Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2340-2363
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125238

Hans汉斯

具有结构阻尼的扩展型梁方程的时间依赖吸引子

郭 瑞，汪 璇*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月28日；录用日期：2023年5月21日；发布日期：2023年5月29日

摘 要

本文研究了带有结构阻尼的扩展型梁方程在空间 $\mathcal{H}_t$ 中解的长时间动力学行为。首先证明了非线性项 $f(u)$ 在次临界条件下方程解的适定性，再利用收缩函数的方法验证了解过程 $\{U(t,\tau)\}$ 的渐近紧性，最后证得了时间依赖吸引子的存在性。

关键词

结构阻尼，收缩函数，时间依赖吸引子，扩展型梁方程

The Time-Dependent Global Attractors for an Extensible Beam Equation with Structural Damping

Rui Guo, Xuan Wang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 28^{th}, 2023; accepted: May 21^{st}, 2023; published: May 29^{th}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 郭瑞, 汪璇. 具有结构阻尼的扩展型梁方程的时间依赖吸引子[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2340-2363.
DOI: 10.12677/aam.2023.125238

Abstract

This paper studies longtime behavior of solutions for an extensible beam equation with structural damping in the $\mathcal{H}_t$ space. In the first instance, we show that the global well-posedness of solutions for the equation with nonlinearity $f(u)$ under subcritical condition. Moreover, the asymptotic compactness of the solution process $\{U(t,\tau)\}$ is proved by using the method of contraction function. Finally, the existence of the time-dependent global attractor is gained.

Keywords

Structural Damping, Contraction Function, The Time-Dependent Attractors, Extensible Beam Equation

1. 引言

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N \geqslant 5)$ 中具有光滑边界的有界域, 考虑如下带有结构阻尼的扩展型梁方程

$$\begin{cases} \varepsilon(t)\partial_t^2 u + \Delta^2 u + \gamma(-\Delta)^\theta \partial_t u + f(u) = g(x), & x \in \Omega,\ t \geqslant \tau, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geqslant \tau, \\ u(x,\tau) = u_0(x),\ \partial_t u(x,\tau) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\theta \in (\frac{1}{2}, 1), \gamma > 0$, $f(u)$ 是非线性项, $g(x)$ 是外力项.

在1950年, Woinowsky – Krieger 在 [1]中提出了如下梁方程:

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u - M(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)\Delta u = F(x, u, \partial_t u, \Delta\partial_t u). \tag{1.2}$$

在梁方程的运动过程中, 由于系统自身原因和外部的相互作用而引起的系统能量逐渐耗散的现象称为阻尼, 阻尼一般可分为强阻尼, 弱阻尼与介于两者之间的结构阻尼. 对于方程 (1.1) 中的 $\varepsilon(t) \equiv C$

时的研究已有了丰硕的成果. 如文 [2]建立了非线性项在次临界条件下有限维全局吸引子和指数吸引子的存在性, 文 [3]得到了带有非局部弱阻尼扩展型梁方程在次临界条件下全局吸引子的存在性, 当 $0<\theta\leqslant 1$ 时, 文 [4]中研究了一类非局部扩展型梁方程的有限维紧全局吸引子和指数吸引子, 文 [5]得出了当 $0<\theta\leqslant 1$ 时, $f(u)$ 具有最优次临界增长, 其增长指数满足:$1\leqslant p<p_\theta=\frac{N+4\theta}{(N-4)^+}$.

当方程中的 $\epsilon(t)\not\equiv C$ 时, 问题 (1.1) 变得更加复杂有趣, 传统意义上描述动力系统的全局吸引子, 指数吸引子和拉回吸引子不能够很好地刻画问题 (1.1) 的长时间动力学行为. 于是 Conti 等提出了时间依赖空间的思想, 由此掀起了研究时间依赖吸引子的热潮. 文 [6]建立了如下模型:

$$\varepsilon(t)\partial_t^2 u-\Delta u+\gamma(-\Delta)^\alpha\partial_t u+f(u)=g(x), \tag{1.3}$$

这里 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$. 还得出了当 $1\leqslant p\leqslant p^{**}=\frac{N+2}{N-2}(N\geqslant 3)$ 时解是存在的, 当 $1\leqslant p\leqslant p^{*}=\frac{N+4\alpha}{N-2}(N\geqslant 3)$ 时解是拟稳定的, 进而得出了时间依赖吸引子的存在性. 文 [7]和文 [8]分别讨论了梁方程和 Plate 方程的时间依赖吸引子的存在性, 而目前尚未有对具有结构阻尼的扩展型梁方程的时间依赖吸引子进行研究. 受以上文献的启发, 本文首先用逼近的方法证明了问题 (1.1) 解的适定性, 再利用收缩函数的方法验证了对应过程的渐近紧性, 最后得到了时间依赖吸引子的存在性.

2. 预备知识

首先, 为了简洁, 我们使用以下缩写

$$L^p=L^p(\Omega),\ H^k=H^k(\Omega),\ V_1=H_0^1(\Omega),$$

$$V_2=H_0^1\cap H^2,\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2},\ \|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p},$$

其中 $p\geqslant 1$. 则有嵌入 $V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^2\hookrightarrow V_{-2}$, 定义算子 $A:V_2\to V_{-2}$,

$$\langle Au,v\rangle=\langle\Delta u,\Delta v\rangle,\ \ \forall u,v\in V_2,$$

则 A 是 L^2 上的自伴算子且在 V_2 上严格正, 我们也可以定义 A 的幂 A^s. 希尔伯特空间 $V_s=D(A^{\frac{s}{4}})$ 具有以下内积与范数:

$$\langle u,v\rangle_{V_s}=\langle A^{\frac{s}{4}}u,A^{\frac{s}{4}}v\rangle,\ \ \|u\|_{V_s}=\|A^{\frac{s}{4}}u\|,\ \ s\in\mathbb{R}.$$

则问题 (1.1) 可以写成下面算子的形式:

$$\begin{cases}\varepsilon(t)\partial_t^2u+Au+\gamma A^{\frac{\theta}{2}}\partial_tu+f(u)=g(x), & x\in\Omega,\ t\geqslant\tau,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant\tau,\\ u(x,\tau)=u_0(x),\ \partial_tu(x,\tau)=u_1(x), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{2.1}$$

定义时间依赖空间为:

$$\mathcal{H}_t=V_2\times L^2,$$

并且相对应的范数为:
$$\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t}^2=\|u\|_{V_2}^2+\epsilon(t)\|\partial_t u\|^2.$$

令 C 为正常数, 下文中出现在不同式子中的每一个 C 表示的是对应的常数值, 我们也用 $C_i, i\in\mathbb{N}$ 来表示其他正常数. 设 $\epsilon(t)$, $f(u)$, g 满足下列条件:

(C_1) 函数 $\varepsilon(t)\in C^1(\mathbb{R})$ 是一个单调递减的有界函数, 并满足

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=0, \tag{2.2}$$

且存在常数 $L>0$, 使得
$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[|\varepsilon(t)|+|\varepsilon'(t)|]\leqslant L. \tag{2.3}$$

(C_2) $f\in C^1(\mathbb{R}), s\in\mathbb{R}$ 满足:

$$u_f=\liminf_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{s}>-\lambda_1, \tag{2.4}$$

其中 $\lambda_1>0$ 为算子 A 的第一特征值. 且当 $N\geqslant 5$ 时有

$$|f'(s)|\leqslant C(1+|s|^{p-1}),\quad 1\leqslant p<p_\theta=\frac{N+2\theta}{N-4}. \tag{2.5}$$

(C_3) $g\in L^2(\Omega)$, $(u_0,u_1)\in\mathcal{H}_\tau$, 且有 $\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{H}_\tau}\leqslant R$.

注 1　由 (2.4) 可得, 存在常数 η ,当 $0<\lambda_1-\eta\ll 1$ 时, 使得

$$F(s)\geqslant-\frac{\eta}{2}s^2-C, f(s)s\geqslant-\eta s^2-C. \tag{2.6}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(r)\mathrm{d}r$.

注 2　当 $N\leqslant 4$ 时, 显然有 $V_2\hookrightarrow L^\infty$, 所以我们着重讨论当 $N\geqslant 5$ 时的结果.

引理 2.1 [2] 设 X, B 和 Y 是三个 Banach 空间, 满足嵌入 $X\hookrightarrow\hookrightarrow B\hookrightarrow Y$,

$$W=\{u\in L^p(0,T;X)|u_t\in L^1(0,T;Y)\},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$W_1=\{u\in L^\infty(0,T;X)|u_t\in L^r(0,T;Y)\},\quad r>1.$$

则
$$W\hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;B),\quad W_1\hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];B).$$

定理 2.1 [9] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 是 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 上的一个过程, 并且有一个拉回吸收族 $\mathcal{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 此外, 假设对 $\forall\,\epsilon>0$, 存在 $T(\epsilon)\leqslant t$, $\Phi_T^t\in\mathcal{C}(B_T)$, 使得

$$\|U(t,T)x-U(t,T)y\|\leqslant\epsilon+\Phi_T^t(x,y),\ \ \forall x,y\in B_T,$$

对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$, 则 $U(\cdot,\cdot)$ 是拉回渐近紧的.

定义 2.1 [9] 设 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族 Banach 空间, $\mathcal{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的一族一致有界子集. 我们称定义在 $\mathcal{H}_t\times\mathcal{H}_t$ 上的函数 $\Phi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 为 $C_\tau\times C_\tau$ 上的收缩函数, 如果对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$, 任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C_\tau$, 存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\Phi_\tau^t(x_{n_k},x_{n_l})=0,\ \ \forall\tau\leqslant t.$$

我们用 $\mathcal{C}(C_\tau)$表示 $C_\tau\times C_\tau$ 收缩函数的集合.

引理 2.2 [10] 设 Φ,Ψ,Λ 是非负连续函数, 且满足微分不等式

$$\Psi'(t)\leqslant\Phi(t)\Psi(t)+\Lambda(t),\ t>0,$$

则

$$\Psi(t)\leqslant\Psi(0)\mathrm{e}^{\int_0^t\Phi(s)\mathrm{d}s}+\int_0^t\Lambda(s)\mathrm{e}^{\int_s^t\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s.$$

如果不等式

$$\Psi'(t)+\beta\Phi(t)\leqslant\Lambda(t),$$

成立, 其中 $\beta>0$. 则

$$\Psi(t)\leqslant\mathrm{e}^{-\beta t}\Psi(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\Lambda(s)\mathrm{d}s$$

.

引理 2.3 [10] 设 $1\leqslant p_1,\ p_2\leqslant\infty,\ 0\leqslant s<l(s,l\in\mathbb{Z}_+)$. 若

$$\vartheta=\frac{\frac{n}{p}-\frac{n}{p_1}-s}{\frac{n}{p_2}-\frac{n}{p_1}-l}$$

满足 $\frac{s}{l}\leqslant\vartheta<1$. 则

$$\|u\|_{s,p}\leqslant C\|u\|_{0,p_1}^{1-\vartheta}\|u\|_{l,p_2}^{\vartheta}.$$

定理 2.2 [11] (Banach – Alaoglu 定理) 设 X 是一个自反的 Banach 空间, 若 $B\subset X$ 是有界的, 则 B 在弱拓扑空间 X 中相对紧.

定义 2.2 [12] 设 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族赋范空间, 双参数算子族 $\{U(t,\tau):\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_t,t\geqslant\tau,\tau\in\mathbb{R}\}$ 满足以下性质:

1) 对任意的 $\tau\in\mathbb{R},U(\tau,\tau)=\mathrm{Id}$ 是 $\mathcal{H}_\tau$ 上的恒等算子;

2) 对每个 $\sigma\in\mathbb{R}$ 和任意的 $t\geqslant\tau\geqslant\sigma$, $U(t,\tau)U(\tau,\sigma)=U(t,\sigma)$.

则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

定义 2.3 [12] 如果对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 存在一个常数 $R>0$, 使得 $C_t\subset\{z\in\mathcal{H}_t:\|z\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant R\}=$

$B_t(R)$, 则称有界集 $C_t \subset \mathcal{H}_t$ 的集合族 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一致有界的.

定义 2.4 [12] 如果对任意的 $R > 0$, 存在常数 $t_0(t, R) \leqslant t$, 使得 $\tau \leqslant t - t_0 \Rightarrow U(t, \tau)B_\tau(R) \subset B_t$, 则称一致有界集族 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是过程 $U(t, \tau)$ 的时间依赖吸收集.

定义 2.5 [12] 如果 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 一致有界, 且对任意的 $R > 0$, 存在常数 $t_0 = t_0(t, R) \leqslant t$, 使得 $\tau \leqslant t_0 \Rightarrow U(t, \tau)B_\tau(R) \subset B_t$, 则称 $\mathcal{B}$ 是拉回吸收的.

定义 2.6 [12] 过程 $U(t, \tau)$ 的时间依赖吸引子是满足如下性质的最小族 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$:

1) 每个 A_t 在 $\mathcal{H}_t$ 中是紧的;

2) $\mathcal{A}$ 是拉回吸引的, 即对每个一致有界族 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 极限

$$\lim_{\tau\to-\infty} \delta_t(U(t, \tau)C_\tau, A_t) = 0$$

成立, 其中

$$\delta_t(B, C) = \sup_{x\in B} \inf_{y\in C} \|x - y\|_{\mathcal{H}_t}$$

表示集合 B 和 C 的 Hausdorff 半距离.

定理 2.3 [12] 如果过程 $U(t, \tau)$ 渐近紧, 即集合 $\mathbf{K} = \{\mathcal{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}} : K_t \subset \mathcal{H}_t$ 为紧集, $\mathcal{K}$ 为拉回吸引$\}$ 是非空紧的, 则时间依赖吸引子 $\mathcal{A}$ 存在且唯一.

定义 2.7 [12] 如果 $\forall t \geqslant \tau$, $U(t, \tau)A_\tau = A_t$, 则称时间依赖吸引子 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是不变的.

定理 2.4 [12] 设 $U(\cdot, \cdot)$ 为作用于 Banach 空间族 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的过程, 则 $U(\cdot, \cdot)$ 有时间依赖全局吸引子 $\mathcal{U}^* = \{A^*_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足

$$A^*_t = \bigcap_{s\leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau\leqslant s} U(t, \tau)B_\tau},$$

当且仅当

(i) $U(\cdot, \cdot)$ 存在时间依赖吸收集族 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$;

(ii) $U(\cdot, \cdot)$ 是渐近紧的.

3. 适定性

定理 3.1 若条件 (C_1)-(C_3) 成立, 则问题 (2.1) 有一个弱解 u, 且 $(u, \partial_t u) \in L^\infty([\tau, T]; \mathcal{H}_t)$, $\partial_t u \in L^2([\tau, T]; V_\theta)$, 且有下式成立

$$\|(u, \partial_t u)\|^2_{\mathcal{H}_t} + \int_\tau^t \|\partial_t u(s)\|^2_{V_\theta} \mathrm{d}s \leqslant C_0, \ \ \forall t \geqslant \tau, \tag{3.1}$$

其中 $C_0 = C(R, \delta, \|g\|)$. 此外, 当 $1 \leqslant p < p_\theta = \frac{N+2\theta}{N-4}$ 时解还具有以下性质:

(i) 对任意的 $t \geqslant s \geqslant \tau$ 和 $(u, \partial_t u) \in \mathcal{H}_t$ 有下列能量恒等式成立

$$E(u(s),\partial_t u(s))+\frac{1}{2}\int_s^t\varepsilon'(r)\|\partial_t u(r)\|^2\mathrm{d}r\ =E(u(t),\partial_t u(t))+\gamma\int_s^t\|\partial_t u(r)\|_{V_\theta}^2\mathrm{d}r, \tag{3.2}$$

其中

$$E(u(t),\partial_t u(t))=\frac{1}{2}(\|u\|_{V_2}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2)+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-\langle g,u\rangle.$$

(ii) 设 $z=u-v$ 为问题 (2.1) 对应于初值 (u_0,u_1), (v_0,v_1) 的解, 则该解在空间 $V_{2-\theta}\times V_{-\theta}$ 中 Lipschitz 连续, 即对 $\tau\leqslant t\leqslant T$, 有

$$\|(z,\partial_t z)(t))\|_{V_{2-\theta}\times V_{-\theta}}^2\leqslant C_3\|(z,\partial_t z)(\tau)\|_{V_{2-\theta}\times V_{-\theta}}^2, \tag{3.3}$$

其中 $C_3=\max\{C_1,C_2\}=\max\{\{2\gamma+b\delta L+\delta,\ L+bL\},\ \{\frac{17\delta}{8}+\frac{\delta L}{2}+\delta bL,\ b\delta\gamma,\ b\}\}$, 这里的 δ, b 充分小, 并且 z 还满足下式

$$\|z(t)\|_{V_{2-\theta}}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t z(t)\|_{V_{-\theta}}^2\leqslant \mathrm{e}^{-bt}(\|z(\tau)\|_{V_{2-\theta}}^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t z(\tau)\|_{V_{-\theta}}^2)$$

$$+C_3\int_\tau^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}(\|\partial_t z(s)\|^2+\|z(s)\|_{V_2}^2)\mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

(iii) 对任意的 $\tau<ka<a\leqslant t\leqslant T$, $(u,\partial_t u,\partial_t^2 u)\in L^\infty([a,T];V_{2+\theta}\times V_{2-\theta}\times V_{-\theta})\cap L^2([a,T];V_4\times V_2\times L^2(\Omega))$, 有下式成立

$$\|u\|_{V_{2+\theta}}^2+\|\partial_t u\|_{V_{2-\theta}}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t^2 u\|_{V_{-\theta}}^2+\int_t^{t+1}(\|u(s)\|_{V_4}^2+\|\partial_t u(s)\|_{V_2}^2+\|\partial_t^2 u(s)\|^2)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant(1+\frac{30}{7\nu})\frac{\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}}{t^{\frac{2}{\theta}}}+(\frac{2}{\gamma}+\frac{16}{7})C_0(t-ka)^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}+(\frac{2}{\nu\gamma}+\frac{16}{7\nu})h(t)+\frac{8}{7}C_4, \tag{3.5}$$

其中 $k>0$, $\nu=\min\{\frac{9}{8}\delta,\gamma-\delta L+\delta\}$, $h(t)=\frac{\mathrm{e}^{C_0(ka-\tau)}\mathrm{e}^{C_0(t-ka)}}{(ka)^{\frac{2}{\theta}}(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}}$, $C_4=C(R,\delta,\|g\|,L)$.

证明 对方程 (2.1) 乘以 $\partial_t u$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u,\partial_t u)+\gamma\|\partial_t u\|_{V_\theta}^2-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\|\partial_t u\|^2=0, \tag{3.6}$$

其中

$$E(u,\partial_t u)=\frac{1}{2}(\|u\|_{V_2}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2)+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-\langle g,u\rangle.$$

将 (3.6) 在 $[s,t]$ 上积分可得 (3.2). 由注 1, Hölder 不等式, Young 不等式以及 Poincaré 不等式可得

$$\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\eta}{2}\|u\|^2-C\geqslant-\frac{\eta}{2\lambda_1}\|u\|_{V_2}^2-C(\eta). \tag{3.7}$$

$$\langle g,u\rangle\leqslant\frac{1}{4\delta^2}\|g\|^2+\frac{\delta^2}{\lambda_1}\|u\|_{V_2}^2. \tag{3.8}$$

所以有

$$\begin{aligned}E(u,\partial_t u) &= \frac{1}{2}(\varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2+\|u\|_{V_2}^2)+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-\langle g,u\rangle\\ &\geqslant \frac{1}{2}(\varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2+(1-\frac{\eta}{\lambda_1})\|u\|_{V_2}^2)-\langle g,u\rangle-C(\eta)\\ &\geqslant d\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t}^2-C(\delta,\|g\|),\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $d=\min\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\eta+2\delta^2}{2\lambda_1}\}$. 对 (3.6) 从 τ 到 t 积分可得

$$E(u(t),\partial_t u(t))+\gamma\int_\tau^t\|\partial_t u(s)\|_{V_\theta}^2\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_\tau^t\varepsilon'(s)\|\partial_t u(s)\|^2\mathrm{d}s=E(u(\tau),\partial_t u(\tau)).\tag{3.10}$$

由 $\varepsilon(t)$ 的递减性可知

$$E(u(t),\partial_t u(t))\leqslant E(u(\tau),\partial_t u(\tau)).$$

则有

$$\|(u,\partial_t u)\|_{X_t}^2\leqslant C(R,\delta,\|g\|).\tag{3.11}$$

因为 $\gamma>0$, 再结合 (3.11), 有

$$\int_\tau^t\|\partial_t u(s)\|_{V_\theta}^2\mathrm{d}s\leqslant C(R,\delta,\|g\|).\tag{3.12}$$

记 $C_0=C(R,\delta,\|g\|)$, 再结合 (3.11) 和 (3.12) 可得 (3.1).

(ii) 设 u,v 为方程 (2.1) 对应于初值 (u_0,u_1), (v_0,v_1) 的解, 则 $z=u-v$ 满足下式

$$\varepsilon(t)\partial_t^2 z+Az+\gamma A^{\frac{\theta}{2}}\partial_t z+f(u)-f(v)=0.\tag{3.13}$$

将 (3.13) 与 $2A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t z+2\delta z$ 做内积有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(z,\partial_t z)+2\delta\|z\|_{V_2}^2+[2\gamma-2\delta\varepsilon(t)]\|\partial_t z\|^2-\varepsilon'(t)\|\partial_t z\|_{V_{-\theta}}^2-2\delta\varepsilon'(t)\langle\partial_t z,z\rangle\\ &\quad=-\langle f(u)-f(v),2A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t z+2\delta z\rangle,\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中

$$H_1(z,\partial_t z)=\varepsilon(t)\|\partial_t z\|_{V_{-\theta}}^2+2\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t z,z\rangle+\|z\|_{V_{2-\theta}}^2+\gamma\delta\|z\|_{V_\theta}^2.$$

因为 $V_{2-\theta}\hookrightarrow V_\theta$, 所以

$$\begin{aligned}|\varepsilon(t)\langle\partial_t z,z\rangle| &\leqslant \varepsilon(t)\|A^{-\frac{\theta}{4}}\partial_t z\|\cdot\|A^{\frac{\theta}{4}}z\|\\ &\leqslant \frac{\varepsilon(t)}{2}\|\partial_t z\|_{V_{-\theta}}^2+\frac{L}{2}\|z\|_{V_{2-\theta}}^2,\end{aligned}$$

当 δ 充分小时,

$$H_1(z,\partial_t z)\sim\varepsilon(t)\|\partial_t z\|_{V_{-\theta}}^2+\|z\|_{V_{2-\theta}}^2.\tag{3.15}$$

当 $N=4$ 时, 对 $1<r<\infty$, 有 $V_2\hookrightarrow L^r$; 当 $N\geqslant 5$ 时, 对 $0<\delta\ll 1$, 有 $\frac{2N}{N-2(2-\delta)}<\frac{2N}{N-4}$, 另有 $V_2\hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-4}}$; 因为 $1\leqslant p<p_\theta=\frac{N+2\theta}{N-4}$, 所以有 $\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}<\frac{2N}{N-4}$, 进而有 $V_2\hookrightarrow L^{\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}}$. 由 Hölder 不等式, Young 不等式以及中值定理可得

$$
\begin{aligned}
&|\langle f(u)-f(v),2A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t z+2\delta z\rangle|\\
\leqslant&C\int_\Omega(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|z|(|A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t z|+\delta|z|)\mathrm{d}x\\
\leqslant&C(1+\|u\|^{p-1}_{\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}}+\|v\|^{p-1}_{\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}})\|z\|_{\frac{2N}{N-2(2-\delta)}}(\|A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t z\|_{\frac{2N}{N-2\theta}}+\delta\|z\|_{\frac{2N}{N-2\theta}})\\
\leqslant&C(1+\|u\|^{p-1}_{V_2}+\|v\|^{p-1}_{V_2})\|z\|_{V_{2-\delta}}(\|A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t z\|_{V_\theta}+\delta\|z\|_{V_\theta})\\
\leqslant&C_0\|z\|_{V_2}(\|\partial_t z\|+\delta\|z\|_{V_2})\\
\leqslant&\delta\|\partial_t z\|^2+\frac{\delta}{8}\|z\|^2_{V_2}+C_0,
\end{aligned}\tag{3.16}
$$

其中用到了 $\frac{\theta+2-\delta}{N}+\frac{N-2(2-\delta)}{2N}+\frac{N-2\theta}{2N}=1,\ 2-\delta<2,\ \theta<2$. 所以对充分小的 $b>0$, 将 (3.16) 代入 (3.14) 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(z,\partial_t z)+bH_1(z,\partial_t z)\\
&\quad\leqslant[2-2\delta\varepsilon(t)]\|\partial_t z\|^2+[\varepsilon'(t)+b\varepsilon(t)]\|\partial_t z\|^2_{V_{-\theta}}+\delta\|\partial_t z\|^2+b\|z\|^2_{V_{2-\theta}}\\
&\quad+2\delta\|z\|^2_{V_2}+b\delta\|z\|^2_{V_\theta}+2\delta\varepsilon'(t)\langle\partial_t z,z\rangle+2\delta b\varepsilon(t)\langle\partial_t z,z\rangle+\frac{\delta}{8}\|z\|^2_{V_2}+C_0.
\end{aligned}\tag{3.17}
$$

而

$$
\begin{aligned}
|2\delta\varepsilon'(t)\langle\partial_t z,z\rangle|&\leqslant 2\delta L\|\partial_t z\|\|z\|\\
&\leqslant 2\delta L\|\partial_t z\|^2+\frac{\delta L}{2}\|z\|^2_{V_2}.
\end{aligned}\tag{3.18}
$$

$$
|2\delta b\varepsilon(t)\langle\partial_t z,z\rangle|\leqslant\delta bL(\|\partial_t z\|^2+\|z\|^2_{V_2}).\tag{3.19}
$$

结合 (3.17)-(3.19), 取 $C_1=\max\{2\gamma+b\delta L+\delta,\ L+bL\},\ C_2=\max\{\frac{17\delta}{8}+\frac{\delta L}{2}+\delta bL,\ b\delta\gamma,\ b\}$, 则有

$$
\begin{aligned}
&|(2\gamma-2\delta\varepsilon(t))|\|\partial_t z\|^2+|(\varepsilon'(t)+b\varepsilon(t))|\|\partial_t z\|^2_{V_{-\theta}}+(2\delta L+\delta bL)\|\partial_t z\|^2+\delta\|\partial_t z\|^2\\
&\ \leqslant(2\gamma+b\delta L+\delta)\|\partial_t z\|^2+(L+bL)\|\partial_t z\|^2_{V_{-\theta}}\\
&\ \leqslant C_1\|\partial_t z\|^2.
\end{aligned}\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\delta\|z\|^2_{V_2}+b\delta\gamma\|z\|^2_{V_\theta}+b\|z\|^2_{V_{2-\theta}}+\frac{\delta L}{2}\|z\|^2_{V_2}+\delta bL\|z\|^2_{V_2}+\frac{\delta}{8}\|z\|^2_{V_2}\\
&\ \leqslant(\frac{17\delta}{8}+\frac{\delta L}{2}+\delta bL)\|z\|^2_{V_2}+b\delta\gamma\|z\|^2_{V_\theta}+b\|z\|^2_{V_{2-\theta}}\\
&\ \leqslant C_2\|z\|^2_{V_2}.
\end{aligned}\tag{3.21}
$$

DOI: 10.12677/aam.2023.125238

将 (3.20)-(3.21) 代入 (3.17) 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(z,\partial_t z)+bH_1(z,\partial_t z)\leqslant C_3(\|\partial_t z\|^2+\|z\|_{V_2}^2), \tag{3.22}$$

其中 $C_3=\max\{C_1,C_2\}$. 对 (3.22) 在 $[\tau,t]$ 上运用 Gronwall 引理可得 (3.4).

(iii) 将方程 (2.1) 关于 t 求导, 可得 $v=\partial_t u$ 满足方程

$$\varepsilon(t)\partial_t^2 v+\varepsilon'(t)\partial_t v+Av+\gamma A^{\frac{\theta}{2}}\partial_t v+f'(u)v=0. \tag{3.23}$$

用 $A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t v+\delta v$ 与 (3.23) 作用可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(v,\partial_t v)+\delta\|v\|_{V_2}^2+\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+[\gamma-\delta\varepsilon(t)]\|\partial_t v\|^2+\langle f'(u)v,A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t v+\delta v\rangle\\ &=0,\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$H_2(v,\partial_t v)=\frac{1}{2}[\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+\|v\|_{V_{2-\theta}}^2]+\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t v,v\rangle+\frac{1}{2}\delta\gamma\|v\|_{V_\theta}^2.$$

因为 $V_{2-\theta}\hookrightarrow V_\theta$, 所以

$$\begin{aligned}|\varepsilon(t)\langle\partial_t v,v\rangle|&\leqslant\varepsilon(t)\|A^{-\frac{\theta}{4}}\partial_t v\|\,\|A^{\frac{\theta}{4}}v\|\\ &\leqslant\frac{\varepsilon(t)}{2}\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+\frac{L}{2}\|v\|_{V_{2-\theta}}^2,\end{aligned}$$

当 δ 充分小时,

$$H_2(v,\partial_t v)\sim\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+\|v\|_{V_{2-\theta}}^2. \tag{3.25}$$

与 (3.16) 的估计类似, 有

$$\begin{aligned}&|\langle f'(u)v,A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t v+\delta v\rangle|\\ \leqslant&C\int_\Omega(1+|u|^{p-1})|v|(|A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t v|+\delta|v|)\mathrm{d}x\\ \leqslant&C(1+\|u\|_{\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}}^{p-1})\|v\|_{\frac{2N}{N-2(2-\delta)}}(\|A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t v\|_{\frac{2N}{N-2\theta}}+\delta\|v\|_{\frac{2N}{N-2\theta}})\\ \leqslant&C(1+\|u\|_{V_2}^{p-1})\|v\|_{V_{2-\delta}}(\|A^{-\frac{\theta}{2}}\partial_t v\|_{V_\theta}+\delta\|v\|_{V_\theta})\\ \leqslant&C_0\|v\|_{V_2}(\|\partial_t v\|+\delta\|v\|_{V_2})\\ \leqslant&\delta\|\partial_t v\|^2+\frac{\delta}{8}\|v\|_{V_2}^2+C_0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

将 (3.26) 代入 (3.25) 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(v,\partial_t v)+\frac{9}{8}\delta\|v\|_{V_2}^2+[\gamma-\delta\varepsilon(t)+\delta]\|\partial_t v\|^2$$
$$\leqslant C_0\|v\|_{V_{2-\theta}}^2-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+C_0.$$

由 $\varepsilon(t)$ 的递减性可得, 对充分小的 δ 和 $\nu=\min\{\frac{9}{8}\delta,\gamma-\delta L+\delta\}$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(v,\partial_t v)+\nu(\|v\|_{V_2}^2+\|\partial_t v\|^2)\leqslant C_0H_2(v,\partial_t v)+C_0. \tag{3.27}$$

用 $t^{\frac{2}{\theta}}$ 乘以 (3.27) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{\frac{2}{\theta}}H_2(v,\partial_t v))+\nu t^{\frac{2}{\theta}}(\|v\|_{V_2}^2+\|\partial_t v\|^2)\\&\leqslant C_0t^{\frac{2}{\theta}}H_2(v,\partial_t v)+C_0t^{\frac{2}{\theta}}+Ct^{\frac{2-\theta}{\theta}}(\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+\|v\|_{V_{2-\theta}}^2),\ \ \tau\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

由 $V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^2\hookrightarrow V_{-2}$ 和 (3.1) 可得

$$\|f(u)\|_{V_{-2}}\leqslant C\|f(u)\|\leqslant C(\|u\|+\|u\|_{V_2}^p)\leqslant C_0. \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-2}}&=\varepsilon(t)\|\partial_t^2 v\|_{V_{-2}}\\&\leqslant\|Au\|_{V_{-2}}+\gamma\|A^{\frac{\theta}{2}}\partial_t u\|_{V_{-2}}+\|f(u)\|_{V_{-2}}+\|g\|_{V_{-2}}\\&\leqslant\|u\|_{V_2}+\gamma\|\partial_t u\|_{V_{2\theta-2}}+\|f(u)\|_{V_{-2}}+\|g\|\\&\leqslant C_0.\end{aligned} \tag{3.30}$$

结合 (3.30) 和插值定理可得

$$t^{\frac{2-\theta}{\theta}}\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2\leqslant t^{\frac{2-\theta}{\theta}}\|\partial_t v\|\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-2}}^{\theta}\leqslant\frac{\nu}{2}t^{\frac{2}{\theta}}\|\partial_t v\|^2+C_0,$$
$$t^{\frac{2-\theta}{\theta}}\|v\|_{V_{2-\theta}}^2\leqslant t^{\frac{2-\theta}{\theta}}\|v\|_{V_2}^{2-\theta}\|v\|\leqslant\frac{\nu}{2}t^{\frac{2}{\theta}}\|v\|_{V_2}^2+C_0,$$

其中用到了 $\frac{2}{\theta}-1<\frac{2}{\theta}$. 将以上结果代入 (3.28), 并利用 $V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^2$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{\frac{2}{\theta}}H_2(v,\partial_t v))+\frac{\nu}{2}t^{\frac{2}{\theta}}(\|v\|_{V_2}^2+\|\partial_t v\|^2)\leqslant C_0t^{\frac{2}{\theta}}H_2(v,\partial_t v)+C_0t^{\frac{2}{\theta}}. \tag{3.31}$$

用 $\mathrm{e}^{-C_0(t-\tau)}$ 乘以 (3.31), 并在 $[\tau,t]$ 上积分可得

$$\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2+\|v\|_{V_{2-\theta}}^2\leqslant\frac{1}{t^{\frac{2}{\theta}}}\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}. \tag{3.32}$$

对任意的 $\tau < a \leqslant t$, 给 (3.31) 乘以 $\mathrm{e}^{-C_0(t-a)}$, 并在 $[a,t]$ 上积分可得

$$\int_a^t (\|v\|_{V_2}^2 + \|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s \leqslant \frac{2}{\nu}\frac{\mathrm{e}^{C_0(a-\tau)}\mathrm{e}^{C_0(t-a)}}{a^{\frac{2}{\theta}}}.$$

用 $\mathrm{e}^{-C_0(t-\tau)}$ 乘以 (3.31) 并在 $[t,t+1]$ 上积分有

$$\begin{aligned}&H_2(v(t+1),\partial_t v(t+1))\mathrm{e}^{-C_0(t+1-\tau)} + \frac{\nu}{2}\int_t^{t+1} \mathrm{e}^{-C_0(s-\tau)}(\|v\|_{V_2}^2 + \|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\ &\quad \leqslant H_2(v(t),\partial_t v(t))\mathrm{e}^{-C_0(t-\tau)}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

因此有

$$\int_t^{t+1} (\|v\|_{V_2}^2 + \|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s \leqslant \frac{2}{\nu}\frac{\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}}{t^{\frac{2}{\theta}}}. \tag{3.34}$$

结合 (3.32) 和 (3.34) 有

$$\begin{aligned}&\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{V_{-\theta}}^2 + \|v\|_{V_{2-\theta}}^2 + \int_t^{t+1} (\|v\|_{V_2}^2 + \|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\ &\quad \leqslant (1+\frac{2}{\nu})\frac{1}{t^{\frac{2}{\theta}}}\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

用 Au 与 (2.1) 做内积, 可得

$$\frac{\gamma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{V_{2+\theta}}^2 + \|u\|_{V_4}^2 = \langle g - f(u) - \varepsilon(t)\partial_t^2 u, Au\rangle. \tag{3.36}$$

因为 $p+1 < \frac{2N+(2\theta-4)}{N-4}$, 所以有 $V_2 \hookrightarrow L^{p+1}$, 再利用 Young 不等式, Hölder 不等式和插值定理可得

$$\begin{aligned}|\langle f(u), Au\rangle| &\leqslant \|f(u)\|\|Au\|\\ &\leqslant C(1+\|u\|_{p+1}^{p-1})\|u\|_{p+1}\|u\|_{V_4}\\ &\leqslant C_0\|u\|_{V_2}\|u\|_{V_4}\\ &\leqslant C_0 + \frac{1}{4}\|u\|_{V_4}^2\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}|\langle g - \varepsilon(t)\partial_t^2 u, Au\rangle| &\leqslant (\|g\| + \varepsilon(t)\|\partial_t^2 u\|)\|u\|_{V_4}\\ &\leqslant C(\|g\|^2 + L^2\|\partial_t^2 u\|^2) + \frac{1}{4}\|u\|_{V_4}^2\end{aligned} \tag{3.38}$$

将 (3.37)-(3.38) 代入 (3.36) 可得

$$\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{V_{2+\theta}}^2 + \|u\|_{V_4}^2 \leqslant 2C_0(\|g\|^2 + L^2\|\partial_t^2 u\|^2). \tag{3.39}$$

当 $a>0,\ 0<k<1$; 或 $a<0,\ k>1$ 时, 对任意的 $\tau<ka<a\leqslant t$, 对 (3.39) 乘以 $(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}$ 可得

$$\begin{aligned}&\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}\|u\|_{V_{2+\theta}}^2]+\frac{1}{2}(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}\|u\|_{V_4}^2\\&\qquad\leqslant C_0(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}(\|g\|^2+L^2\|\partial_t^2u\|^2)+\frac{1}{2-\theta}(t-ka)^{\frac{\theta-1}{2-\theta}}\|u\|_{V_{2+\theta}}^2.\end{aligned}\tag{3.40}$$

由插值定理和 Young 不等式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-\theta}(t-ka)^{\frac{\theta-1}{2-\theta}}\|u\|_{V_{2+\theta}}^2&\leqslant C\frac{1}{2-\theta}(t-ka)^{\frac{\theta-1}{2-\theta}}\|u\|_{V_2}^{2-\theta}\|u\|_{V_4}^{\theta}\\&\leqslant\frac{1}{8}(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}\|u\|_{V_4}^2+C\|u\|_{V_2}^2.\end{aligned}\tag{3.41}$$

所以有

$$\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}\|u\|_{V_{2+\theta}}^2]\leqslant 2C_0(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}(\|g\|^2+\|u\|_{V_2}^2+L^2\|\partial_t^2u\|^2).\tag{3.42}$$

对 (3.42) 在 $[ka,t]$ 积分, 再利用前面已得到的结果有

$$\begin{aligned}\gamma\|u\|_{V_{2+\theta}}^2&\leqslant\int_{ka}^t(\|u(s)\|_{V_2}^2+L^2\|\partial_t^2u(s)\|^2)\mathrm{d}s\\&\leqslant 2C_0(t-ka)^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}+\frac{2}{\nu}h(t),\end{aligned}\tag{3.43}$$

其中

$$h(t)=\frac{\mathrm{e}^{C_0(ka-\tau)}\mathrm{e}^{C_0(t-ka)}}{(ka)^{\frac{2}{\theta}}(t-ka)^{\frac{1}{2-\theta}}}.$$

对 (3.39) 在 [a,t] 上积分可得

$$\begin{aligned}\int_a^t\|u\|_{V_4}^2\mathrm{d}s&\leqslant\frac{8\gamma}{7}\|u(a)\|_{V_{2+\theta}}^2+\frac{8}{7}\int_a^t(\|u(s)\|_{V_2}^2+L^2\|\partial_t^2u(s)\|^2)\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{16C_0}{7}(a-ka)^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}+\frac{8C_4}{7}(t-a)+\frac{16}{7\nu}h(a)+\frac{16}{7\nu}\frac{\mathrm{e}^{C_0(a-\tau)}\mathrm{e}^{C_0(t-a)}}{a^{\frac{2}{\theta}}},\end{aligned}\tag{3.44}$$

其中 $C_4=C(R,\delta,\|g\|,L)$.
对 (3.39) 在 $[t,t+1]$ 积分可得

$$\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{V_4}^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{16C_0}{7}(t-ka)^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}+\frac{8C_4}{7}+\frac{16}{7\nu}h(t)+\frac{16}{7\nu}\frac{\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}}{t^{\frac{2}{\theta}}}\tag{3.45}$$

结合 (3.43)-(3.45) 可得

$$\begin{aligned}&\|u\|_{V_{2+\theta}}^2+\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{V_4}^2\mathrm{d}s\\&\qquad\leqslant(\frac{2}{\gamma}+\frac{16}{7})C_0(t-ka)^{\frac{1-\theta}{2-\theta}}+(\frac{2}{\nu\gamma}+\frac{16}{7\nu})h(t)+\frac{16}{7\nu}\frac{\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}}{t^{\frac{2}{\theta}}}+\frac{8}{7}C_4.\end{aligned}\tag{3.46}$$

结合 (3.35) 和 (3.46) 有 (3.5) 成立.

令 $z_n=(u_n,\partial_t u_n)$ 是问题 (2.1) 对应的近似方程的解, 易知 (3.1) 对 Galerkin 近似序列 z_n 也是成立的. 因此, 存在 $(u,\partial_t u)\in L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t)$, $\partial_t u\in L^2([\tau,T];V_\theta)$,
使得

$$
\begin{aligned}
&(u_n,\partial_t u_n)\ \text{弱}*\text{收敛于}\ (u,\partial_t u)\ \text{在}\ L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t)\ \text{中},\\
&\partial_t u_n\ \text{弱收敛于}\ \partial_t u\ \text{在}\ L^2([\tau,T];V_\theta)\ \text{中}.
\end{aligned}
$$

应用引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
&u_n\to u\ \text{在}\ L^2([\tau,T];V_2), \partial_t u_n\to\partial_t u\ \text{在}\ L^2([\tau,T];L^2(\Omega)),\\
&(u_n,\partial_t u_n)\to(u,\partial_t u)\ \text{在}\ C([\tau,T];V_{2-\delta}\times V_{-\delta}),\\
&f(u_n(t))\to f(u(t))\ \text{在}\ L^2\ \text{中弱收敛}, t\in[\tau,T],\\
&u_n(x,t)\ \text{在}\ \Omega\times[\tau,T]\ \text{中几乎处处收敛于}\ u(x,t).
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

由 $V_2\hookrightarrow L^{p+1}$ 和 (2.5) 可得, 对任意的 $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^T\langle f(u_n)-f(u),\zeta\rangle\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\int_\tau^T\int_\Omega(1+|u_n|^{p-1}+|u|^{p-1})|u_n-u||\zeta|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\int_\tau^T(1+\|u_n\|_{p+1}^{p-1}+\|u\|_{p+1}^{p-1})\|u_n-u\|_{p+1}|\zeta|_{p+1}\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\int_\tau^T(1+\|u_n\|_{V_2}^{p-1}+\|u\|_{V_2}^{p-1})\|u_n-u\|_{V_2}\|\zeta\|_{V_2}\mathrm{d}t\\
&\leqslant C_0\|u_n-u\|_{L^2([\tau,T];V_2)}\to 0.
\end{aligned}
$$

所以得到 $z=(u,\partial_t u)$ 是满足 (3.1) 的问题 (2.1) 的弱解.

对任意的 $t\in[\tau,T]$, 由 (3.2) 和 (3.47) 可得

$$
\begin{gathered}
\lim_{s\to t}E(u(s),\partial_t u(s))=E(u(t),\partial_t u(t)),\\
\text{当}\ x\in\Omega\ \text{时},\ u(x,s)\to u(x,t)(s\to t)\ \text{几乎处处},\\
(u,\partial_t u)\in C([\tau,T];V_{2-\delta}\times V_{-\delta})\cap L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t).
\end{gathered}
$$

由 Fatou 引理和注 1 可得

$$
\lim_{s\to t}\langle g,u(s)\rangle=\langle g,u(t)\rangle,
$$

$$
\|(u(t)),\partial_t u(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2\leqslant\liminf_{s\to t}\|(u(s)),\partial_t u(s)\|_{\mathcal{H}_t}^2,
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (F(u(t))+\frac{\eta}{2}|u(t)|^2+C)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \liminf_{s\to t}\int_\Omega (F(u(s))+\frac{\eta}{2}|u(s)|^2+C)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \liminf_{s\to t}\int_\Omega F(u(s))\mathrm{d}x+\frac{\eta}{2}\|u(t)\|^2+C|\Omega|.
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\int_\Omega F(u(t))\mathrm{d}x\leqslant \liminf_{s\to t}\int_\Omega F(u(s))\mathrm{d}x. \tag{3.48}
$$

由以上估计式可得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{s\to t}(\frac{1}{2}\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\frac{1}{2}\|u(s)\|_{V_2}^2)+\liminf_{s\to t}\int_\Omega F(u(s))\mathrm{d}x\\
&\leqslant \lim_{s\to t}(\frac{1}{2}\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\frac{1}{2}\|u(s)\|_{V_2}^2+\int_\Omega F(u(s))\mathrm{d}x)\\
&=\frac{1}{2}\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|u(t)\|_{V_2}^2+\int_\Omega F(u(t))\mathrm{d}x\\
&\leqslant \liminf_{s\to t}(\frac{1}{2}\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\frac{1}{2}\|u(s)\|_{V_2}^2)+\liminf_{s\to t}\int_\Omega F(u(s))\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

故有

$$
\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2=\liminf_{s\to t}\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2, \tag{3.49}
$$

$$
\|u(t)\|_{V_2}^2=\liminf_{s\to t}\|u(s)\|_{V_2}^2. \tag{3.50}
$$

结合 (3.49), (3.50), 空间 $\mathcal{H}_t$ 的一致凸性和 $(u,\partial_t u)\in C_w([\tau,T];\mathcal{H}_t)$, 可得 $(u,\partial_t u)\in C([\tau,T];\mathcal{H}_t)$.

4. 时间依赖吸收集

定理 4.1 设条件 (C_1)-(C_3) 成立, 对任意的 $\tau<T$, 问题 (2.1) 的解连续依赖初值. 即如果 $z_1=(u_1,\partial_t u_1)$, $z_2=(u_2,\partial_t u_2)$ 是问题 (2.1) 关于初值 $\|z_1(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}\leqslant R$, $\|z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}\leqslant R$ 的解, 这里的 $R>0$ 是一个常数, 则

$$
\|z_1(t)-z_2(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2\leqslant \mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}\|z_1(\tau)-\|z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}^2,\quad \forall t\in[\tau,T]. \tag{4.1}
$$

证明 设 $\bar{z}(t)=\{\bar{u}(t),\partial_t\bar{u}(t)\}=z_1(t)-z_2(t)$, 则 $\bar{z}(t)$ 满足方程

$$
\varepsilon(t)\partial_t^2\bar{u}(t)+A\bar{u}+\gamma A^{\frac{\theta}{2}}\partial_t\bar{u}(t)+f(u_1)-f(u_2)=0. \tag{4.2}
$$

用 $2\partial_t\bar{u}(t)$ 与 (4.2) 做内积, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_3(\bar{u},\partial_t\bar{u}(t))+2\gamma\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{V_\theta}^2=-2\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\bar{u}(t)\rangle+\varepsilon'(t)\|\partial_t\bar{u}(t)\|^2, \tag{4.3}$$

其中

$$H_3(\bar{u},\partial_t\bar{u}(t))=\varepsilon(t)\|\partial_t\bar{u}(t)\|^2+\|\bar{u}\|_{V_2}^2.$$

由 $\varepsilon(t)$ 的递减性可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_3(\bar{u},\partial_t\bar{u}(t))+2\gamma\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{V_\theta}^2\leqslant-2\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\bar{u}(t)\rangle. \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}|-2\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\bar{u}(t)\rangle|\leqslant&C\int_\Omega(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})|\bar{u}||\partial_t\bar{u}(t)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&C(1+\|u_1\|_{\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}}^{p-1}+\|u_2\|_{\frac{N(p-1)}{\theta+2-\delta}}^{p-1})\|\bar{u}\|_{\frac{2N}{N-2(2-\delta)}}\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{\frac{2N}{N-2\theta}}\\ \leqslant&C(1+\|u_1\|_{V_2}^{p-1}+\|u_2\|_{V_2}^{p-1})\|\bar{u}\|_{V_{2-\delta}}\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{V_\theta}\\ \leqslant&C_0\|\bar{u}\|_{V_{2-\delta}}\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{V_\theta}\\ \leqslant&C_0\|\bar{u}\|_{V_2}^2+\gamma\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{V_\theta}^2.\end{aligned} \tag{4.5}$$

将 (4.5) 代入 (4.4) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_3(\bar{u},\partial_t\bar{u}(t))+\gamma\|\partial_t\bar{u}(t)\|_{V_\theta}^2\leqslant C_0(\|\bar{u}\|_{V_2}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\bar{u}(t)\|^2)$$

进而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_3(\bar{u},\partial_t\bar{u}(t))\leqslant C_0H_3(\bar{u},\partial_t\bar{u}(t)). \tag{4.6}$$

给 (4.6) 乘以 $\mathrm{e}^{-C_0(t-\tau)}$, 并在 $[\tau,t]$ 上积分可得

$$\|z_1(t)-z_2(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2\leqslant\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}\|z_1(\tau)-\|z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}^2.$$

由定理 3.1, 4.1 可知, 当 $1\leqslant p<p_\theta$ 时, 我们可以定义问题 (2.1) 的过程 $U(t,\tau):\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_t$,

$$U(t,\tau)(u_0,u_1)=(u(t),\partial_tu(t)),\ \ t\geqslant\tau,$$

其中 $u(t)$ 是问题 (2.1) 相对于初值 $(u_0,u_1)\in\mathcal{H}_\tau$ 的唯一解, 并且该过程由 $\mathcal{H}_\tau$ 映入 $\mathcal{H}_t$ 是连续的.

定理 4.2 如果条件 (C_1)-(C_3) 成立, 记 $\mathbb{B}_t(R)=\{z\in\mathcal{H}_t:\|z\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant R\}$, 那么存在 $R_0>0$, 使得 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是过程 $\{U(t,\tau)\}$ 的时间依赖吸收集, 且对 $S_0\geqslant R_0$, 满足

$$\sup_{z_\tau\in\mathbb{B}_\tau(R_0)}\{\|U(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t}+\int_\tau^{+\infty}\|\partial_tu(y)\|\mathrm{d}y\}\leqslant S_0. \tag{4.7}$$

证明 由定理 4.1 及文 [7], [13], 易证 (4.7) 成立.

5. 时间依赖吸引子

5.1. 先验估计

为了得到问题 (2.1) 的过程 $U(t,\tau)$ 的渐近紧性, 我们先进行以下估计.

设 $(u_i(t),\partial_t u_i(t))$, $i=1,2$ 是方程 (2.1) 关于初值 $(u_i(\tau),\partial_t u_i(\tau))\in\mathbb{B}_\tau(R_0)$ 的解, 记 $w(t)=u_1(t)-u_2(t)$. 则 $w(t)$ 满足

$$\begin{cases} \varepsilon(t)\partial_t^2 w+Aw+\gamma A^{\frac{\theta}{2}}\partial_t w+f(u_1)-f(u_2)=0, & x\in\Omega, t\geqslant\tau,\\ w(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, t\geqslant\tau,\\ w(x,\tau)=u_1(\tau)-u_2(\tau),\ \partial_t w(x,\tau)=\partial_t u_1(\tau)-\partial_t u_2(\tau), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

给 (5.1) 的左右两边乘以 w, 并在 $[\tau,T]\times\Omega$ 上积分可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t w(T)w(T)\mathrm{d}x-\int_\Omega \varepsilon(\tau)\partial_t w(\tau)w(\tau)\mathrm{d}x-\int_\tau^T\int_\Omega \varepsilon'(s)\partial_t w(s)w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\quad-\int_\tau^T\int_\Omega \varepsilon(s)|\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_\tau^T\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(T)|^2\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(\tau)|^2\mathrm{d}x=0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

用 w_t 乘以 (5.1), 并在 $[s,T]\times\Omega$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(T)|\partial_t w(T)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(s)|\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}w(T)|\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}w(s)|\mathrm{d}x\\ &\quad+\gamma\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_s^T\int_\Omega \varepsilon'(t)|\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

令 $G_w(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega(\varepsilon(t)|\partial_t w(t)|^2+|A^{\frac{1}{2}}w(t)|)\mathrm{d}x$, 则由 (5.3) 可得

$$\begin{aligned} &G_w(T)-G_w(s)+\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_s^T\int_\Omega \varepsilon'(t)|\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad+\gamma\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

由 $\varepsilon(t)$ 为递减函数可得 $\varepsilon'(t)\leqslant 0$, 进而有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_s^T\int_\Omega \varepsilon'(t)|\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad\leqslant G_w(s)-\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\gamma\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

而 $\varepsilon(t)|\partial_t w(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}L\varepsilon'(t)|\partial_t w(t)|^2$, 所以有

$$\begin{aligned}
&\int_s^T\int_\Omega \varepsilon(t)|\partial_t w(t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad\leqslant LG_w(s) - L\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - L\gamma\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

对 (5.4) 关于 s 在 $[\tau, T]\times\Omega$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}
&G_w(T)(T-\tau) - \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega \varepsilon'(t)|\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \int_\tau^T G_w(s)\mathrm{d}s - \int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&\quad - \gamma\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

结合 (5.5) 和 (5.2) 有

$$\begin{aligned}
\int_\tau^T G_w(s)\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega \varepsilon(s)|\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= \int_\tau^T\int_\Omega \varepsilon(s)|\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(\tau)\partial_t w(\tau)w(\tau)\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{4}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(\tau)|^2\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t w(T)w(T)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega \varepsilon'(s)\partial_t w(s)w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{\gamma}{4}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(T)|^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant LG_w(\tau) - L\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad - L\gamma\int_\tau^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(\tau)\partial_t w(\tau)w(\tau)\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{4}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(T)|^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{\gamma}{4}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(\tau)|^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega L\partial_t w(s)w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t w(T)w(T)\mathrm{d}x. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

将 (5.7) 代入 (5.6), 再由 $\varepsilon(t)$ 的递减性可得

$$
\begin{aligned}
G_w(T) \leqslant & \frac{L}{T-\tau}G_w(\tau) + \frac{1}{2(T-\tau)}\int_\Omega \varepsilon(\tau)\partial_t w(\tau)w(\tau)\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{4(T-\tau)}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(\tau)|^2\mathrm{d}x \\
& - \frac{L}{(T-\tau)}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{\gamma L}{(T-\tau)}\int_\tau^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& - \frac{1}{(T-\tau)}\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s - \frac{\gamma}{4(T-\tau)}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(T)|^2\mathrm{d}x \\
& + \frac{\gamma}{2(T-\tau)}\int_\tau^T\int_\Omega L\partial_t w(s)w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{\gamma}{(T-\tau)}\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
& - \frac{1}{2(T-\tau)}\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t w(T)w(T)\mathrm{d}x - \frac{1}{2(T-\tau)}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

令

$$
C_M = LG_w(\tau) + \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(\tau)\partial_t w(\tau)w(\tau)\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{4}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(\tau)|^2\mathrm{d}x. \tag{5.8}
$$

$$
\Phi_\tau^T((u_1(\tau),\partial_t u_1(\tau)),(u_2(\tau),\partial_t u_2(\tau))) = \sum_{i=1}^{3} I_i. \tag{5.9}
$$

其中

$$
I_1 = -\frac{1}{2(T-\tau)}\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t w(T)w(T)\mathrm{d}x + \frac{1}{2(T-\tau)}\int_\tau^T\int_\Omega L\partial_t w(s)w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s,
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{(T-\tau)}[-L\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& - \int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 = & -\frac{\gamma}{(T-\tau)}\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s - \frac{\gamma}{4(T-\tau)}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}w(T)|^2\mathrm{d}x \\
& - \frac{\gamma L}{(T-\tau)}\int_\tau^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}\partial_t w(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 (5.8), (5.9) 可得

$$
G_w(T) \leqslant \frac{1}{(T-\tau)}C_M + \Phi_\tau^T((u_1(\tau),\partial_t u_1(\tau)),(u_2(\tau),\partial_t u_2(\tau)))
$$

5.2. 渐近紧性

下面我们将利用收缩函数的方法来证明方程 (2.1) 对应的过程是渐近紧的.

定理 5.1 如果条件 (C_1)-(C_3) 成立, 对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$, 有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_{\tau_n}$, 与任意序列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \in [-\infty, t)(n \to \infty, \tau_n \to -\infty)$ 时, 则序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列.

证明 设 $(u_n(t), \partial_t u_n(t))$ 是问题 (2.1) 关于初值 $(u_i(\tau), \partial_t u_i(\tau))$ 的解, 由定理 3.1 可知 $\|u_n\|_{V_2}^2 + \varepsilon(\xi)\|\partial_t u_n\|^2$ 是有界的, 且 $\|u_n\|_{V_2}^2$ 是有界的; 由条件 (C_1) 可知, 对 $\xi \in [\tau, T]$, $\varepsilon(\xi)$
是有界的, 所以 $\|\partial_t u_n\|^2$ 是有界. 根据 Banach – Alaoglu 定理, 定理 3.1, 引理 2.1 有以下结果:

$$u_n \to u \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_2) \text{ 中弱} * \text{收敛}, \tag{5.10}$$

$$\partial_t u_n \to u_t \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_\theta) \text{ 中弱收敛}, \tag{5.11}$$

$$\partial_t u_n \to u_t \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];L^2) \text{ 中弱} * \text{收敛}, \tag{5.12}$$

$$u_n \to u \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_2), \tag{5.13}$$

$$\partial_t u_n \to \partial_t u \text{ 在 } L^2([\tau,T];L^2), \tag{5.14}$$

$$u_n \to u \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_{2\theta}), \tag{5.15}$$

其中用到了 $\theta < 2\theta < 2$.

对任意的 $\epsilon > 0$ 和固定的 $T > \tau$, 使 $T - \tau$ 足够大, 则有

$$\frac{1}{T-\tau} C_M < \epsilon.$$

由定理 2.1 可知, 我们只需证明对任意固定的 T, $\Phi_\tau^T \in \mathcal{C}(\mathbb{B}_\tau(R_0))$ 成立即可. 为此, 我们逐项处理 (5.9).

首先, 由定理 4.2 和 (5.10) - (5.13) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}(u_n - u_m)|^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{5.16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{4}}(\partial_t u_n - \partial_t u_m)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0. \tag{5.17}$$

因为 $V_2 \hookrightarrow L^{p+1}$, 再结合 (5.10) 和 (5.13) 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \varepsilon(t)(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(u_n - u_m)\mathrm{d}x \\
&\quad \leqslant C \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|_{V_2}\|u_n - u_m\|_{V_2} \\
&\quad \leqslant C \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L\|\partial_t u_n + \partial_t u_m\|_{V_2}\|u_n - u_m\|_{V_2} = 0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega L(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(u_n - u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad \leqslant C \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\int_\tau^T \|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^T \|u_n - u_m\|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_n)-f(u_m))(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega(1+|u_n|^{p-1}+|u_m|^{p-1})|u_n-u_m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T(1+\|u_n\|_{p+1}^{p-1}+\|u_m\|_{p+1}^{p-1})\|u_n-u_m\|_{p+1}^2\mathrm{d}s\\
&\quad\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T(1+\|u_n\|_{V_2}^{p-1}+\|u_m\|_{V_2}^{p-1})\|u_n-u_m\|_{V_2}^2\mathrm{d}s\\
&\quad\leqslant C_0\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\|u_n-u_m\|_{V_2}^2\mathrm{d}s=0.
\end{aligned}\tag{5.20}
$$

结合 (5.16) - (5.17), 以及 (5.18) - (5.19), 有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}I_1=0,\tag{5.21}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}I_3=0.\tag{5.22}$$

其次, 因为

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
=&\int_\tau^T\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_\tau^T\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_\tau^T\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^T\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
=&\int_\Omega F(u_n(T))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_n(\tau))\mathrm{d}x-\int_\tau^T\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_\tau^T\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+\int_\Omega F(u_m(T))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_m(\tau))\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{5.23}
$$

由 (2.5) 和 $V_2\hookrightarrow L^{p+1}$, 可得

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega(F(u_n(t))-F(u(t)))\mathrm{d}x|&\leqslant\int_\Omega|(F(u_n(t))-F(u(t)))|\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_\Omega|f(u(t)+\lambda(u_n(t)-u(t)))||u_n(t)-u(t)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\int_\Omega(1+|u_n(t)|^{p-1}+|u(t)|^{p-1})|u_n(t)-u(t)|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant C(1+\|u_n(t)\|_{p+1}^{p-1}+\|u(t)\|_{p+1}^{p-1})\|u_n(t)-u(t)\|_{p+1}^2\\
&\leqslant C(1+\|u_n(t)\|_{V_2}^{p-1}+\|u(t)\|_{V_2}^{p-1})\|u_n(t)-u(t)\|_{V_2}^2\\
&\leqslant C_0\epsilon.
\end{aligned}\tag{5.24}
$$

由 (5.14) 可得, 当 $n\to\infty$, $m\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\langle f(u_n),\partial_t u_m\rangle \mathrm{d}s\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\tau^T\langle f(u_n),\partial_t u\rangle \mathrm{d}s\\&=\int_\tau^T\langle f(u),\partial_t u\rangle \mathrm{d}s\\&=\int_\Omega F(u(T))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u(\tau))\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5.25}$$

类似地, 有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\langle f(u_m),\partial_t u_n\rangle \mathrm{d}s=\int_\Omega F(u(T))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u(\tau))\mathrm{d}x.\tag{5.26}$$

结合 (5.23) - (5.26) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=0\tag{5.27}$$

对任意固定的 T, $|\int_s^T\int_\Omega(f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t|$ 是有界的, 进而由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega(f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\int_\tau^T(\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^T\int_\Omega(f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t)\mathrm{d}s\\&=\int_\tau^T 0\mathrm{d}s=0.\end{aligned}\tag{5.28}$$

结合 (5.27) 和 (5.28) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}I_2=0.\tag{5.29}$$

综上可得 $\Phi_\tau^T\in\mathcal{C}(\mathbb{B}_\tau(R_0))$.

定理 5.2 如果条件 (C_1)-(C_3) 成立, 那么问题 (2.1) 对应的过程 $U(t,\tau):\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_t$ 有一个不变的时间依赖吸引子 $\mathcal{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

证明 由定理 2.1, 定理 3.1, 定理 4.1, 定理 5.1 易证.

6. 结论与展望

本文在第 3 部分证得了问题 (2.1) 解的存在性, 第 4 部分得出了解的唯一性和过程 $\{U(t,\tau)\}$ 的时间依赖吸收集, 再结合第 5 部分证得的 $\{U(t,\tau)\}$ 的渐近紧性就得出了时间依赖吸引子的存在性. 文章中主要用到了能量估计和收缩函数的方法, 旨在得到过程的耗散性和紧性. 由于 $\varepsilon(\cdot)$ 是依赖于时间 t 的函数, 这对过程紧性的估计会带来本质上的困难, 用收缩函数的方法很好地解决了这一难

题, 但在具体的应用中收缩函数的构造是复杂且琐碎的. 此文章只讨论了 $f(u)$ 在次临界条件下模型解的长时间动力学行为, 在今后的研究中可以考虑解在临界或者超临界情况下的性质.

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号: 12061062; 11961059).

参考文献

[1] Woinowsky-Krieger, S. (1950) The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, **17**, 35-36. https://doi.org/10.1115/1.4010053

[2] Yang, Z.J. (2013) On an Extensible Beam Equation with Nonlinear Damping and Source Terms. *Journal of Differential Equations*, **254**, 3903-3927. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.02.008

[3] Zhao, C.X., Zhao, C.Y. and Zhong, C.K. (2020) The Global Attractor for a Class of Extensible Beams with Nonlocal Weak Damping. *Discrete Continuous Dynamical Systems-B*, **25**, 935-955. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019197

[4] Jorge Silva, M.A. and Narciso, V. (2015) Attractors and Their Properties for a Class of Nonlocal Extensible Beams. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **35**, 985-1008. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.985

[5] Ding, P.Y. and Yang, Z.J. (2021) Longtime Behavior for an Extensible Beam Equation with Rotational Inertia and Structural Nonlinear Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **496**, Article 124785. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124785

[6] Luo, X.D. and Ma, Q.Z. (2022) The Existence of Time-Dependent Attractor for Wave Equation with Fractional Damping and Lower Regular Forcing Term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **27**, 4817-4835. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021253

[7] 苏小虎, 姜金平. 梁方程时间依赖全剧吸引子的存在性[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(2): 195-203. https://doi.org/10.21656/1000-0887.400088

[8] 刘亭亭, 马巧珍. Plate方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2016(2): 35-44.

[9] Meng, F.J., Yang, M.H. and Zhong, C.K. (2016) Attractors for Wave Equations with Nonlinear Damping on Time-Dependent Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **21**, 205-225. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.205

[10] Vishik, M.I. and Chepyzhov, V.V. (2011) Trajectory Attractors of Equations of Mathematical Physics. *Russian Mathematical Surveys*, **66**, 637-731. https://doi.org/10.1070/RM2011v066n04ABEH004753

[11] Robinson, J. (2001) Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge University Press, New York.

[12] Conti, M., Pata, V. and Temam, R. (2013) Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[13] Li, Y.N., Yang, Z.J. and Da, F. (2019) Robust Attractors for a Perturbed Non-Autonomous Extensible Beam Equation with Nonlinear Nonlocal Damping. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **39**, 5975-6000. https://doi.org/10.3934/dcds.2019261