.12}$$

定义

$$d(\zeta)=\frac{1}{\det E}=\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}} \tag{2.13}$$

则有

$$E^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}} & \dfrac{i\mathrm{e}^{2it}}{\zeta-\zeta^{-1}}\\ \dfrac{-i\mathrm{e}^{-2it}}{\zeta-\zeta^{-1}} & \dfrac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\end{pmatrix}=d(\zeta)\left[I+i\zeta^{-1}\sigma_3Q_0^h\right] \tag{2.14}$$

3. 散射矩阵

由于$\Phi_1(x,\zeta)$和$\Phi_2(x,\zeta)$是与 Lax 对有关的，所以$\Phi_1(x,\zeta)$和$\Phi_2(x,\zeta)$是线性相关的，而且它们之

间存在一个与 x 无关的矩阵 $S(t,\zeta)$，使之满足散射关

$$\Phi_1(x,t,\zeta)=\Phi_1(x,t,\zeta)S(t,\zeta) \tag{3.1}$$

由于我们已经得到了该模型准确的 Jost 函数，那么此时通过结合等式(2.11)和等式(2.15)，就可以直接算出具体的散射矩阵，即有

$$S(\zeta)=\mathrm{e}^{i\lambda L\sigma_3}E^{-1}(\zeta)\mathrm{e}^{-2ikL\sigma_3}E(\zeta)\mathrm{e}^{i\lambda L\sigma_3}=\begin{pmatrix} s_{11}(\zeta) & s_{12}(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) & s_{22}(\zeta)\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

则其散射系数为

$$\begin{aligned}
s_{11}(\zeta)&=\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\mathrm{e}^{2i\lambda L-2ikL}-\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\mathrm{e}^{2i\lambda L+2ikL}\\
s_{12}(\zeta)&=\frac{i}{\zeta-\zeta^{-1}}\left(\mathrm{e}^{2ikL}-\mathrm{e}^{-2ikL}\right)\\
s_{21}(\zeta)&=-\frac{i}{\zeta-\zeta^{-1}}\left(\mathrm{e}^{-2ikL}-\mathrm{e}^{2ikL}\right)\\
s_{22}(t,\zeta)&=\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\mathrm{e}^{-2i\lambda L+2ikL}-\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\mathrm{e}^{-2i\lambda L-2ikL}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

接下来我们将研究散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 的零点问题。

根据等式(3.3)可知，散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 可以改写成如下形式:

$$s_{11}(\zeta)=\left(\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\cos 2\zeta^{-1}L-\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\cos 2\zeta L\right)-i\left(\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\sin 2\zeta^{-1}L-\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\sin 2\zeta L\right) \tag{3.4}$$

假设 ζ 是实数，则若 $s_{11}(\zeta)=0$，就需要保证 $s_{11}(\zeta)$ 的实部和虚部均为零，即满足

$$\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\cos 2\zeta^{-1}L-\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\cos 2\zeta L=0 \tag{3.5a}$$

$$\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\sin 2\zeta^{-1}L-\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\sin 2\zeta L=0 \tag{3.5b}$$

由等式(3.5a)可以得到

$$\cos 2\zeta^{-1}L=\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}},\cos 2\zeta L=\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}} \tag{3.6}$$

由等式(3.5b)可以得到

$$2\zeta^{-1}L=n\pi-2\zeta L \tag{3.7}$$

进而能够得到

$$\cos 2\zeta^{-1}L=\cos(n\pi-2\zeta L)=(-1)^n\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^{-1}}\neq\frac{\zeta^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}} \tag{3.8}$$

此时出现了同一个三角函数对应两个值的情况，也就是说，散射系数 $s_{11}(\zeta)$ 在实轴上不存在零点。

现不妨假设

$$\zeta=\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\zeta=\mathrm{e}^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \tag{3.9}$$

则有

$$s_{11}(\zeta)=\mathrm{e}^{-2L\sin\theta}\sin(\theta-2L\cos\theta) \tag{3.10}$$

若 $s_{11}(\zeta)=0$，则有

$$\theta-2L\cos\theta=n\pi \tag{3.11}$$

想要求解 θ，我们通过来看直线 $y_1=\theta-n\pi$ 与直线 $y_2=2L\cos\theta$ 的交点来求解 θ。

令 $f(\theta)=2L\cos\theta-\theta+n\pi$，对 $f(\theta)$ 求导有

$$f'(\theta)=-2L\sin\theta-1 \tag{3.12}$$

由于 $L>0,\sin\theta>0,\theta\in(0,\pi)$，则对于 $\forall\theta\in(0,\pi)$ 均有 $f'(\theta)<0$，进而可以得到 $f(\theta)$ 在 $\theta\in(0,\pi)$ 上单调递减，其零点具体情况如下所述：

情况 1：当 $n=0$ 时，$f(\theta)=2L\cos\theta-\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
f	$2L>0$	$\sqrt{3}L-\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{2}L-\frac{\pi}{4}$	$L-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-2L-\pi$

当 $\theta\geq\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\theta)<0$；当 $L=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 时，$s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$；当 $L=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ 时，$s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$；当 $L=\frac{\pi}{3}$ 时，$s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；当 $0<L<\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 时，有 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$；当 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}<L<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ 时，有 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$；当 $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}<L<\frac{\pi}{3}$ 时，有 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$；当 $L>\frac{\pi}{3}$ 时，有 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$；

情况 2：当 $n=1$ 时，$f(\theta)=2L\cos\theta-\theta+\pi$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f	$2L+\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-L+\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{2}L+\frac{\pi}{4}$	$-\sqrt{3}L+\frac{\pi}{6}$	$-2L<0$

当 $\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\theta)>0$；当 $L=\frac{\pi}{3}$ 时，$s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；当 $L=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ 时，$s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$；当 $L=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 时，$s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$；当 $0<L<\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 时，有 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)>0, f(\pi)<0$，此时散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$；当 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}<L<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ 时，有 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0, f\left(\frac{5\pi}{6}\right)<0$，我们能够得到 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$；当 $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}<L<\frac{\pi}{3}$ 时，有 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于

$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$；当 $L>\frac{\pi}{3}$ 时，有 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$；

情况 3： 当 $n=2$ 时， $f(\theta)=2L\cos\theta-\theta+2\pi$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f	$2L+2\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$-L+\frac{4\pi}{3}$	$-\sqrt{2}L+\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{3}L+\frac{7\pi}{6}$	$-2L+\pi$

当 $\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时， $f(\theta)>0$；当 $L=\frac{4\pi}{3}$ 时， $s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；当 $L=\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$ 时，零点为 $\zeta=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$；当 $L=\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$ 时，零点为 $\zeta=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$；当 $0<L<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $f(\pi)>0, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0$，则散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 在 $(0,\pi)$ 内不存在零点；当 $\frac{\pi}{2}<L<\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$ 时，有 $f(\pi)<0, f\left(\frac{5\pi}{6}\right)>0$，我们能够得到 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$；当 $\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}<L<\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$ 时，有 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)<0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$；当 $\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}<L<\frac{4\pi}{3}$ 时，有 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$；当 $L>\frac{\pi}{3}$ 时，有 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$；

此时我们数学根据归纳法可以得到，当 $n\ge 2$ 时，对于任意 $\theta\le\frac{\pi}{2}$ 均有 $f(\theta)>0$，则令

$$L_1=\frac{\pi}{3}+(n-1)\pi, L_2=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}} \tag{3.13a}$$

$$L_3=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{3}}, L_4=\frac{(n-1)\pi}{2} \tag{3.13b}$$

当 $L=L_1$ 时， $s_{11}(\zeta)$ 的零点为 $\zeta=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；当 $L=L_2$ 时，零点为 $\zeta=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$；当 $L=L_3$ 时，零点为 $\zeta=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$；当 $0<L<L_4$ 时，有 $f(\pi)>0$，则散射数据 $s_{11}(\zeta)$ 在 $(0,\pi)$ 内不存在零点；当 $L_4<L<L_3$ 时，有 $f(\pi)<0, f\left(\frac{5\pi}{6}\right)>0$，则 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$；当 $L_3<L<L_2$ 时，有 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)<0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$；当 $L_2<L<L_1$ 时，有 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$；当 $L>L_1$ 时，有 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，此时 $s_{11}(\zeta)$ 的零点位于 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$；

情况 4： 当 $n=-1$ 时， $f(\theta)=2L\cos\theta-\theta-\pi$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
f	$2L-\pi$	$\sqrt{3}L-\frac{7\pi}{6}$	$\sqrt{2}L-\frac{5\pi}{4}$	$L-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-2L-2\pi$

此时当$\theta \ge \frac{\pi}{2}$时，$f(\theta)<0$；当$L=\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$时，$s_{11}(\zeta)$的零点为$\zeta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$；当$L=\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$时，$s_{11}(\zeta)$零点为$\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$；当$L=\frac{4\pi}{3}$时，$s_{11}(\zeta)$的零点为$\zeta=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；当$0<L<\frac{\pi}{2}$时，有$f(0)<0, f(\pi)<0$，则散射数据$s_{11}(\zeta)$在$(0,\pi)$内不存在零点；当$\frac{\pi}{2}<L<\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$时，有$f(0)>0, f\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$，此时$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$；当$\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}<L<\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$时，有$f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$，则散射数据$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$；当$\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}<L<\frac{4\pi}{3}$时，有$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$，此时$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$；当$L>\frac{4\pi}{3}$时，有$f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，此时$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$；

此时我们可以通过数学归纳法得知，当$n\le -1$时，对于任意$\theta \le \frac{\pi}{2}$均有$f(\theta)>0$，我们可以定义$L_5=-\frac{n\pi}{2}, L_6=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}, L_7=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{n\pi}{\sqrt{2}}, L_8=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{n\pi}{\sqrt{3}}$，则有当$L=L_6$时，$s_{11}(\zeta)$的零点为$\zeta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$；当$L=L_7$时，其零点为$\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$；当$L=L_8$时，零点为$\zeta=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$；当$0<L<L_5$时，有$f(0)<0, f(\pi)<0$，则散射数据$s_{11}(\zeta)$在$(0,\pi)$内不存在零点；当$L_5<L<L_6$时，有$f(0)>0, f\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$，则$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$；当$L_6<L<L_7$时，有$f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$，此时$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$；当$L_7<L<L_8$时，有$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$，此时$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$；当$L>L_8$时，有$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$，此时$s_{11}(\zeta)$的零点位于$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$。

综上所述，散射数据$s_{11}(\zeta)$的零点随着区间长度L的变化而产生变动，通过对特殊的三角函数值的研究发现，在一定的条件下，$s_{11}(\zeta)$在复ζ平面的上半平面内只有一个零点，而在某些条件下，$s_{11}(\zeta)$在上半平面内不存在零点。

4. 总结

本文首先利用具有特殊初值条件的散焦 KE 方程的 Lax 对得到了初值条件下的 KE 方程的 Jost 函数解，然后通过散射关系得到了相应的散射矩阵和散射系数，随后根据已知的散射数据$s_{11}(t,\zeta)$求出该系数的零点，最后我们通过一些特殊的三角函数值来具体研究散焦 KE 方程的零点，在这个过程中，我们发现散射数据$s_{11}(\zeta)$的零点会随着区间长度的变化而产生变动，也就是说，在一定的区域内，$s_{11}(\zeta)$在复ζ平面的上半平面内只有一个零点，但超过一定的区域，$s_{11}(\zeta)$在复ζ平面的上半平面内不存在零点。

尽管本文在关于特殊初值的 KE 方程的基础理论的创新上取得了一些进展，对于其他情况下研究相应的零点问题提供了一个思路，而零点的精确解求解是一个复杂且困难的过程，相信在今后关于这一方面的研究会找到更合适的方法来解决此问题，相信今后关于这一方面的研究将会越来越好，也将会碰撞出更多激烈的火花，不断丰富孤立子理论的内容与结构。

参考文献

[1] Wang, D.S. and Wang, X.L. (2018) Long-Time Asymptotics and the Bright N-Soliton Solutions of the KunduEckhaus

Equation via the Riemann-Hilbert Approach. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **41**, 334-361. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.10.014

[2] Biondini, G. and Fagerstrom, E. (2015) The Integrable Nature of Modulational Instability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **75**, 136-163. https://doi.org/10.1137/140965089

[3] Prinari, B., Biondini, G. and Vitale, F. (2015) Dark-Bright Soliton Solutions with Nontrivial Polarization Interactions for the Three-Component Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation with Nonzero Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Physics*, **56**, 071505. https://doi.org/10.1063/1.4926439

[4] Wang, X., Yang, B., Chen, Y. and Yang, Y.Q. (2014) Higher-Order Rogue Wave Solutions of the Kundu-Eckhaus Equation. *Physica Scripta*, **89**, 095210. https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/9/095210

[5] Johnson, R.S. (1977) On the Modulation of Water Waves in the Neighbourhood of kh ≈ 1.363. *Proceedings of the Royal Society London A*, **357**, 131-141. https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0159

[6] Zhao, L.C., Liu, C. and Yang, Z.Y. (2015) The Rogue Waves with Quintic Nonlinearity and Nonlinear Dispersion Effects in Nonlinear Optical Fibers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **20**, 9-13. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.04.002

[7] Feng, Z. and Wang, X. (2011) Explicit Exact Solitary Wave Solutions for the Kundu Equation and the Derivative Schrödinger Equation. *Physica Scripta*, **64**, 7-14. https://doi.org/10.1238/Physica.Regular.064a00007

[8] Biondini, G. and Prinari, B. (2014) On the Spectrum of the Dirac Operator and the Existence of Discrete Eigenvalues for the Defocusing Nonlinear Schrodinger Equation. *Studies in Applied Mathematics*, **132**, 138-159. https://doi.org/10.1111/sapm.12024