Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2833-2841
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126285

Hans汉斯

具有强Allee效应Rosenzweig-MacArthur时滞模型的问题研究

杨碧莹*，孙福芹

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2023年5月20日；录用日期：2023年6月13日；发布日期：2023年6月20日

摘　要

本文提出了一个具有强Allee效应和双曲正切函数功能反应的Rosenzweig-MacArthur捕食者－被捕食时滞模型。讨论模型中正解的存在性，利用下一代矩阵法得到基本再生数，并在Hurwitz判据的条件下重点分析可行平衡点的稳定性。并在特定条件下，给出了平衡点局部稳定的条件和Hopf分支的存在性条件。

关键词

双曲正切函数功能反应，存在性，稳定性

Research on Rosenzweig-MacArthur Delay Model with Strong Allee Effect

Biying Yang*, Fuqin Sun

School of Sciences, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: May 20th, 2023; accepted: Jun. 13th, 2023; published: Jun. 20th, 2023

Abstract

A Rosenzweig-MacArthur predator-prey delay model with strong Allee effect and hyperbolic tangent function is proposed. The existence of the positive solution in the model is discussed, and the basic regeneration number is obtained by using the next generation matrix method. The stability of the feasible equilibrium point is analyzed mainly under the condition of Hurwitz criterion. The local stability of equilibrium point and the existence of Hopf branch are given under certain conditions.

*通讯作者。

文章引用: 杨碧莹, 孙福芹. 具有强 Allee 效应 Rosenzweig-MacArthur 时滞模型的问题研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2833-2841. DOI: 10.12677/aam.2023.126285

Keywords

Hyperbolic Tangent Function Function Reaction, Existence, Stability

1. 引言

复杂的物种内部和物种间的协同和对抗相互作用积极地调节着现实世界的生态和进化动态。因此对潜在的被捕食者－捕食者系统的深入分析，对于理解合作和竞争在物种共同进化中的基本作用具有重要意义。通过使用动力学系统方法，已经表明 Rosenzweig-MacArthur 模型中不同的捕食者功能反应对模型的动力学表现出不同的影响。Fussmann 和 Blasius 提出了 Rosenzweig-MacArthur 模型，以描述具有三种不同功能反应的群体动态，包括 Holling II 型功能反应、Ivlev 功能反应、三角函数功能反应等，都具有非常广泛的应用[1] [2] [3] [4]。

然而，真实数据最常用的数学表示形式是双曲正切功能函数，它精确描述了浮游植物光合作用和光照之间的关系。具有双曲正切函数的功能反应函数对 Rosenzweig-MacArthur 模型动力学的破坏潜力最小。它对于了解种群之间的作用更有实际意义。Allee 效应的概念最初是由美国生态学家 Warder Allee 提出的，在弱 Allee 效应下，低人口密度的人口增长率仍为正，但未达到最大值。但在强 Allee 效应下，在种群阈值 v 以下，人口增长率为负，人口变为负，种群密度必须超过此阈值才能存活[5]。因此，本文构建了一个具有强 Allee 效应的三角函数功能反应的 Rosenzweig-MacArthur 捕食者－食饵的时滞模型，研究了模型的有界性和平衡点的存在性，并对平衡点的局部稳定性和 Hopf 分支的存在性进行了分析。

2. 模型介绍

本文考虑一个具有三角函数功能反应的 Rosenzweig-MacArthur 捕食者－食饵模型，如式(1)所示：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right) - \Phi(N)P \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \left(\Phi(N)-m\right)P \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\Phi(N)=\alpha\tanh(bN)$ 是三角函数功能反应，N 和 P 分别表示猎物和捕食者数量，r 表示猎物的内在增长率，K 为捕食者的承载能力，m 为捕食者的人均死亡率。r,K,m,α,b 为正参数。

Allee 效应的概念最初是由美国生态学家 Warder Allee [5]提出的。在 Stephen 等人的研究中[6]，它描述了个体适应度的任何组成部分与同变量的数量或密度之间的正相关关系。时滞是自然界中所有生物过程的固有现象，故在生态学的种群模型中增加捕食者的成熟时滞使动态结果更接近于现实。因此，我们考虑了 Allee 效应在 Rosenzweig-MacArthur 时滞模型中的作用来研究可能的动力学。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\bar{t}} = rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right)(N-v) - \Phi(N)P \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\bar{t}} = \left(\Phi(N)-m\right)P\left(t-T_1\right) \end{cases} \tag{2}$$

其中，τ 为捕食者成熟所需的时间，$v>0$ 表示 Allee 效应的阈值总体水平。

3. 初步结果

3.1. 平衡点的存在性

系统(2)无量纲化后的常微分方程系统为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax(B-x)(x-C) - y\tanh(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\tanh(x)-D)\,y(t-\tau_1) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $N=\dfrac{x}{b}, P=\dfrac{y}{b}, \overline{t}=\alpha t, T_1=\alpha\tau_1, A=\dfrac{r}{\alpha b^2 K}, B=bK, C=vb, D=\dfrac{m}{\alpha}$。

通过求解 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=0$ 可以得到模型(3)的平衡点。显然，模型(3)有平衡点 $E_0(0,0)$，$E_1(B,0)$，$E_2(C,0)$ 以及 $E_3(x_3,y_3)$。 x_3,y_3 可根据方程组(3)求解得出：

$$\begin{cases} Ax_3(B-x_3)(x_3-C) - y_3\tanh(x_3) = 0 \\ (\tanh(x_3)-D)\,y_3 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

由该方程组可得 $x_3=\tanh^{-1}(D), y_3=\dfrac{A}{D}(B-x_3)(x_3-C)$。因为 $K>v>0$，因此有 $B>C>0$。所以当 $0<C<y_3<B$ 时， E_3 存在。

3.2. 基本再生数

下面利用 Driessche 和 Watmough 提出的下一代矩阵法得到基本再生数[7]。系统(3)改写成

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = f(z) - v(z) \tag{5}$$

其中 $z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$， $f(z)=\begin{pmatrix} 0 \\ y(t-\tau_1)\tanh(x) \end{pmatrix}$， $v(z)=\begin{pmatrix} -Ax(B-x)(x-C)+y\tanh(x) \\ Dy(t-\tau_1) \end{pmatrix}$， $f(z), v(z)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$F(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y(t-\tau_1)\operatorname{sech}^2(x) & \tanh(x) \end{pmatrix}, V(z)=\begin{pmatrix} \eta(x,y) & \tanh(x) \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

其中 $\eta(x,y) = -A(B-x)(x-C) + Ax(x-C) - Ax(B-x) + y\operatorname{sech}^2(x)$，

接着得到

$$V^{-1}(z)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\eta(x,y)} & -\tanh(x) \\ 0 & \dfrac{1}{D} \end{pmatrix}$$

因此，系统(3)的基本再生数可以定义为下一代矩阵的谱半径 FV^{-1}，得到

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\tanh(C)}{D} = \frac{\tanh(C)}{\tanh^{-1}(x_3)}.$$

下面，系统(3)将在生物学上可行的区间进行分析

$$\mathbb{R}_+^2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0\right\}.$$

命题 1 当 $\tau_1=0$ 时，如果 $R_0>1$，则系统(3)的所有解均收敛于 $E_0(0,0)$

证明： 考虑以下 Lyapunov 函数

$$V(x,y)=Dy+x\tanh(C) \tag{6}$$

上式满足 $V(E_0)=0$。沿着系统(3)的轨线对 V 函数关于 t 求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=Dy(\tanh(x)-D)+\tanh(C)\big(Ax(B-x)(x-C)-y\tanh(x)\big)\\&=Dy\tanh(x)-D^2y+\tanh(C)Ax(B-x)(x-C)-\tanh(C)y\tanh(x)\\&=y\left[\tanh(x)(D-\tanh(C))-D^2\right]\end{aligned}$$

由于我们只考虑 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le B,y\ge 0\}$ 中的区间，当 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 时，若 $y>0$，解得 $\tanh(x)=\frac{D^2}{D-\tanh(C)}$。因为 $D<\tanh(C)$，故 $\tanh(x)=\frac{D^2}{D-\tanh(C)}<0$，与 $\tanh(x)>0$ 矛盾。因此只有 $y=0$ 时，且 $D<\tanh(C)$，即 $R_0=\frac{\tanh(C)}{D}>1$，上式满足 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$。因此当 $R_0>1$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $(x,y)=(0,0)$，由 LaSalle 不变原理知，系统(3)的所有解全局渐近收敛于 $E_0(0,0)$。

4. 稳定性分析

系统(3)在任意平衡点 (x^*,y^*) 处的雅可比矩阵为

$$J(E)=\begin{pmatrix}-\eta(x,y) & -\tanh(x)\\ y(t-\tau_1)\operatorname{sech}^2(x) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \tanh(x)-D\end{pmatrix} \tag{7}$$

4.1. 当 $\tau_1>0$ 时 $E_0(0,0)$ 的稳定性

系统(3)在平衡点 $E_0(0,0)$ 的雅可比矩阵为

$$J(E_0)=\begin{pmatrix}-ABC & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -D\end{pmatrix} \tag{8}$$

当 $\tau_1>0$ 时，特征方程为

$$\lambda^2+ABC\lambda+(\lambda+ABC)De^{-\lambda\tau_1}=0 \tag{9}$$

假设 $\lambda=i\omega$ 为(9)的特征根，代入得

$$-\omega^2-iABC\omega+D(i\omega+ABC)(\cos\omega\tau_1-i\sin\omega\tau_1)=0$$

分离实虚部，得到

$$\begin{cases}\omega^2=D\omega\sin\omega\tau_1+ABCD\cos\omega\tau_1\\ ABC\omega=\omega D\cos\omega\tau_1-ABCD\sin\omega\tau_1\end{cases} \tag{10}$$

(10)两边平方，再相加得

$$\omega^4+\left((ABC)^2-D^2\right)\omega^2-(ABCD)^2=0 \tag{11}$$

因为 $-(ABCD)^2<0$，故存在唯一正根 ω_*^2，即

$$\omega_*=\sqrt{\frac{-\left((ABC)^2-D^2\right)+\sqrt{\left((ABC)^2-D^2\right)^2+4(ABCD)^2}}{2}}$$

把 ω_* 代入(10)中，解得 τ_1 的表达式

$$\tau_1^n=\frac{1}{\omega_*}\left[\arccos\left\{\frac{2ABC\omega_*^2}{(ABC)^2D+D\omega_*^2}\right\}+2n\pi\right],n=0,1,\cdots \tag{12}$$

假设 $\lambda(\tau_1)=\alpha(\tau_1)+i\omega(\tau_1)$ 是方程(10)在 τ_1^0 附近满足 $\alpha(\tau_1^0)=0,\omega(\tau_1^0)=\omega_*$ 的根。根据泛函微分方程理论，对于 τ_1^0，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\lambda(\tau_1)$ 在 τ_1 中对于 $|\tau_1-\tau_1^0|<\varepsilon$ 是连续可微的。将方程(10)的两边对 τ_1 求导，得到

$$\begin{aligned}\Re\left[\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda(\tau_1)}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}^{-1}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}&=\Re\left[\frac{2}{(\lambda+ABC)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{ABC}{\lambda(\lambda+ABC)D\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{1}{\lambda(\lambda+ABC)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}\\&=\Re\left[\frac{2\lambda}{\lambda(-\lambda-ABC\lambda)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{ABC}{\lambda(-\lambda-ABC\lambda)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{1}{\lambda(\lambda+ABC)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}\\&=2\omega_*^6+\omega_*^5+ABC^2\omega_*^4+ABC^2\omega_*^3+2ABC^2\omega_*^2+ABC^4>0\end{aligned}$$

由于 $sign\left[\Re\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}\right]\Big|_{\tau_1=\tau_1^0}=sign\left[\left\{\frac{\mathrm{d}(\Re(\lambda))}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}\right]\Big|_{\tau_1=\tau_1^0}=1$，故 $\frac{\mathrm{d}(\Re(\lambda))}{\mathrm{d}\tau_1}\Big|_{\tau_1=\tau_{1n}}>0$。

定理 2 对于 $\tau_1>0$，当 $\tau_1<\tau_1^0$ 时，系统(3)在平衡点 E_0 处局部渐近稳定；当 $\tau_1>\tau_1^0$ 时，系统(3)在平衡点 E_0 处不稳定。特别地，当 $\tau_1=\tau_1^0$ 时，系统(3)在平衡点 E_0 处发生 Hopf 分支。

4.2. $E_1(B,0)$ 的稳定性

系统(3)在平衡点 $E_1(B,0)$ 的雅可比矩阵为

$$J(E_1)=\begin{pmatrix}-AB(B-C) & \tanh(B)\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \tanh(B)-D\end{pmatrix} \tag{13}$$

特征方程为

$$\lambda^2+\rho_1\lambda+\rho_2(\lambda+\rho_1)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}=0 \tag{14}$$

其中 $\rho_1=AB(B-C)>0,\rho_2=D-\tanh(B)$。

当 $\tau_1=0$ 时，特征值为

$$\lambda_1=-AB(B-C)<0,\lambda_2=\tanh(B)-D$$

定理 2 当 $\tau_1=0$ 时，若 $\tanh(B)<D$，系统(3)的平衡点 $E_1(B,0)$ 是局部渐近稳定的；若 $\tanh(B)>D$，系统(3)的平衡点 $E_1(B,0)$ 是鞍点

当 $\tau_1>0$ 时，假设 $\lambda=i\omega$ 为(14)的特征根，代入得

$$-\omega^2-i\rho_1\omega+\rho_2(i\omega+\rho_1)(\cos\omega\tau_1-i\sin\omega\tau_1)=0$$

分离实虚部，得到

$$\begin{cases}\omega^2=\rho_2\omega\sin\omega\tau_1+\rho_2\rho_1\cos\omega\tau_1\\ \rho_1\omega=\rho_2\omega\cos\omega\tau_1-\rho_2\rho_1\sin\omega\tau_1\end{cases} \tag{15}$$

(15)两边平方，再相加得

$$\omega^4+(\rho_1^2-\rho_2^2)\omega^2-\rho_1^2\rho_2^2=0 \tag{16}$$

因为 $-\rho_1^2\rho_2^2<0$，故存在唯一正根 ω_*^2，即

$$\omega_*=\sqrt{\frac{-\left(\rho_1^2-\rho_2^2\right)+\sqrt{\left(\rho_1^2-\rho_2^2\right)^2+4\rho_1^2\rho_2^2}}{2}}$$

把 ω_* 代入(15)中，解得 τ_1 的表达式

$$\tau_1^n=\frac{1}{\omega_*}\left[\arccos\left\{\frac{2\rho_1\omega_*^2}{\rho_1^2\rho_2+\rho_2\omega_*^2}\right\}+2n\pi\right],n=0,1,\cdots \tag{17}$$

假设 $\lambda(\tau_1)=\alpha(\tau_1)+i\omega(\tau_1)$ 是方程(10)在 $\tau_1=\tau_1^0$ 附近满足 $\alpha(\tau_1^0)=0,\omega(\tau_1^0)=\omega_*$ 的根。将方程(10)的两边对 τ_1 求导，得到

$$\begin{aligned}\Re\left[\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda(\tau_1)}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}^{-1}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}&=\Re\left[\frac{2}{\lambda\rho_2(\lambda+\rho_1)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{\rho_1}{\lambda\rho_2(\lambda+\rho_1)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{1}{\lambda(\lambda+\rho_1)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}\\&=\Re\left[\frac{2\lambda}{\lambda(-\lambda-\rho_1\lambda)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{\rho_1}{\lambda(-\lambda-\rho_1\lambda)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{1}{\lambda(\lambda+\rho_1)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}\\&=2\omega_*^6+\omega_*^5+\rho_1^2\omega_*^4+\rho_1^2\omega_*^3+2\rho_1^2\omega_*^2+\rho_1^4>0\end{aligned}$$

由于 $sign\left[\Re\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}\right]\Bigg|_{\tau_1=\tau_{1n}}=sign\left[\left\{\frac{\mathrm{d}(\Re(\lambda))}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}\right]\Bigg|_{\tau_1=\tau_{1n}}=1$，故 $\frac{\mathrm{d}(\Re(\lambda))}{\mathrm{d}\tau_1}\Bigg|_{\tau_1=\tau_{1n}}>0$。

定理 3 对于 $\tau_1>0$，当 $\tau_1<\tau_1^0$ 时，系统(3)在平衡点 E_1 处局部渐近稳定；当 $\tau_1>\tau_1^0$ 时，系统(3)在平衡点 E_1 处不稳定。特别地，当 $\tau_1=\tau_1^0$ 时，系统(3)在平衡点 E_1 处发生 Hopf 分支。

4.3. $E_2(C,0)$ 的稳定性

系统(3)在平衡点 $E_2(C,0)$ 的雅可比矩阵为

$$J(E_2)=\begin{pmatrix}AC(B-C) & -\tanh(C)\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \tanh(C)-D\end{pmatrix} \tag{18}$$

特征方程为

$$\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_2(\lambda+\alpha_1)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}=0 \tag{19}$$

其中 $\alpha_1=-AC(B-C)<0,\alpha_2=D-\tanh(C)$。

当 $\tau_1=0$ 时，特征值为

$$\lambda_1=AC(B-C)>0,\lambda_2=D-\tanh(C)$$

定理 4 当 $\tau_1=0$ 时，若 $\tanh(C)>D$，系统(3)的平衡点 $E_2(C,0)$ 是鞍点；若 $\tanh(C)<D$，系统(3)的平衡点 $E_2(C,0)$ 不稳定。

当 $\tau_1>0$ 时，假设 $\lambda=i\omega$ 为(19)的特征根，代入得

$$-\omega^2-i\alpha_1\omega+\alpha_2(i\omega+\alpha_1)(\cos\omega\tau_1-i\sin\omega\tau_1)=0$$

分离实虚部，得到

$$\begin{cases}\omega^2=\alpha_2\omega\sin\omega\tau_1+\alpha_2\alpha_1\cos\omega\tau_1\\ \alpha_1\omega=\alpha_2\omega\cos\omega\tau_1-\alpha_2\alpha_1\sin\omega\tau_1\end{cases} \tag{20}$$

(20)两边平方，再相加得

$$\omega^4+\left(\alpha_1^2-\alpha_2^2\right)\omega^2-\alpha_1^2\alpha_2^2=0 \tag{21}$$

因为$-\alpha_1^2\alpha_2^2<0$，故存在唯一正根ω_*^2，即

$$\omega_*=\sqrt{\frac{-\left(\alpha_1^2-\alpha_2^2\right)+\sqrt{\left(\alpha_1^2-\alpha_2^2\right)^2+4\alpha_1^2\alpha_2^2}}{2}}$$

把ω_*代入(20)中，解得τ_1的表达式

$$\tau_1^n=\frac{1}{\omega_*}\left[\arccos\left\{\frac{2\alpha_1\omega_*^2}{\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2\omega_*^2}\right\}+2n\pi\right],n=0,1,\cdots$$

假设$\lambda(\tau_1)=\beta(\tau_1)+i\omega(\tau_1)$是方程(16)在$\tau_1=\tau_1^n$附近满足$\beta(\tau_1^0)=0,\omega(\tau_1^0)=\omega_*$的根。将方程(16)的两边对$\tau_1$求导，得到

$$\begin{aligned}\Re\left[\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda(\tau_1)}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}^{-1}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}&=\Re\left[\frac{2}{\lambda\alpha_2(\lambda+\alpha_1)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{\alpha_1}{\lambda\alpha_2(\lambda+\alpha_1)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{1}{\lambda(\lambda+\alpha_1)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}\\&=\Re\left[\frac{2\lambda}{\lambda(-\lambda-\alpha_1\lambda)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{\alpha_1}{\lambda(-\lambda-\alpha_1\lambda)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}+\Re\left[\frac{1}{\lambda(\lambda+\alpha_1)}\right]_{\tau_1=\tau_1^0}\\&=2\omega_*^6+\omega_*^5+\alpha_1^2\omega_*^4+\alpha_1^2\omega_*^3+2\alpha_1^2\omega_*^2+\alpha_1^4>0\end{aligned}$$

由于$sign\left[\Re\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}\right]\Bigg|_{\tau_1=\tau_1^0}=sign\left[\left\{\frac{\mathrm{d}(\Re(\lambda))}{\mathrm{d}\tau_1}\right\}\right]\Bigg|_{\tau_1=\tau_1^0}=1$，故$\left.\frac{\mathrm{d}(\Re(\lambda))}{\mathrm{d}\tau_1}\right|_{\tau_1=\tau_1^0}>0$。

定理 5 对于$\tau_1>0$，当$\tau_1<\tau_{10}$时，系统(3)在平衡点E_2处局部渐近稳定；当$\tau_1>\tau_{10}$时，系统(3)在平衡点E_2处不稳定。特别地，当$\tau_1=\tau_{10}$时，系统(3)在平衡点E_2处发生Hopf分支。

4.4. $E_3(x_3,y_3)$的稳定性

系统(3)在平衡点$E_3(x_3,y_3)$的雅可比矩阵为

$$J(E_3)=\begin{pmatrix}\eta(x_3,y_3) & -\tanh(x_3)\\ 0 & y_3\,\mathrm{sech}^2(x_3)\end{pmatrix} \tag{22}$$

其中

$$\eta(x_3,y_3)=\frac{A}{\tanh(x_3)}\eta^*(x_3,y_3)$$

$$\eta^*(x_3,y_3)=-x_3(B-x_3)(x_3-C)\mathrm{sech}^2(x_3)-\left(3x_3^2-2(C+B)x_3+CB\right)\tanh(x_3).$$

特征方程为

$$\lambda^2-\eta(x_3,y_3)\lambda+\delta(x_3,y_3)=0 \tag{23}$$

当E_3存在时，

$$\delta(x_3,y_3)=y_3\tanh(x_3)\mathrm{sech}^2(x_3)=\frac{Ax_3}{\cosh^2(x_3)}(B-x_3)(x_3-C)>0. \tag{24}$$

定理 4 当 $\eta(x_3,y_3)>0$，系统(3)在平衡点 E_3 处不稳定；当 $\eta(x_3,y_3)<0$，系统(3)在平衡点 E_3 处局部渐近稳定。特别地，当 $\eta(x_3,y_3)=0$，系统(3)在平衡点 E_3 处发生 Hopf 分支。

4.5. Hopf 分支分析

当正平衡解 E_3 存在时，系统(3)在 E_3 处可能发生 Hopf 分岔。由式(24)可知，在系统(3)中，如果 $0<C<B$，则 $\delta(x_3,y_3)>0$ 成立且 E_3 存在。因此，正平衡解的 Bogdanov-Takens 分支是不可能的，否则需要 $\delta(x_3,y_3)=0$，而 $\delta(x_3,y_3)=0$ 只发生在边界平衡 E_1 和 E_2 处。因此，$\eta^*(x_3,y_3)$ 决定了 E_3 的稳定性。容易发现中 $\eta^*(x_3,y_3)$ 的第一项对于 $C<x_3<B$ 是负的，因此为了证明存在 Hopf 分支，第二项中的二次多项式 $3x_3^2-2(C+B)x_3+CB$ 必须是负的。

多项式的根是 $x_{3\pm}=\frac{1}{3}\left(C+B\pm\sqrt{C^2+B^2-BC}\right)$，很容易证明 $x_{3-}<C<x_{3+}<B$，这意味着当 $x_{3+}\le x_3<B$ 时，E_3 渐近稳定。直接计算得到

$$\eta^*(x_3,y_3)\big|_{x_3=C}=C(B-C)\tanh(C)>0$$

$$\eta^*(x_3,y_3)\big|_{x_3=\frac{B}{2}}=\frac{B^2}{2\cosh^2\left(\frac{B}{2}\right)}\left[\sinh(B)-B+2C\right]>0$$

$$\eta^*(x_3,y_3)\big|_{x_{3+}}=-x_{3+}(B-x_{3+})(x_{3+}-C)\operatorname{sech}^2(x_{3+})<0$$

因此，$\eta^*(x_3,y_3)=0$ 对于 $x_3\in\left(\max\left\{C,\frac{B}{2}\right\},x_{3+}\right)$ 至少有一个解。为了证明解的唯一性，我们证明了对于 $x_3\in\left(\max\left\{C,\frac{B}{2}\right\},x_{3+}\right)$，$\frac{d\eta^*(x_3,y_3)}{dx_3}<0$。如果 $C<B\le 2C$，则 $C<x_3<x_{3+}$；如果 $B>2C$，则 $\frac{B}{2}<x_3<x_{3+}$。那么就得到

$$C+B-3x_3<\begin{cases} B-2C\le 0,\frac{B}{2}\le C\le x_3<x_{3+} \\ C-\frac{B}{2}<0,C<\frac{B}{2}\le x_3<x_{3+} \end{cases}$$

下面计算

$$\lim_{x_3\to C}\frac{d\eta^*(x_3,y_3)}{dx_3}=(C+B-3x_3)2\tanh(x_3)<0,$$

$$\lim_{x_3\to\frac{B}{2}}\frac{d\eta^*(x_3,y_3)}{dx_3}=\left(C-\frac{B}{2}\right)\left(\cosh\left(\frac{B}{2}\right)+\frac{B}{2}\right)\left(\cosh\left(\frac{B}{2}\right)-\frac{B}{2}\right)<0,$$

$$\frac{d^2\eta^*(x_{32},y_3)}{dx_3^2}=(C+B-3x_3)\left(\sinh(2x_3)+2x_3\right)-CB-3\left[\cosh(x_3)+x_3\right]\left[\cosh(x_3)-x_3\right]<0,$$

其中 $\max\left\{C,\frac{B}{2}\right\}<x_3<x_{3+}$，通过计算发现，$\eta^*(x_3,y_3)$ 在 $x_3\in\left(\max\left\{C,\frac{B}{2}\right\},x_{3+}\right)$ 上是单调递减的。因此，$\eta^*(x_3,y_3)$ 在 $x_3\in\left(\max\left\{C,\frac{B}{2}\right\},x_{3+}\right)$ 有一个唯一解 x_3^*，在此解处发生 Hopf 分支。

5. 结语

本文考虑了强 Allee 效应 Rosenzweig-MacArthur 时滞模型的问题研究。首先证明了模型的平衡点存在性，得到模型的四个平衡点 E_0、E_1、E_2、E_3；其次证明了 E_0 在 $\tau_1 = 0$ 情况下的全局稳定性；接下来讨论了边界平衡点 E_1 和 E_2 的稳定性和 Hopf 分支的存在性；最后证明正平衡点 E_3 的稳定性和 Hopf 分支的存在性。通过分析具有强 Allee 效应 Rosenzweig-MacArthur 时滞模型的问题研究，有助于未来对具有双曲正切功能反应函数模型的分支问题进行深一步研究。

参考文献

[1] Castillo-Chavez, C., *et al*. (2002) Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: An Introduction. Springer-Verlag, New York.

[2] Rosenzweig, M.L. and MacArthur, R.H. (1963) Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions. *The American Naturalist*, **97**, 209-223. https://doi.org/10.1086/282272

[3] Seo, G. and Wolkowicz, G.S.K. (2018) Sensitivity of the Dynamics of the General Rosenzweig-MacArthur Model to the Mathematical Form of the Functional Response: A Bifurcation Theory Approach. *Journal of Mathematical Biology*, **76**, 1873-1906. https://doi.org/10.1007/s00285-017-1201-y

[4] Sugie, J. and Saito, Y. (2012) Uniqueness of Limit Cycles in a Rosenzweig-MacArthur Model with Prey Immigration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **72**, 299-316. https://doi.org/10.1137/11084008X

[5] Allee, W. (2931) Animal Aggregations: A Study in General Sociology. University of Chicago Press, Chicago. https://doi.org/10.5962/bhl.title.7313

[6] Stephens, P.A., Sutherland, W.J. and Freckleton, R.P. (1999) What Is the Allee Effect? *Oikos*, **87**, 185-190. https://doi.org/10.2307/3547011

[7] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemice Quilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6