Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2819-2826
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126283

Hans汉斯

广义Sylvester矩阵方程$AX+YA=C$一般解的正交投影迭代解法

田时宇*，刘　明

湖南信息学院通识教育学院，湖南　长沙

收稿日期：2023年5月16日；录用日期：2023年6月9日；发布日期：2023年6月19日

摘　要

本文讨论了广义Sylvester矩阵方程$AX+YA=C$的一般实数解及其最佳逼近的正交投影迭代解法，首先利用正交投影及奇异值分解，构造迭代算法，证明了算法的收敛性，得出了收敛速率的估计式；其次给出数值实例，验证了算法的有效性。

关键词

约束矩阵方程，正交投影迭代法，最佳逼近解，极小范数解

An Orthogonal Projection Iteration Method for the General Real Solution of Generalized Sylvester Matrix Equations $AX+YA=C$

Shiyu Tian*, Ming Liu

General Education School, Hunan University of Information Technology, Changsha Hunan

Received: May 16th, 2023; accepted: Jun. 9th, 2023; published: Jun. 19th, 2023

Abstract

The general real solution of generalized Sylvester matrix equations $AX+YA=C$ and the orthogonal projection iteration method to optimal approximation are studied. Firstly, the iterative method is constructed and its convergence is proved by using the theory of orthogonal projection and

*通讯作者。

文章引用: 田时宇, 刘明. 广义 Sylvester 矩阵方程$AX+YA=C$一般解的正交投影迭代解法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2819-2826. DOI: 10.12677/aam.2023.126283

the singular value decomposition, and the estimation of its convergence rate is obtained; secondly, numerical examples are given to verify the validity of the algorithm.

Keywords

Constrained Matrix Equations, Orthogonal Projection Iteration Method, Optimal Approximation, Minimum Norm Solution

1. 引言

用 $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵的集合，$A\otimes B$ 表示矩阵 A 和 B 的 Kronecker 积，$vec(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列向量。对 $A,B\in R^{m\times n}$，A 与 B 的内积定义为 $\langle A,B\rangle = tr(B^{\mathrm{T}}A)$，则由此内积导出的范数 $\|A\| = \sqrt{tr(A^{\mathrm{T}}A)}$ 是矩阵 A 的 Frobenius 范数。

本文讨论如下问题：

问题 I 给定 $A\in R^{m\times n}, C\in R^{m\times n}$ 求 $X\in S_1\subset R^{n\times n}, Y\in S_2\subset R^{m\times m}$，使得

$$AX+YA=C \tag{1}$$

问题 II 设问题 I 相容，且其解集合为 S_E，给定 $X_0\in R^{n\times n}, Y_0\in R^{m\times m}$，求解组 $\left[\hat{X},\hat{Y}\right]\in S_E$，使得

$$\left\|\hat{X}-X_0\right\|^2+\left\|\hat{Y}-Y_0\right\|^2 = \min_{[X,Y]\in S_E}\left[\|X-X_0\|^2+\|Y-Y_0\|^2\right] \tag{2}$$

广义 Sylvester 方程在控制论、信号处理、神经网络、模型降阶、图像恢复等领域有着广泛的应用。例如，控制理论及应用领域，在极点配置、观测器设计及构造 Sylvester 函数中都需要求矩阵方程 $AX+YA=C$ 的解。正因为矩阵方程的数值解在众多应用中的重要性，近几年国内外众多学者对矩阵方程的数值求解进行了研究，得到了一些有效的数值解法。如文献[1] [2] [3] [4]在实矩阵类上不同的方法讨论了 $AX+YA=C$ 具有一般解、对称解、反对称解的相容性条件和通解表达式。

迄今为止，对矩阵方程 $AX+YA=C$ 的解及其最佳逼近的迭代算法进行了一些研究，例如顾传青[5]给出一种改进的梯度方法，邵新慧[6]给出了松弛迭代解法，段复建[7]给出了一类 Sylvester 矩阵方程异类约束解的迭代算法，邓勇[8]给出了广义 Sylvester 矩阵方程反自反解的有限迭代算法，康靖[9]给出了改进 IO 迭代算法，但是对问题 I 的正交投影迭代算法[10]的研究结果尚未见到，并且当前给出的算法都没有有效地进行收敛速率估计。本文利用正交投影的思想构造广义 Sylvester 矩阵方程一般实数解的迭代算法，并讨论迭代算法的收敛性问题。

2. 问题 1 的迭代算法

算法 1

1) 任取初始值 X_0, Y_0，令 $C_0 = C - AX_0 - Y_0A$；

2) 计算 $\alpha_k = \dfrac{\left\|A^{\mathrm{T}}C_k\right\|^2+\left\|C_kA^{\mathrm{T}}\right\|^2}{\left\|AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\right\|^2}$；

3) 令 $\Delta X_k=\alpha_k A^{\mathrm{T}}C_k,\Delta Y_k=\alpha_k C_k A^{\mathrm{T}}$；

4) 如果 $\Delta X_k=0$ 且 $\Delta Y_k=0$，迭代结束，否则，$X_{k+1}=X_k+\Delta X_k$，$Y_{k+1}=Y_k+\Delta Y_k$；

5) 令 $C_{k+1}=C_k-\Delta C_k=C_k-A\Delta X_k-\Delta Y_k A=C_0-AX_{k+1}-Y_{k+1}A$，则转步骤(2)。

引理 1 在迭代算法 1 中，α_k 的选择使得 $\|C_{k+1}\|$ 极小并且使得 C_{k+1} 和 ΔC_k 相互正交。

证明：根据算法 1，我们有

$$\begin{aligned}\|C_{k+1}\|^2&=\|C_k-\Delta C_k\|^2\\&=\langle C_k-\Delta C_k,C_k-\Delta C_k\rangle\\&=\|C_k\|^2-2\alpha_k\langle C_k,AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\rangle+\alpha_k^2\|AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\|^2\end{aligned}$$

从上式可知，使得 $\|C_{k+1}\|$ 达到极小的充要条件是

$$\alpha_k=\frac{\langle C_k,AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\rangle}{\|AA^{T}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\|^2}=\frac{\|A^{\mathrm{T}}C_k\|^2+\|C_kA^{\mathrm{T}}\|^2}{\|AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\|^2}$$

另一方面，令 $\langle C_{k+1},\Delta C_k\rangle=0$，我们同样得到 $\alpha_k=\dfrac{\|A^{\mathrm{T}}C_k\|^2+\|C_kA^{\mathrm{T}}\|^2}{\|AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\|^2}$。

引理 2 在迭代算法 1 中，有 $\|C_{k+1}\|^2=\|C_k\|^2-\|\Delta C_k\|^2$。

定理 1 算法 1 必定收敛，在问题 I 中，设矩阵 A 的最大、最小非零奇异值分别是 σ_1,σ_r，那么算法 1 的收敛速率不小于 $-0.5\ln\left(1-\dfrac{\sigma_r^2}{2\sigma_1^2}\right)$。

证明：设矩阵 A 的秩为 $rank(A)=r$。设矩阵 A 的奇异值分解为 $A=UDV^{\mathrm{T}}$ 其中 U,V 都是正交阵，$D=\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\Sigma=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_1>\sigma_2>\cdots>\sigma_r$。

若问题 I 相容，则有 $C_0=AX+YA$ 成立，而由算法 1 得 $C_k=C_0-AX_k-Y_kA$，则

$$\begin{aligned}C_k&=AX+YA-AX_k-Y_kA\\&=UDV^{\mathrm{T}}(X-X_k)VV^{\mathrm{T}}+UU^{\mathrm{T}}(Y-Y_k)UDV^{\mathrm{T}}\\&=U\left(DV^{\mathrm{T}}(X-X_k)V+U^{\mathrm{T}}(Y-Y_k)UD\right)V^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

令 $G=DV^{\mathrm{T}}(X-X_k)V+U^{\mathrm{T}}(Y-Y_k)UD$，那么 $C_k=UGV^{\mathrm{T}}$ 其中 $G_1=(g_{ij})$，$g_{ij}\in R,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，$g_{ij}=0,i>r$ 且 $j>r$。

设 θ 是矩阵 R_k 和矩阵 ΔR_k 的夹角，则有

$$\begin{aligned}\cos(\theta)&=\frac{\langle C_k,\Delta C_k\rangle}{\|C_k\|\|\Delta C_k\|}\\&=\frac{\|A^{\mathrm{T}}C_k\|^2+\|C_kA^{\mathrm{T}}\|^2}{\|C_k\|\|AA^{\mathrm{T}}C_k+C_kA^{\mathrm{T}}A\|}\\&=\frac{\|D^{\mathrm{T}}G\|^2+\|GD^{\mathrm{T}}\|^2}{\|G\|\|DD^{\mathrm{T}}G+GD^{\mathrm{T}}D\|}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left\|DD^{\mathrm{T}}G+GD^{\mathrm{T}}D\right\|^2&=\left\|DD^{\mathrm{T}}G\right\|^2+\left\|GD^{\mathrm{T}}D\right\|^2+2tr\left(\left(DD^{\mathrm{T}}G\right)^{\mathrm{T}}GD^{\mathrm{T}}D\right)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^4g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^4g_{ij}^2+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sigma_i^2g_{ij}^2\sigma_j^2\\&\le\sigma_1^2\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2\right)\\&\le\sigma_1^2\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2\right)\\&\le2\sigma_1^2\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2\right)\end{aligned}$$

$$\left\|D^{\mathrm{T}}G\right\|^2+\left\|GD^{\mathrm{T}}\right\|^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2$$

$$\left\|G\right\|^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2$$

$$\begin{aligned}\cos(\theta)&\ge\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2}{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}\left(2\sigma_1^2\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2\right)\right)^{1/2}}\\&=\frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2g_{ij}^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}\sqrt{2}\sigma_1}\\&\ge\frac{\sigma_r\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}\sqrt{2}\sigma_1}\\&=\frac{\sigma_r\left(2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}\sqrt{2}\sigma_1}\\&\ge\frac{\sigma_r\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}g_{ij}^2+\sum_{i=r+1}^{m}\sum_{j=1}^{r}g_{ij}^2\right)^{1/2}\sqrt{2}\sigma_1}\\&=\frac{\sigma_r}{\sqrt{2}\sigma_1}\end{aligned}$$

而由引理 2，$\left\|C_k\right\|^2=\left\|C_{k+1}\right\|^2+\left\|\Delta C_k\right\|^2$，我们有 $\left\|C_{k+1}\right\|=\left\|C_k\right\|\sin(\theta)\le\left\|C_k\right\|\sqrt{1-\frac{\sigma_r^2}{2\sigma_1^2}}$。

从上式可知算法 1 必定收敛，且收敛速率不小于 $-0.5\ln\left(1-\dfrac{\sigma_r^2}{2\sigma_1^2}\right)$。

引理 3 设线性方程组 $My=b$ 存在解 $y_0\in R\left(M^{\mathrm{T}}\right)$，则 y_0 必为该线性方程组的唯一的极小范数解。

定理 2 若问题 I 相容，算法 1 收敛到该问题的极小范数解。

证明：根据算法 1，若问题 I 相容，那么由算法 1 可以得到问题 1 的一个迭代解组 $\left[X^*,Y^*\right]$，且 X^*，Y^* 可分别表示为

$$X^*=A^{\mathrm{T}}H,\ Y^*=HA^{\mathrm{T}}$$

下面证明 $\left[X^*,Y^*\right]$ 即为问题 I 的极小范数解。

将问题 I 中的矩阵方程(1)两边进行拉直映射运算，并记 $vec(X)=x$， $wec(Y)=y$， $vec\left(X^*\right)=x^*$，$vec\left(Y^*\right)=y^*$， $vec(H)=h$， $vec(C)=c$ 则矩阵方程组(1)等价于线性方程组

$$\begin{bmatrix}A\otimes I & I\otimes A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=c \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x^*\\ y^*\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}vec\left(X^*\right)\\ vec\left(Y^*\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}vec\left(A^{\mathrm{T}}H\right)\\ vec\left(HA^{\mathrm{T}}\right)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\left(A^{\mathrm{T}}\otimes I\right)h\\ \left(I\otimes A\right)h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\otimes I\\ I\otimes A\end{bmatrix}h\\ &\in R\left(\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\otimes I & I\otimes A\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\end{aligned}$$

可知 $\begin{bmatrix}x^* & y^*\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组(3)的极小范数解，由于拉直映射是同构的，故 $\begin{bmatrix}X^* & Y^*\end{bmatrix}$ 也是问题 I 的极小范数解组。

3. 问题 2 的解

若问题 1 相容，则解集 S_E 为一非空集，当 $[X,Y]\in S_E$ 时，由 $AX+YA=C$ 可得

$$A\left(X-X_0\right)+\left(Y-Y_0\right)A=C-AX_0-Y_0A$$

令 $\tilde{X}=X-X_0,\tilde{Y}=Y-Y_0,\tilde{C}=C-AX_0-Y_0A$，则问题 2 等价于求相容矩阵方程 $A\tilde{X}+\tilde{Y}A=\tilde{C}$ 的极小范数解组 $\begin{bmatrix}\tilde{X}^* & \tilde{Y}^*\end{bmatrix}$。

利用迭代算法 1，取特殊初值 $\tilde{X}=A^{\mathrm{T}}H,\tilde{Y}=HA^{\mathrm{T}}$ 时，可得矩阵方程 $A\tilde{X}+\tilde{Y}A=\tilde{C}$ 的唯一的极小范数解组 $\begin{bmatrix}\tilde{X}^* & \tilde{Y}^*\end{bmatrix}$，从而得到问题 2 的解 $\hat{X}=\tilde{X}^*+X_0$， $\hat{Y}=\tilde{Y}^*+Y_0$。

4. 数值实例

用本文构造的迭代算法求矩阵方程 $AX+YA=C$ 的一般解及矩阵 X_0 的最佳逼近矩阵。

例设

$$A=\begin{bmatrix}0.8147 & 0.0975 & 0.1576 & 0.1419\\ 0.9058 & 0.2785 & 0.9706 & 0.4218\\ 0.1270 & 0.5469 & 0.9572 & 0.9157\\ 0.9134 & 0.9575 & 0.4854 & 0.7922\\ 0.6324 & 0.9649 & 0.8003 & 0.9595\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2.2028 & 2.3979 & 2.2546 & 2.0807 \\ 3.5648 & 2.9730 & 2.6473 & 2.9713 \\ 2.5278 & 2.2763 & 1.8380 & 2.5673 \\ 3.6031 & 3.6455 & 2.7191 & 2.7225 \\ 4.0793 & 3.8372 & 2.8939 & 3.3182 \end{bmatrix}$$

求问题 I 的解 X^*, Y^*。

若问题 I 相容，给定

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.8308 & 0.2858 & 0.5678 & 0.7792 \\ 0.5853 & 0.7572 & 0.0759 & 0.9340 \\ 0.5497 & 0.7537 & 0.0540 & 0.1299 \\ 0.9172 & 0.3804 & 0.5308 & 0.5688 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0.4694 & 0.3112 & 0.6541 & 0.2290 & 0.9961 \\ 0.0119 & 0.5285 & 0.6892 & 0.9133 & 0.0782 \\ 0.3371 & 0.1656 & 0.7482 & 0.1524 & 0.4427 \\ 0.1622 & 0.6020 & 0.4505 & 0.8258 & 0.1067 \\ 0.7943 & 0.2630 & 0.0838 & 0.5383 & 0.9619 \end{bmatrix}$$

求问题 II 的解

① 由算法 1，取初值 $X_0 = 0, Y_0 = 0$；解得问题 I 的解为：

$$X^* = \begin{bmatrix} 0.7247 & 0.8786 & 0.5819 & 0.2200 \\ 0.5931 & 0.8527 & 0.3509 & 0.1406 \\ 0.7706 & 0.2279 & 0.2326 & 0.9298 \\ 0.6366 & 0.6067 & 0.3061 & 0.5422 \end{bmatrix}$$

$$Y^* = \begin{bmatrix} 0.0924 & 0.4082 & 0.5587 & 0.4849 & 0.6070 \\ 0.3898 & 0.5535 & 0.3798 & 0.5709 & 0.5349 \\ 0.0804 & 0.2085 & 0.4462 & 0.2699 & 0.3700 \\ 0.1601 & 0.4554 & 0.2799 & 0.5965 & 0.5881 \\ 0.3387 & 0.4465 & 0.3457 & 0.7411 & 0.6636 \end{bmatrix}$$

② 由算法 1，若初值取特殊矩阵 $X_0 = A^{\mathrm{T}} H, Y_0 = HA^{\mathrm{T}}$，其中

$$H = \begin{bmatrix} 0.2551 & 0.5472 & 0.2543 & 0.1966 \\ 0.5060 & 0.1386 & 0.8143 & 0.2511 \\ 0.6991 & 0.1493 & 0.2435 & 0.6160 \\ 0.8909 & 0.2575 & 0.9293 & 0.4733 \\ 0.9593 & 0.8407 & 0.3500 & 0.3517 \end{bmatrix}$$

则解得问题 I 的极小范数解为：

$$X^* = \begin{bmatrix} 0.7247 & 0.8786 & 0.5819 & 0.2200 \\ 0.5931 & 0.8527 & 0.3509 & 0.1406 \\ 0.7706 & 0.2279 & 0.2326 & 0.9298 \\ 0.6366 & 0.6067 & 0.3061 & 0.5422 \end{bmatrix}$$

$$Y^* = \begin{bmatrix} 0.0924 & 0.4082 & 0.5587 & 0.4849 & 0.6070 \\ 0.3898 & 0.5535 & 0.3798 & 0.5709 & 0.5349 \\ 0.0804 & 0.2085 & 0.4462 & 0.2699 & 0.3700 \\ 0.1601 & 0.4554 & 0.2799 & 0.5965 & 0.5881 \\ 0.3387 & 0.4465 & 0.3457 & 0.7411 & 0.6636 \end{bmatrix}$$

由上述的①，②可知，若问题 I 相容，则算法 1 收敛到该问题的唯一极小范数解。

令 $\tilde{X} = X - X_0, \tilde{Y} = Y - Y_0, \tilde{C} = C - AX_0 - Y_0A$；取初值 $\tilde{X}_0 = 0, \tilde{Y}_0 = 0$，由算法 1 可得

$$\tilde{X}^* = \begin{bmatrix} -0.0662 & 0.5219 & 0.1215 & -0.5786 \\ -0.1728 & 0.3681 & 0.2329 & -0.4430 \\ 0.1344 & -0.5747 & -0.2183 & 0.6051 \\ -0.1063 & 0.1151 & 0.0994 & -0.1558 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Y}^* = \begin{bmatrix} -0.1995 & -0.1064 & -0.1934 & 0.0145 & 0.0013 \\ 0.2672 & 0.0680 & 0.0600 & 0.0314 & -0.0378 \\ 0.0228 & -0.0982 & -0.0527 & -0.0197 & -0.0560 \\ -0.0641 & -0.0803 & -0.1573 & 0.1054 & 0.0436 \\ -0.1421 & 0.1111 & 0.1843 & -0.1488 & 0.0066 \end{bmatrix}$$

则由此可得问题 II 的解为：

$$X = \tilde{X}^* + X_0 = \begin{bmatrix} 0.7646 & 0.8077 & 0.6893 & 0.2006 \\ 0.4125 & 1.1253 & 0.3088 & 0.4910 \\ 0.6841 & 0.1790 & -0.1643 & 0.7350 \\ 0.8109 & 0.4955 & 0.6302 & 0.4130 \end{bmatrix}$$

$$Y = \tilde{Y}^* + Y_0 = \begin{bmatrix} 0.2699 & 0.2048 & 0.4607 & 0.2435 & 0.9974 \\ 0.2791 & 0.5965 & 0.7492 & 0.9447 & 0.0404 \\ 0.3599 & 0.0674 & 0.6955 & 0.1327 & 0.3867 \\ 0.0981 & 0.5217 & 0.2932 & 0.9312 & 0.1503 \\ 0.6522 & 0.3741 & 0.2681 & 0.3895 & 0.9685 \end{bmatrix}$$

5. 结论

本文对正交投影迭代算法进行改进，构造了求解广义 Sylvester 矩阵方程 $AX + YA = C$ 一般实数解的正交投影迭代算法，利用奇异值分解，证明了该算法的收敛性，得出了收敛速率的估计式 $-0.5\ln\left(1-\frac{\sigma_r^2}{2\sigma_1^2}\right)$，为了验证该算法的有效性，进行数值实例，数值实验的结果表明该算法是有效的。本文创新点如下：

1）对正交投影迭代算法进行改进得到求解广义 Sylvester 矩阵方程 $AX + YA = C$ 一般实数解的正交投影迭代算法；

2）利用奇异值分解、不等式放缩性质证明了该算法的收敛性，得出了收敛速率的估计式为 $-0.5\ln\left(1-\frac{\sigma_r^2}{2\sigma_1^2}\right)$；

3）进行了数值验证，验证了该算法的有效性。

基金项目

湖南省 2022 年普通高等学校教学改革研究重点项目(编号：HNJG-2022-0381)，湖南信息学院 2022

年校级科研课题(编号：XXY022YB09)。

参考文献

[1] Hoskins, W.D., Meek, D.S. and Walton, D.J. (1977) The Numerical Solution of the Matrix Equation $XA + AY = F$. *BIT Numerical Mathematics*, **17**, 184-190. https://doi.org/10.1007/BF01932289

[2] Hoskins, W.D., Meek, D.S. and Walton, D.J. (1979) High Order Iterative Methods of the Solution of the Matrix Equation $XA + AY = F$. *Linear Algebra and Its Applications*, **23**, 121-139. https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90097-1

[3] Chang, X.W. and Wang, J.S. (1993) The Symmetric Solution of the Matrix Equation $AX + YA = C$, $AXA^T + BYB^T = C$ and $\left(A^T XA, B^T XB\right) = \left(C, D\right)$. *Linear Algebra and Its Applications*, **179**, 171-189. https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)90328-L

[4] 邓远北，胡锡炎．一类广义 Sylvester 方程的反对称最小二乘解及其最佳逼近[J]．系统科学与数学，2004，24(3): 382-388.

[5] 顾传青，蒋祥龙．求解 Sylvester 矩阵方程的一种改进的梯度方法[J]．应用数学与计算数学学报，2014，28(4): 432-439.

[6] 邵新慧，彭程．一类 Sylvester 矩阵方程的迭代解法[J]．东北大学学报(自然科学版), 2017, 38(6): 909-912.

[7] 段复建，原腾．一类 Sylvester 矩阵方程异类约束解的迭代算法[J]．重庆理工大学学报(自然科学)，2021，35(6): 247-255.

[8] 邓勇．关于广义 Sylvester 矩阵方程反自反解的有限迭代算法[J]．东北师大学报(自然科学版), 2022, 54(1): 34-43.

[9] 康靖，马昌凤. Sylvester 矩阵方程的改进 IO 迭代算法[J]．井冈山大学学报(自然科学版), 2023, 44(2): 1-8.

[10] 郭孔华．求解约束矩阵方程的正交投影迭代法研究[D]: [博士学位论文]．长沙：湖南大学, 2007.