

# 叶形图的广义连通度

李红梅, 王世英\*

山西师范大学数学与计算机科学学院, 山西 太原

收稿日期: 2023年5月28日; 录用日期: 2023年6月23日; 发布日期: 2023年6月30日

## 摘要

一个互联网络系统通常会被构建成为一个无向连通图  $G=(V(G),E(G))$ , 其中  $V(G)$  代表了图的顶点集,  $E(G)$  代表着图的边集, 顶点和边分别代表着互联网络中的处理器和处理器之间的通信链路。在互联网络中, 处理器或者通信链路出现故障是不可避免的, 而连通性在衡量互联网络的容错性和可靠性方面起着重要作用。本文我们主要研究一个图  $G$  的广义  $k$ -连通性。对于图  $G$  的一个顶点子集  $S$ ,  $\kappa(S)$  表示图  $G$  中边互不相交树  $T_1, T_2, \dots, T_r$  的最大数量  $r$ , 这些树须满足  $V(T_i) \cap V(T_j) = S$ ,  $(i, j \in [1, r], i \neq j)$  这一条件。对于任意的  $2 \leq k \leq n$ , 图  $G$  的广义  $k$ -连通度  $\kappa_k(G)$  被定义为:  $\kappa_k(G) = \min\{\kappa(S) \mid S \subseteq V(G) \text{ 且 } |S| = k\}$ 。叶形图是一个重要的凯莱图, 它有许多非常好的性质。在这篇文章中, 我们主要研究了  $n$  维叶形图  $CF_n$  的广义 3-连通度, 证明了  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-5}{2}$  ( $n$  为大于等于 3 的奇数);  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为大于等于 4 的偶数)。

## 关键词

广义连通性, 容错性, 叶形图, 内部互不相交的树

# The Generalized Connectivity of Leaf-Sort Graphs

Hongmei Li, Shiyang Wang\*

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: May 28<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jun. 23<sup>rd</sup>, 2023; published: Jun. 30<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

An interconnection network is usually modeled as an undirected, connected graph  $G=(V(G),E(G))$ , where  $V(G)$  represents vertex set,  $E(G)$  represents edge set, and nodes

\*通讯作者。

represent processors, edges represent communication links between processors. In the interconnect network, the failure of processors or communication links is unavoidable. The connectivity plays an important role in measuring the fault tolerance and reliability of interconnection networks. This paper, we mainly study the generalized  $k$ -connectivity of a graph  $G$ . For any  $S \subseteq V(G)$ , let  $\kappa(S)$  denote the maximum number of edge-disjoint trees  $T_1, T_2, \dots, T_r$  in  $G$  such that  $V(T_i) \cap V(T_j) = S$  for any  $i, j \in [1, r]$  and  $i \neq j$ . For every  $2 \leq k \leq n$ , the generalized  $k$ -connectivity  $\kappa_k(G)$  is defined as  $\kappa_k(G) = \min \{ \kappa(S) \mid S \subseteq V(G) \text{ and } |S| = k \}$ . An  $n$ -dimension leaf sort graph  $CF_n$  is an important Cayley graph, it has many good properties. In this paper, we mainly study the generalized  $k$ -connectivity of  $CF_n$ , proved that: when  $n$  is odd,  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-5}{2}$  ( $n \geq 3$ ); when  $n$  is even,  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-6}{2}$  ( $n \geq 4$ ).

## Keywords

Generalized Connectivity, Fault-Tolerant, Leaf-Sort Graph, Internally Disjoint Trees

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

一个互联网络通常会被构建成一个无向图  $G = (V(G), E(G))$ , 其中  $V(G)$  代表了图  $G$  的顶点集,  $E(G)$  代表着图  $G$  的边集, 顶点  $v$  和边  $e$  分别代表着互联网络中的处理器和处理器之间的通信链路。对于图  $G$  的任意一个顶点  $v$ , 我们用  $N_G(v)$  来表示点  $v$  的邻域, 即和  $v$  相连的顶点集, 令  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ , 用  $E_G(v)$  表示和  $v$  相连的边集。我们用  $d_G(v)$  来表示顶点  $v$  在图  $G$  中的度,  $\delta(G) = \min \{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$  表示图  $G$  的最小度。在一个图  $G$  中, 如果任意一个顶点  $v$  的度都为  $k$ , 那么我们就称图  $G$  是  $k$  正则图。如果  $d_G(v) = 0$ , 则  $v$  是一个孤立点。对于图  $G$  中的任意两个顶点  $x$  和  $y$ , 它们之间的一条路  $P$  是一个相邻的顶点序列  $\langle x, w_1, w_2, \dots, w_k, y \rangle$ , 其中  $w_i$  和  $w_{i+1}$  是相邻的, 且  $w_i (i \in [1, k])$  是互不相同的,  $w_i$  被称为路  $P$  的内部顶点。对于两条  $xy$ -路  $P$  和  $Q$ , 如果它们内部没有公共的顶点, 即  $V(P) \cap V(Q) = \{x, y\}$ , 那么我们就称  $P$  和  $Q$  是内部顶点互不相交的路。令  $X$  和  $Y$  是图  $G$  的两个顶点子集, 即  $X \subseteq V(G)$ ,  $Y \subseteq V(G) \setminus X$ ,  $(X, Y)$ -路是一组起始顶点在  $X$  中, 终止端点在  $Y$  中的内部顶点互不相交路的集合, 且内部顶点都不属于  $X$  和  $Y$ 。如果  $X = \{x\}$ , 那么  $(x, Y)$ -路是一组以  $x$  为起点, 终止端点在  $Y$  中的内部顶点互不相交的路的集合, 并且终止端点在  $Y$  中是互不相同的, 也就是从  $x$  到  $Y$  的一个  $k$ -扇形。在一个图  $G$  中, 一棵树  $T$  代表的是图  $G$  中的一个无圈的连通图。在互联网络中, 由于处理器或者通信链路会发生故障, 所以连通性在衡量互联网络的容错性和可靠性方面起着重要的作用。一个图  $G$  的传统连通度  $\kappa(G)$  被定义为: 使得  $G - Q$  是不连通的或平凡图的  $Q$  的阶的最小值, 其中  $Q$  是  $G$  的顶点子集, 即  $Q \subseteq V(G)$ 。如果  $\kappa(G) \geq k$ , 则称图  $G$  是  $k$  连通的。此外, Whitney 从局部观点定义了连通性, 即: 对于任意的一个顶点集  $S = \{u, v\} \subseteq V(G)$ ,  $\kappa_G(S)$  表示  $u$  和  $v$  在图  $G$  中内部顶点互不相交路的最大值,  $\kappa(G) = \min \{ \kappa_G(S) \mid S \subseteq V(G) \text{ 且 } |S| = 2 \}$ 。作为加强连通性的一种方法, Hager 在其他作者给出的相同定义中引入了广义连通性。令  $G$  是一个  $n$  维的

非平凡连通图, 对于任意的一个顶点子集  $S \subseteq V(G)$ ,  $T_1$  和  $T_2$  是包含顶点集  $S$  的两棵树, 如果  $T_1$  和  $T_2$  边不相交, 且  $V(T_1) \cap V(T_2) = S$  (注意这两个树在  $G - S$  中是顶点互不相交的), 那么我们就称  $T_1$  和  $T_2$  是内部互不相交的树. 设  $\kappa(S)$  表示  $G$  中包含  $S$  的内部互不相交的树的最大数值, 图  $G$  的广义  $k$ -连通性被定义为:  $\kappa_k(G) = \min\{\kappa(S) \mid S \subseteq V(G) \text{ 且 } |S| = k\}$ , 其中  $2 \leq k \leq n$ . 当  $k = 2$  时, 一个图  $G$  的广义 2-连通性  $\kappa_2(G)$  正是连通性  $\kappa(G)$ , 即  $\kappa_2(G) = \kappa(G)$ . 关于广义连通性的研究, 已有许多结果, 见文献[1]-[14]. 此外, 还有一些关于图的广义  $k$ -连通性的结果, 其中大多数是关于  $k = 3$  的, 少部分是关于  $k = 4$  的.

## 2. 预备知识

由于 Cayley 图具有许多互网络想要的性质, 比如顶点传递性、边传递性、层次结构、高容错性等, 许多研究人员都把 Cayley 图形作为互网络的基础拓扑模型. 因此研究 Cayley 图形的广义  $k$ -连通性是非常有意义的. 设  $X$  是一个有限群,  $S$  是  $X$  的一个子集, Cayley 有向图  $Cay(X, S)$  是一个以  $X$  为顶点集, 以  $\{(g, gs) \mid g \in X, s \in S\}$  为弧集的有向图. 显然, 如果  $S = S^{-1}$ , 其中  $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$ , 则  $Cay(X, S)$  可以变成一个无向图. 现在, 我们考虑当群  $X$  是一个置换群时, Cayley 图  $Cay(X, S)$ . 我们用  $S_n$  来表示由  $\{1, 2, \dots, n\}$  上的所有置换, 用  $p_1 p_2 \dots p_n$  来表示置换  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ , 置换  $(i, j)$  也被称为对换, 注意: 是交换位置  $i$  和  $j$  上的元素的置换(不交换元素  $i$  和  $j$ ), 即  $(p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n)(i, j) = (p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n)$ . 根据代数学的有关知识我们知道,  $\{(li) : i = 2, 3, \dots, n\}$  是对称群  $S_n$  的一个生成集. 因此,  $\{(li) : i = 2, 3, \dots, n\} \cup \{(j(j+1)) : j = 2, 4, \dots, n-1\}$  ( $n$  是奇数)和  $\{(li) : i = 2, 3, \dots, n\} \cup \{(j(j+1)) : j = 2, 4, \dots, n-2\}$  ( $n$  是偶数)也是  $S_n$  的一个生成集,  $n$  维叶形图  $CF_n$  的定义如下:

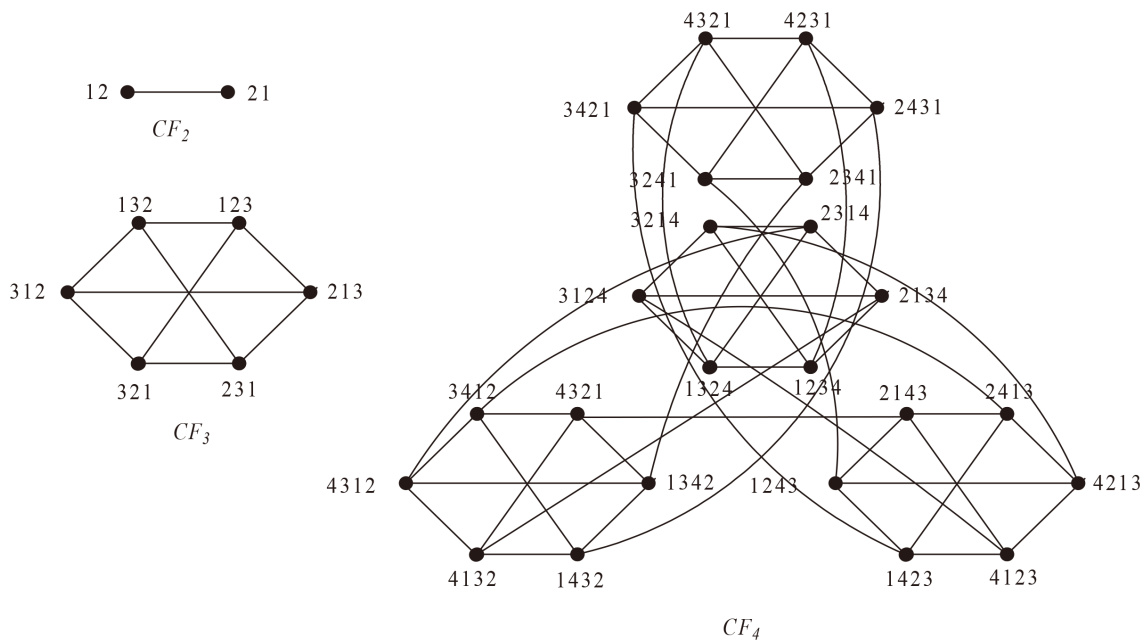
**定义 1 [15]** 当  $n$  为奇数时,  $n$  维叶形图  $CF_n$  是一个以  $S_n$  为顶点集, 以  $\{(u, v) \mid u = v(li)(i \in [2, n]), u = v(i(i+1))(i \in \{2, 4, \dots, n-1\})\}$  为边集的图; 当  $n$  为偶数时,  $n$  维叶形图  $CF_n$  是一个以  $S_n$  为顶点集, 以  $\{(u, v) \mid u = v(li)(i \in [2, n]), u = v(i(i+1))(i \in \{2, 4, \dots, n-2\})\}$  为边集的图.

接下来我们介绍一下  $CF_n$  的层次结构. 我们可以根据每个顶点最后一个位置上的数把叶形图  $CF_n$  划分成  $n$  个不同的子图:  $CF_{n-1}^1, CF_{n-1}^2, \dots, CF_{n-1}^n$ , 例如:  $i$  子图  $CF_{n-1}^i$  里每一个顶点的最后一个位置上的数都是固定的  $i$  ( $i$  是从 1 到  $n$  中的任意一个数). 很显然, 对于  $i \in [1, n]$ , 每一个  $CF_{n-1}^i$  跟  $CF_{n-1}$  是同构的[15]. 为了方便, 我们简单的表示为:  $CF_n = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ , 其中  $\oplus$  只表示  $CF_n$  的相应分解. 任意一条边都有两个端点, 我们把两个端点位于不同子图的边称为外部边. 如果两条边不相邻(没有公共的顶点), 我们就称它们是不相关的. 对于任意子图里面的顶点  $u$ , 我们用  $u^+$  表示  $u(1, n)$ , 用  $u^-$  表示  $u((n-1)n)$ , 令  $N_u^+ = \{u^+, u^-\}$ . 对于  $[1, n]$  里的任意两个整数  $i, j$ , 我们把  $i$  子图和  $j$  子图之间所有连着的外部边用  $E_{i,j}(CF_n) = E_{CF_n}(V(CF_{n-1}^i), V(CF_{n-1}^j))$  来表示; 对于任意的  $I \subseteq [1, n]$ , 我们用  $CF^I$  来表示以  $\bigcup_{r \in I} V(CF_{n-1}^r)$  诱导出来的子图. 根据  $CF_n$  的定义我们知道, 当  $n$  是奇数的时候,  $CF_n$  是一个包含了  $n!$  个顶点的  $\frac{3n-3}{2}$  正则图; 当  $n$  是偶数的时候,  $CF_n$  是一个包含了  $n!$  个顶点的  $\frac{3n-4}{2}$  正则图. 图 1 分别画出了 2 维、3 维、4 维的叶形图  $CF_2$ ,  $CF_3$  和  $CF_4$ .

**引理 1 [15]** 令  $CF_n = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ , 其中  $n \geq 4$ ,  $CF_{n-1}^i$  同构于  $CF_{n-1}$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ), 则下列的结论是成立的:

- 1) 当  $n$  是奇数时, 两个不同的子图  $CF_{n-1}^i$  之间存在着  $2(n-2)!$  条独立的交叉边; 当  $n$  是偶数时, 两个

不同的子图  $CF_{n-1}^i$  之间存在着  $(n-2)!$  条独立的交叉边;



**Figure 1.** The Leaf-sort  $CF_2, CF_3, CF_4$   
**图 1.** 叶形图  $CF_2, CF_3, CF_4$

2) 对于  $i$  子图  $CF_{n-1}^i$  里面的任意两个不同的点  $u, v$ , 当  $n$  是奇数时, 我们有  $N_u^+ \cap N_v^+ = \emptyset$ ; 当  $n$  是偶数时,  $u^+ \neq v^+$ ;

3) 若  $v$  是  $i$  子图  $CF_{n-1}^i$  里面的任意一个点, 那么: 当  $n$  是奇数时,  $v^+$  和  $v^-$  属于两个不同的子图  $CF_{n-1}^j$ 's, 其中  $j \neq i$ ; 当  $n$  是偶数时,  $v^+$  属于  $CF_{n-1}^j$ , 其中  $j \neq i$ ;

**引理 2 [7]** 令  $G$  是一个连通图,  $\delta$  是这个图的最小的度, 那么就会有  $\kappa_3(G) \leq \delta$ 。此外, 如果在图  $G$  中有两个度为  $\delta$  的顶点相邻, 那么  $\kappa_3(G) \leq \delta - 1$ 。

**引理 3 [7]** 令  $G$  是一个具有  $n$  个顶点的连通图, 如果  $\kappa(G) = 4k + r$ , 其中  $k$  和  $r$  是满足  $k \geq 0, r \in \{0, 1, 2, 3\}$  的两个整数, 那么  $\kappa_3(G) \geq 3k + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ 。同时, 这个下界是最优的。

**引理 4 [16]** 令  $G = (V(G), E(G))$  是一个  $k$  连通的图,  $X$  和  $Y$  是  $G$  的一个顶点集, 并且满足  $|X| \leq k, |Y| \leq k$ , 那么在图  $G$  中就会存在  $k$  对互不相交的  $(X, Y)$ -路。

**引理 5 [16]** 令  $G = (V(G), E(G))$  是一个  $k$  连通的图,  $x$  是  $G$  中的任意一个顶点,  $Y \subseteq V(G) \setminus \{x\}$  是  $G$  中一个至少包含  $k$  个顶点的顶点子集, 那么在图  $G$  中就会存在一个从  $x$  到  $Y$  的  $k$ -扇形。也就是说, 在  $G$  中会存在  $k$  条内部顶点互不相交的  $(x, Y)$ -路, 它们的终止端点在  $Y$  中是互不相同的。

**引理 6 [15]** 令  $CF_n$  是一个  $n$  维叶形图 ( $n \geq 2$ ), 当  $n$  是奇数时,  $CF_n$  的连通度  $\kappa(CF_n) = \frac{3n-3}{2}$ ; 当  $n$  是偶数时,  $CF_n$  的连通度  $\kappa(CF_n) = \frac{3n-4}{2}$ 。

### 3. 叶形图 $CF_n$ 的广义 3-连通度

**引理 7** 令  $CF_n = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ , 在不同子图  $CF_{n-1}^i, CF_{n-1}^j (i \neq j)$  中任意取两个点  $x, y$ , 它们最多有一个公共的外部邻域。

**证明:** 当  $n$  为偶数时, 由  $CF_n$  的定义可知, 每一个点只有一个外部邻域, 所以结论成立。我们接下来运用反证法来证明当  $n$  是奇数时, 结论也是成立的。不失一般性, 我们假设  $x = x_1x_2 \cdots x_{n-1}1 \in V(CF_{n-1}^1)$ 、 $y = y_1y_2 \cdots y_{n-1}2 \in V(CF_{n-1}^2)$ , 那么我们能够得到:  $x^+ = 1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_1$ 、 $x^- = x_1x_2 \cdots 1x_{n-1}$ 、 $y^+ = 2y_2 \cdots y_{n-1}y_1$ 、 $y^- = y_1y_2 \cdots 2y_{n-1}$ , 所以  $x^+ \neq y^+$ ,  $x^- \neq y^-$ 。又由引理 1(3)可知:  $x^+ \neq x^-$ 。如果  $x$  和  $y$  有两个公共的外部邻域, 则  $\{x^+, x^-\} = \{y^+, y^-\}$ 。因为  $x^+ \neq x^-$ 、 $x^+ \neq y^+$ 、 $x^- \neq y^-$ , 所以  $x^+ = y^-$ 、 $x^- = y^+$ , 即  $x^+ = 1x_2x_3 \cdots x_{n-1}1 = y^- = y_1y_2 \cdots 2y_{n-1}$ 、 $x^- = x_1x_2 \cdots 1x_{n-1} = y^+ = 2y_2y_3 \cdots y_{n-1}y_1$ , 那么就会有  $y_1 = 1$ ,  $x_{n-1} = 2$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_{n-1} = 1$ 。由于  $x_{n-1}$  和  $x_1$  不能同时等于 2, 所以矛盾出现, 结论成立。

**引理 8** 令  $CF_n = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \cdots \oplus CF_{n-1}^n$ ,  $H = CF_{n-1}^{i_1} \oplus CF_{n-1}^{i_2} \oplus \cdots \oplus CF_{n-1}^{i_s}$  是由  $\bigcup_{j=1}^s V(CF_{n-1}^{i_j})$  诱导出来的子图, 其中  $i_1, i_2, \dots, i_s \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 那么  $\kappa(H) \geq \frac{3n-7}{2}$  ( $n$  是大于等于 5 的奇数);  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  是大于等于 6 的偶数)。

**证明:** 不失一般性, 令  $H = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \cdots \oplus CF_{n-1}^i$ ,  $x$  和  $y$  是  $H$  中的任意两个点, 为了证明引理中的结论, 我们只需要证明: 在  $H$  中,  $x$  和  $y$  之间存在  $\frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为大于等于 5 的奇数)和  $\frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为大于等于 6 的偶数)条内部顶点互不相交的路即可。根据  $H$  的构造可得: 当  $n$  为奇数时,  $\delta(H) \geq \frac{3n-7}{2}$ ; 当  $n$  为偶数时,  $\delta(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ 。我们分下列两种情况来讨论:

**情况 1:**  $x$  和  $y$  属于同一个子图  $CF_{n-1}^i$ 。

由引理 6 可知: 当  $n$  为奇数时,  $\kappa(CF_{n-1}^i) = \frac{3(n-1)-4}{2} = \frac{3n-7}{2}$ ; 当  $n$  为偶数时,

$\kappa(CF_{n-1}^i) = \frac{3(n-1)-3}{2} = \frac{3n-6}{2}$ 。所以在  $CF_{n-1}^i$  中,  $x$  和  $y$  之间能够找到  $\frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数)和  $\frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数)条内部顶点互不相交的路, 引理得证。

**情况 2:**  $x$  和  $y$  属于不同的子图  $CF_{n-1}^i$  和  $CF_{n-1}^j$  ( $i \neq j$ )。

不失一般性, 我们令  $x \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $y \in V(CF_{n-1}^2)$ 。当  $n$  为大于等于 5 的奇数时, 在  $V(CF_{n-1}^1) \setminus \{x\}$  中选择  $\frac{3n-7}{2}$  个点  $x_i$  ( $1 \leq i \leq \frac{3n-7}{2}$ ), 使得这些点的一个外部邻域  $x'_i$  在子图  $CF_{n-1}^2$  中, 并且在  $CF_{n-1}^2$  中的邻域不能

是  $y$  (由引理 1(1)可知,  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 2$ , 所以我们可以找到  $x_i$  这些点)。令  $X_1 = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ ,

$X_2 = \left\{ x'_1, x'_2, \dots, x'_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ , 由引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  条从  $x$  到  $X_1$  的内部顶点互不相交的路  $P_i$

$\left( i \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{3n-7}{2} \right\} \right)$ ; 在  $CF_{n-1}^2$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  条从  $y$  到  $X_2$  的内部顶点互不相交的路  $Q_i$  ( $i \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{3n-7}{2} \right\}$ )。

令  $\bar{P}_i = xP_i x'_i Q_i y$  ( $i \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{3n-7}{2} \right\}$ ), 那么在  $H$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  条内部顶点互不相交的路。

当  $n$  为大于等于 6 的偶数时, 同样的方法, 在  $V(CF_{n-1}^1) \setminus \{x\}$  中选择  $\frac{3n-6}{2}$  个顶点  $x_i$  ( $1 \leq i \leq \frac{3n-6}{2}$ ), 使得这些点的一个外部邻域  $x'_i$  在子图  $CF_{n-1}^2$  中, 并且在  $CF_{n-1}^2$  中的邻域不能是  $y$  (由引理 1(1)可知,

$(n-2)! \geq \frac{3n-6}{2} + 2$ , 所以我们可以找到  $x_i$  这些点)。令  $X_1 = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_{\frac{3n-6}{2}} \right\}$ ,  $X_2 = \left\{ x'_1, x'_2, \dots, x'_{\frac{3n-6}{2}} \right\}$ , 由

引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条从  $x$  到  $X_1$  的内部顶点互不相交的路  $P_i \left( i \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{3n-6}{2} \right\} \right)$ ; 在  $CF_{n-1}^2$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条从  $y$  到  $X_2$  的内部顶点互不相交的路  $Q_i \left( i \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{3n-6}{2} \right\} \right)$ 。令  $\bar{P}_i = xP_i x_i^+ Q_i y$   $\left( i \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{3n-6}{2} \right\} \right)$ , 那么在  $H$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条内部顶点互不相交的路。

综上所述, 引理得证。

**引理 9** 令  $H = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^l$  是由  $\bigcup_{j=1}^l V(CF_{n-1}^j)$  诱导出来的子图,  $x$  是  $H$  中的任意一个顶点, 其中  $n \geq 5$ 。如果  $d_H(x) = k$ ,  $Y \subseteq V(H) \setminus \{x\}$ , 且满足  $|Y| = k$ , 使得  $|Y \cap V(CF_{n-1}^j)| \leq \frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数),  $|Y \cap V(CF_{n-1}^j)| \leq \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数), 那么在  $H$  中就会存在一个由  $x$  到  $Y$  的  $k$ -扇形。

**证明:** 不失一般性, 我们假设  $H = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^l$ 。令  $x \in V(H)$ ,  $d_H(x) = k$ ,  $Y \subseteq V(H) \setminus \{x\}$ , 且  $Y$  满足:  $|Y| = k$ ,  $|Y \cap V(CF_{n-1}^j)| \leq \frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数);  $|Y \cap V(CF_{n-1}^j)| \leq \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数), 其中  $j \in [1, l]$ 。

则当  $n$  为奇数时,  $\frac{3n-7}{2} \leq k \leq \frac{3n-3}{2}$ ; 当  $n$  为偶数时,  $\frac{3n-6}{2} \leq k \leq \frac{3n-4}{2}$ 。下面我们分情况进行讨论:

**情况 1:**  $k = \frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数);  $k = \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数)。

由引理 8 可知, 当  $n$  为奇数时,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-7}{2}$ ; 当  $n$  为偶数时,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ 。再由引理 5 可知, 当  $n$  为奇数时, 在  $H$  中存在一个由  $x$  到  $H$  的  $\frac{3n-7}{2}$ -扇形; 当  $n$  为偶数时, 在  $H$  中存在一个由  $x$  到  $Y$  的  $\frac{3n-6}{2}$ -扇形, 故引理中的结论成立。

**情况 2:**  $k = \frac{3n-3}{2}$  ( $n$  为奇数);  $k = \frac{3n-4}{2}$  ( $n$  为偶数)。

这种情况下, 我们把奇数和偶数分开讨论。

当  $n$  为奇数时, 由于  $k = d_H(x) = \frac{3n-3}{2}$ , 则  $x$  的两个外部邻域  $x^+$ ,  $x^-$  都在  $H$  中。由引理 1(3)可知,  $x^+$  和  $x^-$  属于两个不同的子图, 我们假设  $x \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $x^+ \in V(CF_{n-1}^2)$ ,  $x^- \in V(CF_{n-1}^3)$ 。令  $Y \cap V(CF_{n-1}^j) = M_j$ ,  $|M_j| = m_j$ , 其中  $1 \leq j \leq l$ , 则  $m_j \leq \frac{3n-7}{2}$ ,  $\sum_{j=1}^l m_j = \frac{3n-3}{2}$ 。由于  $|Y| = \frac{3n-3}{2}$ ,  $m_1 \leq \frac{3n-7}{2}$ , 所以  $Y$  中至少有两个点在  $CF_{n-1}^1$  以外。由于  $CF_{n-1}^2$  和  $CF_{n-1}^3$  比较特殊, 包含了  $x$  的外部邻域, 所以我们对  $m_2$  和  $m_3$  进行分类讨论。

**情况 2.1:**  $m_2 \geq 1$  并且  $m_3 \geq 1$ 。

当  $j \in \{2, 3\}$  时, 令  $m'_j = m_j - 1$ , 当  $j \notin \{2, 3\}$  时, 令  $m'_j = m_j$ , 则  $\sum_{j=1}^l m'_j = \frac{3n-7}{2}$ 。现在我们在  $CF_{n-1}^1 \setminus (M_1 \cup \{x\})$  中选择  $l-1$  对不相同的顶点集  $A_2, A_3, \dots, A_l$ , 使得  $|A_j| = m'_j$  ( $j \in [2, l]$ ), 并且对于  $A_j$  中的任意一个点, 都有一个外部邻域在  $CF_{n-1}^j \setminus N_x^+$  中(如图 2 所示)。由于  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 1$  ( $n \geq 5$ ), 所以这些点是可以选择出来的。令  $M = M_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_l$ , 则  $|M| = \frac{3n-7}{2}$ 。又因为  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-7}{2}$ , 由引理

5 可知, 在  $CF_{n-1}^1$  中, 存在一个由  $x$  到  $M$  的  $\frac{3n-7}{2}$ -扇形, 也就是说, 存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x$  到  $M$  的内部顶点互不相交的路, 且路的终止端点  $M$  中是互不相同的, 记为  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-7}{2}}$ 。

令  $A'_j = \{y' \mid y' \text{ 是 } y \in A_j \text{ 的外部邻域}, y' \in V(CF_{n-1}^j)\}$ ,  $E_j = \{yy' \in E(CFn) \mid y \in A_j, y' \in A'_j\}$ ,  $A_2'' = A_2' \cup \{x^+\}$ ,  $A_3'' = A_3' \cup \{x^-\}$ 。则  $|A_2''| = m_2$ ,  $|A_3''| = m_3$ 。当  $j \in \{2, 3\}$  时, 令  $A_j' \cap M_j = M_{j_0}$ ,  $A_j' \setminus M_{j_0} = M_{j_1}$ 。

当  $j \in [4, l]$  时, 令  $A_j' \cap M_j = M_{j_0}$ ,  $A_j' \setminus M_{j_0} = M_{j_1}$ 。现在我们假设  $M_j \setminus M_{j_0} = M_{j_2}$ , 则  $|M_{j_1}| = |M_{j_2}| = m_j - |M_{j_0}|$ 。由引理 6 可知,  $\kappa(CF_{n-1}^j) = \frac{3n-7}{2}$ , 则  $\kappa(CF_{n-1}^j \setminus M_{j_0}) \geq \frac{3n-7}{2} - |M_{j_0}| \geq m_j - |M_{j_0}|$ 。所以由引理 4 可得, 在  $CF_{n-1}^j \setminus M_{j_0}$  中存在  $m_j - |M_{j_0}|$  对互不相交的  $(M_{j_1}, M_{j_2})$ -路, 记为  $Q^i (i \in [1, m_j - |M_{j_0}|])$ 。

结合  $P^i$ 、 $E_i$ 、 $Q^i$  和  $N_x^+$  可知, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-3}{2}$  条由  $x$  到  $Y$  的内部顶点互不相交的路, 且终止端点  $Y$  中是互不相同的, 即存在一个由  $x$  到  $Y$  的扇形。

**情况 2.2:**  $m_2 = 0$  或者  $m_3 = 0$ 。

不失一般性, 我们假设  $m_2 = 0$ , 接下来我们分为如下三种情况:

**情况 2.2.1:**  $m_2 = 0$ ,  $m_3 \geq 2$ 。

这种情况参照图 3, 当  $j = 3$  时, 令  $m'_j = m_j - 2$ ; 当  $j \neq 3$  时, 令  $m'_j = m_j$ 。在  $CF_{n-1}^1 \setminus (M_1 \cup \{x\})$  中选择  $l-2$  对互不相交的顶点集  $A_3, A_4, \dots, A_l$ , 使得  $|A_j| = m'_j$ , 且  $A_j$  中的任意一个点, 都有一个外部邻域属于  $CF_{n-1}^j \setminus N_x^+$  ( $j \in [3, l]$ )。由于  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 2 (n \geq 5)$ , 所以这些点是可以选择出来的。令

$M = M_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_l$ , 则  $|M| = \frac{3n-7}{2}$ 。由引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^1$  中, 存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x$  到  $M$  的内部

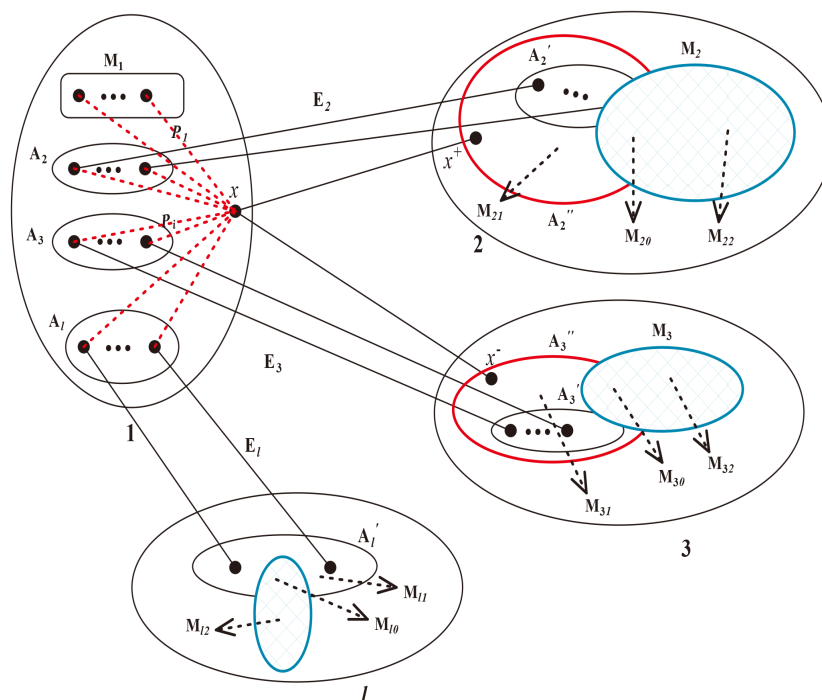


Figure 2. The illustration of Case 2.1

图 2. 情况 2.1 的图示

顶点互不相交的路, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-7}{2}}$ , 这些路的终止端点在  $M$  中, 并且都是互不相同的。

令  $A'_j = \{y' | y' \text{ 是 } y \in A_j \text{ 中的每个顶点在 } CF_{n-1}^j \text{ 中的外部邻域}\}$ ,  $E_j = \{yy' \in E(CF_n) | y \in A_j, y' \in A'_j\}$   $j \in [3, l]$ 。令  $w \in V(CF_{n-1}^2)$ , 且  $w$  的一个外部邻域  $w'$  在  $CF_{n-1}^3 \setminus (A'_3 \cup \{x^-\})$  中。由于  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 2$  ( $n \geq 5$ ), 所以存在这样的  $w$ 。又因为  $CF_{n-1}^2$  是连通的, 所以在  $CF_{n-1}^2$  中存在 1 条由  $x^+$  到  $w$  的路, 记为:  $P'$ 。令  $A_3'' = A_3 \cup \{x^-, w'\}$ , 则  $|A_3''| = m_3$ 。当  $j=3$  时, 令  $A_3'' \cap M_3 = M_{30}$ ,  $A_3'' \setminus M_{30} = M_{31}$ ,  $M_3 \setminus M_{30} = M_{32}$ 。当  $j \neq 3$  时, 令  $A'_j \cap M_j = M_{j0}$ ,  $A'_j \setminus M_{j0} = M_{j1}$ ,  $M_j \setminus M_{j0} = M_{j2}$ 。那么就有  $|M_{j1}| = |M_{j2}| = m_j - |M_{j0}|$  ( $j \in [3, l]$ )。由引理 6 可知,  $\kappa(CF_{n-1}^j) = \frac{3n-7}{2}$ , 所以  $\kappa(CF_{n-1}^k \setminus M_{j0}) \geq \frac{3n-7}{2} - |M_{j0}| \geq m_j - |M_{j0}|$ 。由引理 4 可知, 在  $CF_{n-1}^j \setminus M_{j0}$  中存在  $m_j - |M_{j0}|$  对互不相交的  $(M_{j1}, M_{j2})$ -路, 记为  $Q^i$  ( $i \in [1, m_j - |M_{j0}|]$ )。

结合  $P^i$ 、 $P'$ 、 $E_i$ 、 $Q^i$  和  $N_x^+$  可知, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-3}{2}$  条由  $x$  到  $Y$  的内部顶点互不相交的路, 且终止端点在  $Y$  中是互不相同的, 即存在一个由  $x$  到  $Y$  的扇形。

**情况 2.2.2:**  $m_2 = 0, m_3 = 1$ 。

由  $m_2 = 0, m_3 = 1$  可知, 一定存在一个  $CF_{n-1}^k$  ( $k \in [4, l]$ ) 使得  $m_k \geq 1$ 。当  $j=3, k$  时, 令  $m'_j = m_j - 1$ ; 当  $j \neq 3, k$  时, 令  $m'_j = m_j$ 。在  $CF_{n-1}^1 \setminus (M_1 \cup \{x\})$  中选择  $l-2$  对互不相同的顶点集  $A_3, A_4, \dots, A_l$ , 使得  $|A_j| = m'_j$ , 且  $A_j$  中的每一个点都会有一个外部邻域属于  $CF_{n-1}^j \setminus N_x^+$ 。由于  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 1$  ( $n \geq 5$ ), 所以存在这样的  $A_j$ 。令  $M = M_1 \cup A_3 \cup \dots \cup A_l$ , 则  $|M| = \frac{3n-7}{2}$ 。同理, 由于  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-7}{2}$ , 所以在  $CF_{n-1}^1$  中存在

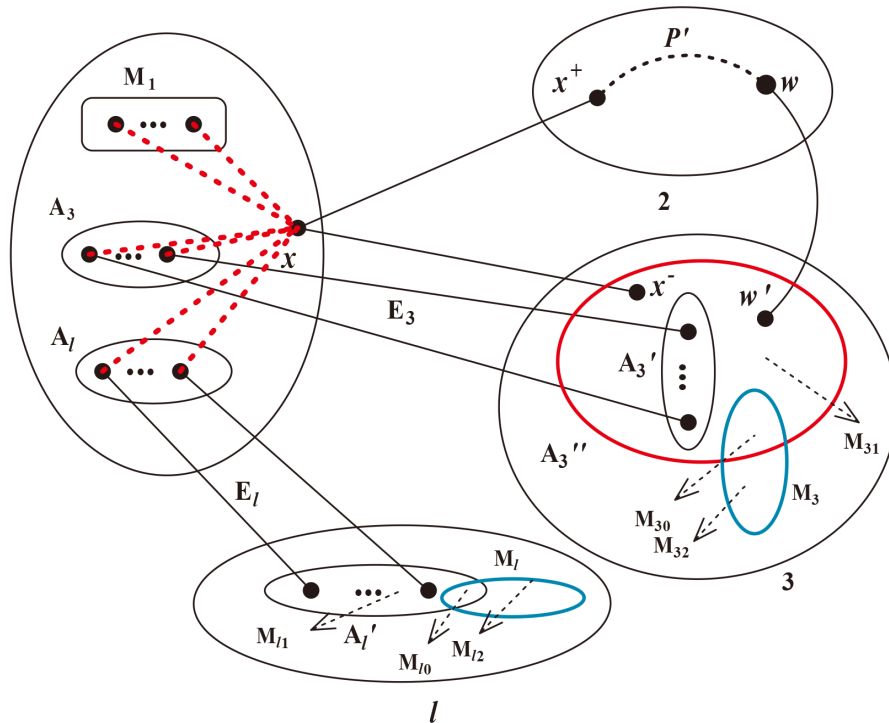


Figure 3. The illustration of Case 2.2.1

图 3. 情况 2.2.1 的图示



$\frac{3n-7}{2}$  条由  $x$  到  $M$  的内部顶点互不相交的路, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-7}{2}}$ , 这些路的终止端点都在  $M$  中, 并且都是互不相同的。令  $A'_j = \{y' | y' \text{ 是 } y \in A_j \text{ 中的每个顶点在 } CF_{n-1}^j \text{ 中的外部邻域}\}$ ,

$E_j = \{yy' \in E(CFn) | y \in A_j, y' \in A'_j\} (j \in [3, l])$ 。令  $w \in V(CF_{n-1}^2)$ , 且满足  $w$  的一个外部邻域  $w'$  在  $CF_{n-1}^k$  中, 且  $w' \notin A'_k$ 。由于  $CF_{n-1}^2$  是连通的, 所以在  $x^+$  和  $w$  之间存在一条路  $P'$ 。令  $A_k'' = A'_k \cup \{w'\}$ ,  $A_3'' = A'_3 \cup \{x^-\}$ , 则  $|A_k''| = m_k$ ,  $|A_3''| = m_3$ 。接下来的证明过程和情况 2.2.1 一样。

**情况 2.2.3:**  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 0$ 。

这种情况下, 会出现两种子情况: 1、存在一个子图  $CF_{n-1}^k$ , 使得  $m_k \geq 2 (k \in [4, l])$ 。2、存在两个子图  $CF_{n-1}^s$  和  $CF_{n-1}^t$ , 使得  $m_s, m_t \geq 1 (s, t \in [4, l])$ , 我们分别进行讨论。

1) 存在一个子图  $CF_{n-1}^k$ , 使得  $m_k \geq 2 k \in [4, l]$ 。当  $j = k$  时, 令  $m'_j = m_j - 2$ ; 当  $j \neq k$  时, 令  $m'_j = m_j$ 。跟以上的讨论方法、过程相同, 我们可以选择出互不相同的顶点集  $A_4, A_5, \dots, A_l$ 。接着, 我们在  $CF_{n-1}^2$  中选择一个顶点  $w_1$ , 使得它的一个外部邻域  $w'_1$  在  $CF_{n-1}^k \setminus A'_k$  中。同理, 在  $CF_{n-1}^3$  中选择一个顶点  $w_2$ , 使得它的一个外部邻域  $w'_2$  在  $CF_{n-1}^k \setminus (A'_k \cup \{x_1'\})$  中。由于  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 1 (n \geq 5)$ , 所以  $w_1$  和  $w_2$  是可以选择出来的。令  $A_k'' = A'_k \cup \{x_1', x_2'\}$ , 则  $|A_k''| = m_k$ 。跟上面情况的讨论方法相同, 我们可以得到  $H$  中的  $\frac{3n-3}{2}$  条由  $x$  到  $Y$  的内部顶点互不相交的路, 且终止端点在  $Y$  中是互不相同的。

2) 存在两个子图  $CF_{n-1}^s$  和  $CF_{n-1}^t$ , 使得  $m_s, m_t \geq 1 (s, t \in [4, l])$ 。当  $j = s, t$  时, 令  $m'_j = m_j - 1$ ; 当  $j \neq s, t$  时, 令  $m'_j = m_j$ 。同理, 我们也可以选择出互不相同的顶点集  $A_4, A_5, \dots, A_l$ , 使得  $|A_j| = m'_j (j \in [4, l])$ , 且  $A_j$  中的每个顶点都有一个外部邻域在  $CF_{n-1}^j$  中。现在在  $CF_{n-1}^2$  中选择一个顶点  $w_1$ , 使得它的一个外部邻域  $w'_1$  在  $CF_{n-1}^s \setminus A'_s$  中。同理, 在  $CF_{n-1}^3$  中选择一个顶点  $w_2$ , 使得它的一个外部邻域  $w'_2$  在  $CF_{n-1}^t \setminus A'_t$  中。由于  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 1 (n \geq 5)$ , 所以  $w_1$  和  $w_2$  是可以选择出来的。令  $A_s'' = A'_s \cup \{x_1'\}$ ,  $A_t'' = A'_t \cup \{x_2'\}$ , 则  $|A_s''| = m_s$ ,  $|A_t''| = m_t$ 。同样的方法, 我们可以获得  $\frac{3n-3}{2}$  条内部顶点互不相交路。

当  $n$  为偶数时, 由于  $d_H(x) = \frac{3n-4}{2}$ , 那么  $V(H)$  一定包含了  $x$  的外部邻域  $x^+$ 。由引理 1(3)可知,  $x$  和  $x^+$  属于两个不同的子图, 假设  $x \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $x^+ \in V(CF_{n-1}^2)$ 。令  $Y \cap V(CF_{n-1}^j) = M_j$ ,  $|M_j| = m_j$ , 则  $\sum_{j=1}^l m_j = \frac{3n-4}{2}$ 。由于  $m_1 \leq \frac{3n-6}{2}$ , 而  $|Y| = \frac{3n-4}{2}$ , 所以一定有一个  $Y$  中的点在  $CF_{n-1}^1$  的外部。由于子图  $CF_{n-1}^2$  比较特殊, 包含了  $x^+$ , 所以我们考虑以下两种情况: 1、 $m_2 \geq 1$ ; 2、 $m_2 = 0$ 。

1)  $m_2 \geq 1$ 。当  $j = 2$  时, 令  $m'_j = m_j - 1$ ; 当  $j \neq 2$  时, 令  $m'_j = m_j$ 。同理, 在  $CF_{n-1}^1 \setminus (M_1 \cup \{x\})$  中选择  $l-1$  对互不相同的顶点集  $A_2, A_3, \dots, A_l$ , 使得  $|A_j| = m'_j (j \in [2, l])$ , 且  $A_j$  中的每个顶点都有一个外部邻域在  $CF_{n-1}^j$  中。由于  $(n-2)! \geq \frac{3n-6}{2} + 1 (n \geq 6)$ , 所以这些顶点集是可以选择出来的。令  $M = M_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l$ , 则  $|M| = \frac{3n-6}{2}$ 。又因为  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-6}{2}$ , 由引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条内部顶点互不相交的  $(x, M)$ -路, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-6}{2}}$ , 且终止端点在  $M$  中是互不相同的。令  $A'_j = \{y^+ | y^+ \text{ 是 } y \in A_j \text{ 在 } CF_{n-1}^j \text{ 的邻域}\}$ ,  $E_j = \{yy^+ \in E(CFn) | y \in A_j, y^+ \in A'_j\} (j \in [2, l])$ 。跟情况 2.2.2 的讨论方法相同, 我们可以得到: 当  $n$  为偶

数时, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-4}{2}$  条由  $x$  到  $Y$  的内部顶点互不相交的路, 且终止端点在  $Y$  中互不相同。

2)  $m_2 = 0$ 。这种情况下, 一定有一个  $CF_{n-1}^k$ , 满足  $m_k \geq 1$ 。同理, 跟奇数的证明方法相同, 我们也可以得到: 在  $H$  中存在  $\frac{3n-4}{2}$  条由  $x$  到  $Y$  的内部顶点互不相交的路, 且终止端点在  $Y$  中是互不相同的。

**情况 3:**  $k = \frac{3n-5}{2}$  ( $n$  为奇数)。

如果  $d_H(x) = \frac{3n-5}{2}$ , 则  $V(H)$  中仅仅包含  $x$  的一个外部邻域, 这里的证明方法和情况 2 中  $n$  为偶数是相似的, 我们能够得到在  $H$  中一定会存在  $\frac{3n-5}{2}$  条由  $x$  到  $Y$  的内部顶点互不相交的路, 且终止端点在  $Y$  中是互不相同的。为了避免过多的重复, 我们在这里省去具体的证明过程。

综上所述, 引理得证。

**引理 10:** 令  $H = CF_{n-1}^i \oplus CF_{n-1}^j$ , 其中  $i \neq j$ ,  $n \geq 5$  且  $n$  为奇数。如果  $x \in V(CF_{n-1}^i)$ ,  $y \in V(CF_{n-1}^j)$ , 且  $d_H(x) = d_H(y) = \frac{3n-5}{2}$ , 那么在  $H$  中就会存在  $\frac{3n-5}{2}$  条内部顶点互不相交的  $(x, y)$ -路。

**证明:** 不失一般性, 我们假设  $H = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2$ ,  $x \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $y \in V(CF_{n-1}^2)$ , 且  $d_H(x) = d_H(y) = \frac{3n-5}{2}$ 。我们考虑如下两种情况:

**情况 1:**  $x$  和  $y$  不相邻。

令  $Y = N_H(x) = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_{\frac{3n-5}{2}} \right\}$ 。由于  $x$  和  $y$  不相邻, 所以  $x \notin Y$ 。显然,  $|Y \cap V(CF_{n-1}^k)| \leq \frac{3n-7}{2}$  ( $k=1, 2$ )。由于  $d_H(x) = \frac{3n-5}{2}$ ,  $|Y| = \frac{3n-5}{2}$ , 所以由引理 9 可知, 在  $H$  中存在一个由  $x$  到  $Y$  的  $\frac{3n-5}{2}$ -扇形, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-5}{2}}$ 。当  $y$  不是这些路的内部顶点时, 结合  $y$  和  $Y$  中所连的边, 我们可以得到  $\frac{3n-5}{2}$  条内部顶点互不相交的  $(x, y)$ -路。当  $y$  是这些路的内部顶点时, 由于  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-5}{2}}$  是内部顶点互不相交的路, 所以只可能存在包含  $y$  的一条路, 假设  $P^1$  是包含  $y$  为内部顶点的路, 且路  $P^1$  的终止端点是  $y_1$ 。则结合  $P^i$  和  $y$  到  $Y$  中所连的边  $\left( i \in \left[ 2, \frac{3n-7}{2} \right] \right)$ , 就会得到  $\frac{3n-7}{2}$  条内部顶点互不相交的  $(x, y)$ -路。而  $P^1 \setminus \{y_1\}$  又是一条  $(x, y)$ -路, 故在  $H$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条内部顶点互不相交的  $(x, y)$ -路。

**情况 2:**  $x$  和  $y$  相邻。

在  $CF_{n-1}^1 \setminus \{x\}$  中选择  $\frac{3n-7}{2}$  个顶点  $\left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ , 使得它们的邻域有一个  $u'_i$  在  $CF_{n-1}^2$  中。由于对于  $n \geq 5$ ,  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 1$ , 所以这些点是可以选择出来的。令  $U = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ ,  $U' = \left\{ u'_1, u'_2, \dots, u'_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ 。由于  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \kappa(CF_{n-1}^2) = \frac{3n-7}{2}$ , 由引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^1$  和  $CF_{n-1}^2$  中分别存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x$  到  $U$ ,  $y$  到  $U'$  的内部顶点互不相交的路, 记为  $P_i^1$  和  $P_i^2$ , 其中  $\left( i \in \left[ 1, \frac{3n-7}{2} \right] \right)$ 。令  $\bar{P}_i = P_i^1 \cup u_i u'_i \cup P_i^2$ ,  $\left( i \in \left[ 1, \frac{3n-7}{2} \right] \right)$ , 则  $\bar{P}_i$  和  $xy$  是  $H$  中  $x$  和  $y$  之间的  $\frac{3n-5}{2}$  条内部顶点互不相交的路。

**引理 11:** 令  $CF_n = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ ,  $S = \{x_1, x_2, x_3\}$  是  $CF_{n-1}^i$  中的任意一个顶点集, 其中  $x_1, x_2, x_3$  是  $CF_{n-1}^i$  中的任意三个顶点,  $n \geq 4$ ,  $1 \leq i \leq n$ . 如果在  $CF_{n-1}^i$  中存在  $\frac{3n-9}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3n-8}{2}$  ( $n$  为偶数) 条包含  $S$  的内部互不相交的树, 那么在  $CF_n$  中就会存在包含  $S$  的  $\frac{3n-5}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数) 条内部互不相交的树。

**证明:** 不失一般性, 我们假设  $S \subseteq V(CF_{n-1}^1)$ , 由已知条件可知: 在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-9}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3n-8}{2}$  ( $n$  为偶数) 条包含  $S$  的内部互不相交的树, 记为:  $T_1, T_2, \dots, T_{\frac{3n-9}{2}}$  ( $n$  为奇数);  $T_1, T_2, \dots, T_{\frac{3n-8}{2}}$  ( $n$  为偶数)。下面我们分奇数和偶数来进行讨论:

当  $n$  为奇数时, 由于每一个  $x_i$  有两个外部邻域  $x_i^+$ ,  $x_i^-$ , 且由引理 1 可知, 每一个外部邻域都是不同的, 所以令  $M = \{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-\}$ 。每一个子图  $CF_{n-1}^i$  最多包含  $M$  中的三个点, 根据这一结论, 我们分为以下三种情况进行讨论:

**情况 1:** 存在一个子图包含  $M$  中的三个点。

令  $H = CF_{n-1}^3 \oplus CF_{n-1}^4 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ , 不失一般性, 我们假设  $\{x_1^+, x_2^+, x_3^+\} \subseteq V(CF_{n-1}^2)$  中  $\{x_1^-, x_2^-, x_3^-\} \subseteq V(H)$ , 中。由于  $CF_{n-1}^2$  是连通的, 所以在  $CF_{n-1}^2$  中存在一条包含  $\{x_1^+, x_2^+, x_3^+\}$  的路, 记为:  $P^1$ 。令

$T_{\frac{3n-7}{2}} = P^1 \cup x_1 x_1^+ \cup x_2 x_2^+ \cup x_3 x_3^+$ , 则  $T_{\frac{3n-7}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。又因为  $H$  是连通的, 所以在  $H$  中也存在一条包含  $\{x_1^-, x_2^-, x_3^-\}$  的路, 记为:  $P^2$ 。令  $T_{\frac{3n-5}{2}} = P^2 \cup x_1 x_1^- \cup x_2 x_2^- \cup x_3 x_3^-$ , 则  $T_{\frac{3n-5}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一

棵树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。

**情况 2:** 存在一个子图包含  $M$  中的两个点, 且其他的子图最多包含  $M$  中的两个点。

不失一般性, 我们假设  $\{x_1^+, x_2^+\} \subseteq V(CF_{n-1}^2)$ ,  $x_3^+ \in V(CF_{n-1}^3)$ , 又会分为如下两种子情况:

**情况 2.1:**  $CF_{n-1}^3$  中只包含  $M \setminus \{x_1^+, x_2^+\}$  中的一个点  $x_3^+$ 。

令  $H = CF_{n-1}^4 \oplus CF_{n-1}^5 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ 。由于  $CF_n[V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^3)]$  是连通的, 所以在  $CF_n[V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^3)]$  中存在一条包含  $\{x_1^+, x_2^+, x_3^+\}$  的路, 记为:  $P^1$ 。则令

$T_{\frac{3n-7}{2}} = P^1 \cup x_1 x_1^+ \cup x_2 x_2^+ \cup x_3 x_3^+$ , 则  $T_{\frac{3n-7}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。又因为  $H$  是连通的, 所以在  $H$  中也存在一条包含  $\{x_1^-, x_2^-, x_3^-\}$  的路, 记为:  $P^2$ 。令  $T_{\frac{3n-5}{2}} = P^2 \cup x_1 x_1^- \cup x_2 x_2^- \cup x_3 x_3^-$ , 则  $T_{\frac{3n-5}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一

棵树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。

**情况 2.2:**  $CF_{n-1}^3$  中包含  $M \setminus \{x_1^+, x_2^+\}$  中的两个点  $x_3^+, x_1^-$ 。

这种情况下, 我们又可以分为两种子情况来进行讨论:

**情况 2.2.1:**  $x_2^-, x_3^-$  属于两个不同的子图。

不失一般性, 我们令  $x_3^- \in V(CF_{n-1}^4)$ ,  $x_2^- \in V(CF_{n-1}^5)$ 。由于  $CF_n[V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^4)]$  是连通的, 所以在  $CF_n[V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^4)]$  中存在一条包含  $\{x_1^+, x_2^+, x_3^-\}$  的路, 记为:  $P^1$ 。令

$T_{\frac{3n-7}{2}} = P^1 \cup x_1 x_1^+ \cup x_2 x_2^+ \cup x_3 x_3^-$ , 则  $T_{\frac{3n-7}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。又因为  $CF_n[V(CF_{n-1}^3) \cup V(CF_{n-1}^5)]$  是连

通的, 所以在  $CF_n[V(CF_{n-1}^3) \cup V(CF_{n-1}^5)]$  中存在一条包含  $\{x_1^-, x_2^-, x_3^+\}$  的路, 记为:  $P^2$ 。令

$T_{\frac{3n-5}{2}} = P^2 \cup x_1 x_1^- \cup x_2 x_2^- \cup x_3 x_3^+$ , 则  $T_{\frac{3n-5}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内

部互不相交的树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。

**情况 2.2.2:**  $x_2^-, x_3^-$  属于同一个子图。

不失一般性, 我们假设  $\{x_2^-, x_3^-\} \subseteq V(CF_{n-1}^4)$ 。由题意可知:  $x_3^+ \in V(CF_{n-1}^3)$ ,  $x_3^- \in V(CF_{n-1}^4)$ 。故  $x_3$  具有  $3i_1 i_2 \cdots 41$  的形式。则  $x_3^+$  具有  $1i_1 i_2 \cdots 43$  的形式,  $(x_3^+)^- \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $(x_3^-)^+ \in V(CF_{n-1}^4)$ 。令  $u = x_3^+(n-2, n-1)$ , 则  $u^+ \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $u^- \in V(CF_{n-1}^i)$  ( $i \neq 1, 2, 3, 4$ )。由于  $CF_n[V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^i)]$  是连通的, 所以在  $CF_n[V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^i)]$  中存在一条包含  $\{x_1^+, x_2^+, u^-\}$  的路, 记为:  $P^1$ 。令

$T_{\frac{3n-7}{2}} = P^1 \cup x_1 x_1^+ \cup x_2 x_2^+ \cup x_3 x_3^+ \cup u^- u \cup u x_3^+$ , 则  $T_{\frac{3n-7}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。又因为

$CF_n[V(CF_{n-1}^3) \cup V(CF_{n-1}^4)]$  是连通的, 所以在  $CF_n[V(CF_{n-1}^3) \cup V(CF_{n-1}^4)]$  中存在一条包含  $\{x_1^-, x_2^-, x_3^-\}$  的路, 记为:  $P^2$ 。令  $T_{\frac{3n-5}{2}} = P^2 \cup x_1 x_1^- \cup x_2 x_2^- \cup x_3 x_3^-$ , 则  $T_{\frac{3n-5}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。

**情况 3:** 每一个子图最多包含  $M$  中的一个点。

不失一般性, 我们假设  $x_1^+ \in V(CF_{n-1}^2)$ ,  $x_2^+ \in V(CF_{n-1}^3)$ ,  $x_3^+ \in V(CF_{n-1}^4)$ ,  $x_1^- \in V(CF_{n-1}^5)$ ,  $x_2^- \in V(CF_{n-1}^6)$ ,  $x_3^- \in V(CF_{n-1}^7)$ 。由于  $CF_n[\bigcup_{i=2}^4 V(CF_{n-1}^i)]$  是连通的, 所以在  $CF_n[\bigcup_{i=2}^4 V(CF_{n-1}^i)]$  中存在一条包含  $\{x_1^+, x_2^+, x_3^+\}$  的一条路, 记为:  $P^1$ 。令  $T_{\frac{3n-7}{2}} = P^1 \cup x_1 x_1^+ \cup x_2 x_2^+ \cup x_3 x_3^+$ , 则  $T_{\frac{3n-7}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。

又因为  $CF_n[\bigcup_{i=5}^7 V(CF_{n-1}^i)]$  是连通的, 所以在  $CF_n[\bigcup_{i=5}^7 V(CF_{n-1}^i)]$  中存在一条包含  $\{x_1^-, x_2^-, x_3^-\}$  的路, 记为:  $P^2$ 。令  $T_{\frac{3n-5}{2}} = P^2 \cup x_1 x_1^- \cup x_2 x_2^- \cup x_3 x_3^-$ , 则  $T_{\frac{3n-5}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $S$  的一棵树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。故在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $S$  的内部互不相交的树。

当  $n$  为偶数时, 每一个  $x_i$  只有一个外部邻域, 令  $M = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+\}$ 。同样的, 每一个子图  $CF_{n-1}^i$  最多包含  $M$  中的三个点, 根据这一结论, 我们也可以分为以下三种情况进行讨论: 1) 存在一个子图包含  $M$  中的三个点。2) 存在一个子图包含  $M$  中的两个点。3) 每一个子图最多包含  $M$  中的一个点。这三种情况的证明过程和奇数的证明方法一样, 我们可以得到: 在  $CF_n$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条包含  $M$  的内部互不相交的树, 在这里我们省略具体的证明过程。

综上所述, 引理得证。

**定理 1:** 对于  $n \geq 3$ ,  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-5}{2}$  ( $n$  为奇数);  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数)。

**证明:** 由于  $CF_n$  是  $\frac{3n-3}{2}$  ( $n$  为奇数)、 $\frac{3n-4}{2}$  ( $n$  为偶数) 正则图, 所以由引理 2 可知: 当  $n$  为奇数时,  $\kappa_3(CF_n) \leq \delta - 1 = \frac{3n-5}{2}$ ; 当  $n$  为偶数时,  $\kappa_3(CF_n) \leq \delta - 1 = \frac{3n-6}{2}$ 。为了证明该定理中的结论, 我们只需要证明  $\kappa_3(CF_n) \geq \frac{3n-5}{2}$  和  $\kappa_3(CF_n) \geq \frac{3n-6}{2}$  即可。接下来我们采用数学归纳法来证明该定理。

当  $n=3$  时,  $CF_3$  是一个  $\frac{3 \times 3 - 3}{2} = 3$  正则图。由引理 3 可知,  $\kappa_3(CF_3) \geq 2$ 。又由引理 2 可知,  $\kappa_3(CF_3) \leq 2$ 。所以  $\kappa_3(CF_3) = 2 = \frac{3 \times 3 - 5}{2}$ ; 当  $n=4$  时,  $CF_4$  是一个  $\frac{3 \times 4 - 4}{2} = 4$  正则图。由引理 3 可知,  $\kappa_3(CF_4) \geq 3$ 。又由引理 2 可知,  $\kappa_3(CF_4) \leq 3$ 。所以  $\kappa_3(CF_4) = 3 = \frac{3 \times 4 - 6}{2}$ 。

所以, 当  $n=3, n=4$  时, 定理中的结论是成立的。下面假设  $n \geq 5$ , 并且定理中的结论对  $CF_{n-1}$  成立, 我们来证明当  $n \geq 5$  时,  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-5}{2}$  ( $n$  为奇数);  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数)。为了方便, 我们令  $M = \{x_1, x_2, x_3\}$  是  $CF_n$  中的任意三个点, 根据广义 3-连通性的定义可知: 我们只需要证明在  $CF_n$  存在包含  $M$  的  $\frac{3n-5}{2}$  和  $\frac{3n-6}{2}$  条内部互不相交的树即可(如果存在更多互不相交的树, 那么  $\kappa_3(CF_n) \geq \frac{3n-5}{2}$  和  $\kappa_3(CF_n) \geq \frac{3n-6}{2}$  就会成立), 考虑以下三种情况:

**情况 1:**  $x_1, x_2, x_3$  属于同一个子图  $CF_{n-1}^i$ 。

通过归纳假设我们可以知道, 在  $CF_{n-1}^i$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3(n-1)-6}{2} = \frac{3n-9}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3(n-1)-5}{2} = \frac{3n-8}{2}$  ( $n$  为偶数) 条内部互不相交的树。由引理 11 可得: 在  $CF_n$  中, 存在包含  $M$  的  $\frac{3n-5}{2}$

**情况 2:**  $x_1, x_2, x_3$  属于两个不同的子图  $CF_{n-1}^i$  和  $CF_{n-1}^j$  ( $i \neq j$ )。

不失一般性, 令  $x_1, x_2 \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $x_3 \in V(CF_{n-1}^2)$ 。由引理 6 可知: 当  $n$  为奇数时,  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-7}{2}$ ; 当  $n$  为偶数时,  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-6}{2}$ , 故  $x_1$  和  $x_2$  在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数) 条内部顶点互不相交的路。令  $H = CF_{n-1}^2 \oplus CF_{n-1}^3 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ , 由引理 1(3) 可知:  $x_3$  的外部邻域最多有一个在  $CF_{n-1}^1$  中, 也就是说,  $x_3$  的外部邻域最多有一个在  $H$  以外。根据这一分析, 我们分为以下两种情况进行讨论:

**情况 2.1:**  $x_3$  的外部邻域都不属于  $CF_{n-1}^1$ 。

当  $n$  为奇数时,  $x_1$  和  $x_2$  在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  条内部顶点互不相交的路, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-7}{2}}$ , 这些路中最多只有一条路的长度是 1, 即  $x_1$  和  $x_2$  是相连的。现在我们在这些路上各自选择一个顶点  $y_i$ , 即  $y_i \in V(P^i)$ , 那么这些点的外部邻域一定在  $H$  中。令  $S_1 = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_{\frac{3n-7}{2}}, x_1, x_2 \right\}$ ,

$S_2 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-7}{2}}, x'_1, x'_2 \right\}$ , 其中  $(y'_i, x'_1, x'_2)$  分别代表的是  $y_i, x_1, x_2$  的一个外部邻域。注意:  $x_1$  和

$x_2$  之间路的长度可能是 1, 假设  $P^{\frac{3n-7}{2}}$  的长度为 1, 那么我们就令  $y_{\frac{3n-7}{2}} = x_2$ , 这时  $S_1 = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_{\frac{3n-7}{2}}, x_1 \right\}$ ,

$S_2 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-7}{2}}, x'_1, x'_2 \right\}$  ( $x'_2$  代表  $x_2$  的第二个外部邻域)。故  $|S_1| = \frac{3n-7}{2} + 1 = \frac{3n-5}{2}$ ,

$|S_2| = \frac{3n-7}{2} + 2 = \frac{3n-3}{2}$ 。这里, 我们一定能够做到让  $|S_2 \cap V(CF_{n-1}^j)| \leq \frac{3n-7}{2}$ , 如果  $|S_2 \cap V(CF_{n-1}^j)| > \frac{3n-7}{2}$

的话, 我们就用  $y_i$  的另外一个外部邻域来代替  $y'_i$ 。又因为  $d_H(x_3) = \frac{3n-3}{2}$ , 由引理 9 可知, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-3}{2}$

条从  $x_3$  到  $S_2$  的内部顶点互不相交的路, 记为  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-3}{2}}$  (这些路的终止端点是  $y'_i, i \in \left[ 1, \frac{3n-7}{2} \right]$ )、

$\overline{Q}^{\frac{3n-5}{2}}$  (终止端点是  $x'_1$ )、 $\overline{Q}^{\frac{3n-3}{2}}$  (终止端点是  $x'_2$  或者  $x''_2$ )。令  $\overline{P}_i = P^i \cup y_i y'_i \cup Q^i \left( i \in \left[ 1, \frac{3n-9}{2} \right] \right)$ ,  
 $\overline{P}_{\frac{3n-7}{2}} = P^{\frac{3n-7}{2}} \cup y_{\frac{3n-7}{2}} y'_{\frac{3n-7}{2}} \cup Q^{\frac{3n-7}{2}}$  或者  $\overline{P}_{\frac{3n-7}{2}} = x_1 x_2 \cup x_2 x'_2 \cup Q^{\frac{3n-7}{2}}$ ,  $\overline{P}_{\frac{3n-5}{2}} = x_1 x'_1 \cup Q^{\frac{3n-5}{2}} \cup Q^{\frac{3n-3}{2}} \cup x_2 x_2$  或者  
 $\overline{P}_{\frac{3n-5}{2}} = x_1 x'_1 \cup Q^{\frac{3n-5}{2}} \cup Q^{\frac{3n-3}{2}} \cup x_2 x_2$ , 那么在  $CF_n$  中就会存在包含  $M$  的  $\frac{3n-5}{2}$  条内部互不相交的树。

当  $n$  为偶数时,  $x_1$  和  $x_2$  在  $CF_{n-1}^1$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条内部顶点互不相交的路, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-6}{2}}$ 。跟上面同样的方法, 我们在  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-6}{2}}$  上各自选择一个点  $y_i \left( i \in \left[ 1, \frac{3n-6}{2} \right] \right)$ 。当  $x_1$  和  $x_2$  之间路的长度为 1 的时候, 假设  $P^{\frac{3n-6}{2}}$  路的长度为 1, 我们就令  $y_{\frac{3n-6}{2}} = x_2$ 。令  $S_1 = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_{\frac{3n-6}{2}}, x_1 \right\}$ ,  $S_2 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-6}{2}} \right\}$ , 其中  $y'_i$  代表了  $y_i$  的外部邻域。令  $H = CF_{n-1}^2 \oplus CF_{n-1}^3 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ , 则  $S_2 \subseteq V(H)$ 。由引理 8 可知,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ , 也就是说,  $H$  是  $\frac{3n-6}{2}$  连通的。由引理 5 可知, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条内部顶点互不相交的  $(x_3, S_2)$ -路, 记为  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-6}{2}}$  (这些路的终端点是  $y'_i$ )。令  $\overline{P}_i = P^i \cup y_i y'_i \cup Q^i$ , 那么在  $CF_n$  就存在包含  $M$  的  $\frac{3n-6}{2}$  条内部互不相交的树。

**情况 2.2:**  $x_3$  的一个外部邻域属于  $CF_{n-1}^1$ 。

不失一般性, 我们假设  $x_3^+ \in V(CF_{n-1}^1)$ 。由于  $CF_{n-1}^1$  是连通的, 所以  $x_1$  和  $x_3^+$  之间存在一条路  $\overline{P}$ 。又因为  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数),  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数), 则  $x_1$  和  $x_2$  在  $CF_{n-1}^1$  中一定存在  $\frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数) 条内部顶点互不相交的路, 记为  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-7}{2}}$  ( $n$  为奇数),  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-6}{2}}$  ( $n$  为偶数)。由于  $x_1$  在  $CF_{n-1}^1$  中的度为  $\frac{3n-7}{2}$  ( $n$  为奇数) 和  $\frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数),  $\overline{P}$  和  $P^i$  一定会相交, 现在令  $v$  是  $\overline{P} \cap P^i$  的第一个点, 假设  $v \in V\left(P^{\frac{3n-7}{2}}\right)$  ( $n$  为奇数),  $v \in V\left(P^{\frac{3n-6}{2}}\right)$  ( $n$  为偶数), 那么令  
 $\overline{P}_{\frac{3n-5}{2}} = P^{\frac{3n-7}{2}} \cup \overline{P}[v, x_3^+] \cup x_3^+ x_3$  ( $n$  为奇数),  $\overline{P}_{\frac{3n-6}{2}} = P^{\frac{3n-6}{2}} \cup \overline{P}[v, x_3^+] \cup x_3^+ x_3$  ( $n$  为偶数), 则  $\overline{P}_{\frac{3n-5}{2}}$  和  $\overline{P}_{\frac{3n-6}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $M$  的一棵树。

令  $H = CF_{n-1}^2 \oplus CF_{n-1}^3 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ 。跟情况 2.1 的方法相同, 我们在  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-9}{2}}$  ( $n$  为奇数),  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-8}{2}}$  ( $n$  为偶数) 上各自选择一个点  $y_i$ 。如果没有路  $P^i$  的长度为 1, 就令  $S_1 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-9}{2}}, x'_1, x'_2 \right\}$  ( $n$  为奇数),  $S_1 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-8}{2}}, x'_2 \right\}$  ( $n$  为偶数); 如果存在一条路的长度为 1 (图中画红线的部分), 不失一般性, 我们假设  $P^1$  的长度为 1, 即  $y_1 = x_1$ , 则令  $S_1 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-9}{2}}, x''_1, x'_2 \right\}$  ( $n$  为奇数) 和  $S_1 = \left\{ y'_1, y'_2, \dots, y'_{\frac{3n-8}{2}}, x'_2 \right\}$  ( $n$  为偶数), 其中  $y'_i$  是  $y_i$  的外部邻域,  $x''_1$  是  $x_1$  的第二个外部邻域,  $x'_2$  是  $x_2$  的外

部邻域。则  $S_1 \subseteq V(H)$  且  $|S_1| = \frac{3n-9}{2} + 2 = \frac{3n-5}{2}$  ( $n$  为奇数),  $|S_1| = \frac{3n-8}{2} + 1 = \frac{3n-6}{2}$  ( $n$  为偶数)。

当  $n$  为奇数时, 由于  $d_H(x_3) = \frac{3n-3}{2} - 1 = \frac{3n-5}{2}$ 、 $|S_1| = \frac{3n-5}{2}$ 、 $|S_1 \cap V(CF_{n-1}^i)| \leq \frac{3n-7}{2}$  ( $i \in [2, n]$ ), 如果  $|S_1 \cap V(CF_{n-1}^i)| > \frac{3n-7}{2}$ , 我们就用  $y_i$  的另外一个外部邻域来代替  $y'_i$ 。所以由引理 9 可知: 在  $H$  中,  $x_3$  和  $S_1$  之间存在  $\frac{3n-5}{2}$  条内部顶点互不相交的路, 记为:  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-5}{2}}$ , 其中  $Q^i$  的终止端点是  $y'_i$  ( $i \in [1, \frac{3n-9}{2}]$ ),  $Q^{\frac{3n-7}{2}}$  的终止端点是  $x'_1$  或者  $x''_1$ ,  $Q^{\frac{3n-5}{2}}$  的终端点是  $x'_2$ 。令  $\bar{P}_i = P^i \cup y_i y'_i \cup Q^i$  ( $i \in [2, \frac{3n-9}{2}]$ ),  $\bar{P}_1 = P^1 \cup y_1 y'_1 \cup Q^1$  或者  $\bar{P}_1 = x_1 x_2 \cup x_1 x'_1 \cup Q^1$ ,  $\bar{P}_{\frac{3n-7}{2}} = x_1 x'_1 \cup Q^{\frac{3n-7}{2}} \cup Q^{\frac{3n-5}{2}} \cup x'_2 x_2$  或者  $\bar{P}_{\frac{3n-7}{2}} = x_1 x''_1 \cup Q^{\frac{3n-7}{2}} \cup Q^{\frac{3n-5}{2}} \cup x'_2 x_2$ , 那么  $\bar{P}_i$  ( $i \in [1, \frac{3n-7}{2}]$ ) 是  $CF_n$  中包含  $M$  的  $\frac{3n-7}{2}$  条内部互不相交的树。故当  $n$  为奇数时,  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-5}{2}$  条内部互不相交的树。

当  $n$  为偶数时, 由引理 8 可知,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ 、 $|S_1| = \frac{3n-6}{2}$ , 由引理 5 可知: 在  $H$  中,  $x_3$  和  $S_1$  之间存在  $\frac{3n-6}{2}$  条内部顶点互不相交的路, 记为:  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-6}{2}}$ , 其中  $Q^i$  的终止端点是  $y'_i$  ( $i \in [1, \frac{3n-8}{2}]$ ),  $Q^{\frac{3n-6}{2}}$  的终止端点是  $x'_2$ 。令  $\bar{P}_i = P^i \cup y_i y'_i \cup Q^i$  ( $i \in [1, \frac{3n-8}{2}]$ ), 那么  $\bar{P}_i$  ( $i \in [1, \frac{3n-8}{2}]$ ) 是  $CF_n$  中包含  $M$  的  $\frac{3n-8}{2}$  条内部互不相交的树。故当  $n$  为偶数时,  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-8}{2}$  条内部互不相交的树。

**情况 3:**  $x_1, x_2, x_3$  分别属于三个不同的子图  $CF_{n-1}^i$ 、 $CF_{n-1}^j$ 、 $CF_{n-1}^k$  ( $i, j, k$  是互不相同的)。

不失一般性, 我们假设  $x_1 \in V(CF_{n-1}^1)$ ,  $x_2 \in V(CF_{n-1}^2)$ ,  $x_3 \in V(CF_{n-1}^3)$ , 下面我们分奇数和偶数进行讨论。

当  $n$  为偶数时, 令  $x_1 = i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 1$ ,  $H = CF_{n-1}^3 \oplus \cdots \oplus CF_{n-1}^n$ , 则  $x_1^+ \in V(CF_{n-1}^2)$  或者  $x_1^+ \in V(H)$ 。设  $x_1$  的内部邻域分别为:  $a_{i-1} = x_1(i_1)$  ( $i \in [2, n-1]$ ),  $b_{n-1} = x_1(23)$ ,  $b_n = x_1(45)$ ,  $b_{n+1} = x_1(67)$ ,  $\dots$ ,  $b_{\frac{3n-6}{2}} = x_1((n-2)(n-1))$ 。

1)  $x_1^+ \in V(H)$ 。这种情况下,  $i_1 \neq 2$ , 且  $i_2, i_3, \dots, i_{n-1}$  中最多只有一个为 2, 我们假设  $i_2 = 2$ , 则  $x_1 = i_1 2 \cdots i_{n-1} 1$ ,  $a_1 = 2i_1 \cdots i_{n-1} 1$ ,  $b_{n-1} = i_1 i_3 2 i_4 i_5 \cdots i_{n-1} 1$ 。现在在  $CF_{n-1}^1$  中选择以  $x_1$  为起点的  $\frac{3n-6}{2}$  条路, 取法如下: 当  $i=1$  时, 令  $P_1^1 = x_1 a_1$ ; 当  $i \in [2, n-2]$  时, 令  $P_i^1 = x_1 a_i u_i$ , 其中  $u_i = a_i(12)$ ; 当  $i = n-1$  时, 令  $P_{n-1}^1 = x_1 b_{n-1} v u_{n-1}$ , 其中  $v = b_{n-1}(45)$ ,  $u_{n-1} = v(13)$ ; 当  $i \in [n, \frac{3n-6}{2}]$  时, 令  $P_i^1 = x_1 b_i u_i$ , 其中  $u_i = b_i(12)$ 。

则  $u_i^+ \in V(CF_{n-1}^2)$ , 且  $u_i$  都是互不相同的,  $P_i^1$  是内部顶点互不相交的路。令  $U_1 = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-6}{2}} \right\}$ ,

$U_2 = \left\{ u_1^+, u_2^+, \dots, u_{\frac{3n-6}{2}}^+ \right\}$ , 则  $U_2 \subseteq V(CF_{n-1}^2)$ 。若  $x_2 \in U_2$ , 假设  $x_2 = u_1^+$ , 我们在  $CF_{n-1}^2 \setminus U_2$  中任意选一个顶点

$w$ , 令  $U' = \left\{ u_2^+, \dots, u_{\frac{3n-6}{2}}^+, w \right\}$ , 则  $|U_2| = |U'| = \frac{3n-6}{2}$ 。由于  $\kappa(CF_{n-1}^2) = \frac{3n-6}{2}$ ,  $U_2 \subseteq V(CF_{n-1}^2) \setminus \{x_2\}$

$(U' \subseteq V(CF_{n-1}^2) \setminus \{x_2\})$ , 由引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^2$  中, 存在  $\frac{3n-6}{2}$  条由  $x_2$  到  $U_2$  或者  $U'$  的内部顶点互不相交的路, 且这些路的终止端点在  $U_2$  或者  $U'$  中是互不相同的, 记为:  $P_1^2, P_2^2, \dots, P_{\frac{3n-6}{2}}^2$ 。令  $\bar{P}_i = P_i^1 \cup u_i u_i^+ \cup P_i^2$ 。

现在我们在  $CF_{n-1}^1$  取  $\frac{3n-6}{2}$  点, 取法如下: 当  $i=1$  时, 令  $w_1 = a_1(13)$ ; 当  $i \in [2, \frac{3n-6}{2}]$  时, 令  $w_i = a_i$  或  $b_i$ 。

则  $\{w_i\} \cap V(P_i^1) = \emptyset$ , 且  $w_i^+ \in V(H)$ 。令  $W = \left\{ w_1^+, w_2^+, \dots, w_{\frac{3n-6}{2}}^+ \right\}$ , 则  $W \subseteq V(H)$ , 且  $|W| = \frac{3n-6}{2}$ 。

当  $x_3^+$  不属于  $CF_{n-1}^1$  时,  $W \subseteq V(H) \setminus \{x_3\}$ , 且  $|W| = \frac{3n-6}{2}$ 。由引理 8 可知,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ 。又由引理 5 可知, 在  $H$  中存在一个由  $x_3$  到  $W$  的  $\frac{3n-6}{2}$ -扇形, 记为:  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-6}{2}}$ 。当  $i=1$  时, 令  $T_1 = \bar{P}_1 \cup a_1 w_1 \cup w_1 w_1^+ \cup Q^1$ ; 当  $i \in [2, \frac{3n-6}{2}]$  时, 令  $T_i = \bar{P}_i \cup w_i w_i^+ \cup Q^i$ , 则在  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-6}{2}$  条内部互不相交的树。

当  $x_3^+$  属于  $CF_{n-1}^1$  时, 由于  $CF_{n-1}^1$  是连通的, 所以在  $CF_{n-1}^1$  中存在一条由  $x_1$  到  $x_3^+$  的路, 记为  $\bar{P}$ 。由于  $d_{CF_{n-1}^1}(x_1) = \frac{3n-6}{2}$ , 所以  $\bar{P}$  和  $P_i^1$  一定会有交点, 假设  $\bar{P}$  和  $P_{\frac{3n-6}{2}}^1$  相交, 设  $\bar{P} \cap P_{\frac{3n-6}{2}}^1$  的第一个点为  $t$ , 令  $T_{\frac{3n-6}{2}} = \overline{P_{\frac{3n-6}{2}}^1} \cup \bar{P}[t, x_3^+] \cup x_3^+ x_3$ , 则  $T_{\frac{3n-6}{2}}$  是  $CF_n$  中包含  $M$  的一棵树。现在令  $W' = \left\{ w_1^+, w_2^+, \dots, w_{\frac{3n-6}{2}}^+, w \right\}$ , 其中  $w$  是  $V(H) \setminus W$  中的任意一个顶点, 则  $W' \subseteq V(H) \setminus \{x_3\}$ , 且  $|W'| = \frac{3n-6}{2}$ 。由引理 8 可知,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ , 再由引理 5 可知, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-6}{2}$  条由  $x_3$  到  $W'$  的内部顶点互不相交的路, 且路的端点在  $W'$  中是互不相同的, 记为:  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-6}{2}}$ , 其中  $Q^i$  的终止端点为  $w_i^+ \left( i \in [1, \frac{3n-6}{2}] \right)$ 。当  $i=1$  时, 令

$T_1 = \bar{P}_1 \cup a_1 w_1 \cup w_1 w_1^+ \cup Q^1$ ; 当  $i \in [2, \frac{3n-6}{2}]$  时, 令  $T_i = \bar{P}_i \cup w_i w_i^+ \cup Q^i$ , 则在  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-6}{2}$  条内部互不相交的树。

2)  $x_1^+ \in V(CF_{n-1}^2)$  且  $x_2^+ \in V(CF_{n-1}^2)$ 。这种情况下,  $i_1 = 2$ , 故  $x_1 = 2i_2 i_3 \dots i_{n-1} 1$ 。当  $i \in [1, n-4]$  时, 令  $P_i^1 = x_1 w_{i+1} w_{i+2} \dots w_{n-1}$ , 其中  $w_k = w_{k-1}(1k)$ ,  $w_{i+1} = a_1$ ; 当  $i = n-3$  时, 令  $P_{n-3}^1 = x_1 a_{n-3} w_{n-1} v_1 v_2$ , 其中  $w_{n-1} = a_{n-3}(1(n-1))$ ,  $v_1 = w_{n-1}(12)$ ,  $v_2 = v_1(1(n-2))$ ; 当  $i = n-2$  时, 令  $P_{n-2}^1 = x_1 a_{n-2} b_1 b_2$ , 其中  $b_1 = a_{n-2}(14)$ ,  $b_2 = b_1(1(n-1))$ ; 当  $i \in [n-1, \frac{3n-6}{2}]$  时, 令  $P_i^1 = x_1 b_i$ 。当  $i \in [1, n-4]$  时, 令  $u_i = w_{n-1}(1(i+1))$ ; 当  $i = n-3$  时, 令  $u_i = v_2$ ; 当  $i = n-2$  时, 令  $u_i = b_2$ ; 当  $i \in [n-1, \frac{3n-6}{2}]$  时, 令  $u_i = b_i$ 。最后, 我们令  $U_1 = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-6}{2}} \right\}$ ,

令  $U_2 = \left\{ u_1^+, u_2^+, \dots, u_{\frac{3n-6}{2}}^+ \right\}$ 。则  $P_i^1$  是由  $x_1$  到  $U_1$  的一个  $\frac{3n-6}{2}$ -扇形, 且  $U_2 \subseteq V(CF_{n-1}^2)$ 。跟第一种情况一样,

当  $x_2 \in U_2$  时, 假设  $x_2 = u_1^+$ , 令  $U' = (U_2 \setminus \{u_1^+\}) \cup \{w\}$ , 其中  $w$  是  $V(CF_{n-1}^2) \setminus U_2$  中的任意一个顶点, 则  $|U'| = \frac{3n-6}{2}$  或者  $|U_2| = \frac{3n-6}{2}$  ( $x_2 \notin U_2$ )。根据引理 5 可知, 在  $CF_{n-1}^2$  中存在一个由  $x_2$  到  $U'$  或者  $U_2$  的  $\frac{3n-6}{2}$ -扇形, 记为:  $P_i^2$ 。令  $\bar{P}_i = P_i^1 \cup u_i u_i^+ \cup P_i^2$ 。现在我们在  $CF_{n-1}^1$  中取  $\frac{3n-6}{2}$  个点, 取法如下: 当  $i \in [1, n-2]$  时,



令  $w_i = a_i$ ; 当  $i \in \left[ n-1, \frac{3n-6}{2} \right]$  时, 令  $w_{n-1} = b_{n-1}$  (13),  $w_n = b_n$  (15),  $w_{n+1} = b_{n+1}$  (17),  $\dots$  则  $w_i^+ \in V(H)$  ( $i \in \left[ 1, \frac{3n-6}{2} \right]$ ), 且当  $i \in \left[ n-1, \frac{3n-6}{2} \right]$  时,  $w_i \cap V(P_i^1) = \emptyset$ . 令  $W = \left\{ w_1^+, w_2^+, \dots, w_{\frac{3n-6}{2}}^+ \right\}$ , 则  $|W| = \frac{3n-6}{2}$ . 当  $x_3 \in V(W)$  时, 也就是说  $x_3^+ \in V(CF_{n-1}^1)$  时, 我们按照同样的方法在  $CF_{n-1}^2$  中取点, 就可以使得  $x_3 \notin V(W)$ , 所以在这里不考虑  $x_3 \in V(W)$  的情况, 只设  $x_3 \notin V(W)$ . 由引理 8 可知,  $\kappa(H) \geq \frac{3n-6}{2}$ , 再由引理 5 可知, 在  $H$  中存在一个由  $x_3$  到  $W$  的  $\frac{3n-6}{2}$ -扇形, 记为:  $Q^i$ , 其中  $i \in \left[ 1, \frac{3n-6}{2} \right]$ . 所以, 当  $i \in [1, n-2]$  时, 令  $T_i = \bar{P}_i \cup w_i w_i^+ \cup Q^i$ ; 当  $i \in \left[ n-1, \frac{3n-6}{2} \right]$  时, 令  $T_i = \bar{P}_i \cup b_i w_i \cup w_i w_i^+ \cup Q^i$ , 则  $T_i$  是  $CF_n$  中包含  $M$  的  $\frac{3n-6}{2}$  棵内部互不相交的树.

当  $n$  为奇数时, 由  $CF_n$  的定义可知, 每一个顶点都有两个外部邻域, 所以我们令  $A = \{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-\}$ , 考虑以下三种情况:

**情况 3.1:**  $A \subseteq V(CF_{n-1}^1) \cup V(CF_{n-1}^2) \cup V(CF_{n-1}^3)$ .

令  $H = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2$ , 则  $d_H(x_1) = d_H(x_2) = \frac{3n-5}{2}$ . 由引理 10 可知, 在  $H$  中存在  $\frac{3n-5}{2}$  条由  $x_1$  到  $x_2$  的内部顶点互不相交的路, 记为:  $P^1, P^2, \dots, P^{\frac{3n-5}{2}}$ . 设  $x_3'$  是  $x_3$  的一个外部邻域, 则  $x_3' \in V(H)$ . 又因为  $H$  是连通的, 所以在  $H$  中存在一条从  $x_1$  到  $x_3'$  的路, 记为:  $\bar{P}$ . 由于  $d_H(x_1) = \frac{3n-5}{2}$ , 我们设  $t$  是  $\bar{P} \cap P^k$  ( $k \in \left[ 1, \frac{3n-5}{2} \right]$ ) 的第一个点, 不失一般性, 我们假设  $t \in P^{\frac{3n-5}{2}}$ . 很显然,  $P^{\frac{3n-5}{2}} \cup \bar{P}[x_3', t] \cup x_3 x_3'$  是  $CF_n$  中包含  $M$  的一棵树, 记为  $T_{\frac{3n-5}{2}}$ . 令  $u_i \in V(P^i) \cap N_H(x_1)$  ( $i \in \left[ 1, \frac{3n-7}{2} \right]$ ). 如果  $x_1$  的外部邻域不属于  $u_i$ , 我们就令  $X = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ ; 如果  $x_1$  的外部邻域属于  $u_i$ , 假设  $u_1$  是  $x_1$  的外部邻域, 我们就令  $X = \left\{ x_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ . 故:  $X \subseteq V(CF_{n-1}^1)$ ,  $|X| = \frac{3n-7}{2}$ . 令  $H' = CF_{n-1}^3 \oplus CF_{n-1}^4 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ ,  $u_i'$  是  $u_i$  的外部邻域, 且满足  $u_i' \in V(H')$ .

如果  $X = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ , 令  $X' = \left\{ u_1', u_2', \dots, u_{\frac{3n-7}{2}}' \right\}$ , 那么  $|X'| = \frac{3n-7}{2}$ . 另外,  $d_{H'}(x_3) = \frac{3n-7}{2}$ . 当  $x_3 \notin V(X')$  时, 由引理 9 可知, 再  $H'$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x_3$  到  $X'$  的内部顶点互不相交的路, 记为:  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-7}{2}}$ , 且这些路的终止端点在  $X'$  中是互不相同的, 令  $T_i = P^i \cup u_i u_i' \cup Q^i$  ( $i \in \left[ 1, \frac{3n-7}{2} \right]$ ), 那么  $T_i$  就是  $CF_n$  中包含  $M$  的内部互不相交的树. 故在  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-5}{2}$  条内部互不相交的树. 当  $x_3 \in V(X')$  时, 我们假设  $u_{\frac{3n-7}{2}}' = x_3$ , 令  $X' = \left\{ u_1', u_2', \dots, u_{\frac{3n-9}{2}}', w \right\}$ , 其中  $w$  是  $H' \setminus \{x_3\}$  中的任意一个点, 则  $|X'| = \frac{3n-7}{2}$ , 同理, 在  $H'$  中存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x_3$  到  $X'$  的内部顶点互不相交的路, 记为:  $Q^1, Q^2, \dots, Q^{\frac{3n-7}{2}}$ ,

且这些路的终止端点在  $X'$  中是互不相同的, 令  $T_i = P^i \cup u_i u'_i \cup Q^i \left( i \in \left[ 1, \frac{3n-9}{2} \right] \right)$ ,  $T_{\frac{3n-7}{2}} = P^{\frac{3n-7}{2}} \cup u_{\frac{3n-7}{2}} x_3$ , 那么  $T_i$  就是  $CF_n$  中包含  $M$  的内部互不相交的树。故结论成立。

如果  $X = \left\{ x_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ , 令  $X' = \left\{ x'_1, u'_2, \dots, u'_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ 。跟上面的讨论方法相同, 我们可以在  $CF_n$  中找到  $\frac{3n-5}{2}$  条包含  $M$  的内部互不相交的树。

**情况 3.2:**  $x_3$  的外部邻域至少有一个不属于  $V(CF_{n-1}^1) \cup V(CF_{n-1}^2)$ 。

令  $H = CF_{n-1}^1 \oplus CF_{n-1}^2$ ,  $H' = CF_{n-1}^3 \oplus CF_{n-1}^4 \oplus \dots \oplus CF_{n-1}^n$ 。在  $V(CF_{n-1}^1) \setminus \{x_1\}$  中选择  $\frac{3(n-1)-4}{2} = \frac{3n-7}{2}$  个不同的点  $u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}}$ , 使得  $u_i$  的一个外部邻域在  $V(CF_{n-1}^2) \setminus \{x_2\}$  中, 同时, 要保证  $u_i$  和  $x_3$  有不同的外部邻域。因为  $2(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2} + 2 + 1 (n \geq 5)$ , 所以我们是能够选出这么多个点的。令  $S = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ ,

$S' = \left\{ u'_1, u'_2, \dots, u'_{\frac{3n-7}{2}} \right\}$ , 由引理 6 可知,  $\kappa(CF_{n-1}^1) = \kappa(CF_{n-1}^2) = \frac{3n-7}{2}$ , 所以在  $CF_{n-1}^1$  中, 存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x_1$  到  $S$  的内部顶点互不相交的路; 在  $CF_{n-1}^2$  中, 存在  $\frac{3n-7}{2}$  条由  $x_2$  到  $S'$  的内部顶点互不相交的路。令  $x_1'', x_2''$  是  $x_1, x_2$  在  $H'$  中的外部邻域,  $u_i''$  是  $u_i$  在  $H'$  中的外部邻域。令  $A = \left\{ u_1'', u_2'', \dots, u_{\frac{3n-7}{2}}'', x_1'', x_2'' \right\}$ , 那么  $A \subseteq V(H')$ ,

且  $|A| > \frac{3n-7}{2} + 1 = \frac{3n-5}{2}$ , 当  $x_1'' \neq x_2''$  时,  $|A| = \frac{3n-3}{2}$ ; 当  $x_1'' = x_2''$  时,  $|A| = \frac{3n-5}{2}$ 。

**子情况 3.2.1:**  $x_3$  的两个外部邻域都不属于  $V(CF_{n-1}^1) \cup V(CF_{n-1}^2)$ 。

这种情况下,  $d_{H'}(x_3) = \frac{3n-3}{2}$ 。如果  $|A| = \frac{3n-3}{2}$ , 那么这个证明过程和情况 2.1 相类似。如果  $|A| = \frac{3n-5}{2}$ , 那么这个证明过程和情况 2.1 相类似, 除了  $T_{\frac{3n-5}{2}} = x_1 x_1'' \cup x_2 x_2'' \cup Q^{\frac{3n-5}{2}}$ 。

**子情况 3.2.2:**  $x_3$  的两个外部邻域中有一个属于  $V(CF_{n-1}^1) \cup V(CF_{n-1}^2)$ 。

这种情况下,  $d_{H'}(x_3) = \frac{3n-5}{2}$ 。如果  $|A| = \frac{3n-3}{2}$ , 那么这个证明过程和情况 2.2 相类似。如果  $|A| = \frac{3n-5}{2}$ , 那么这个证明过程和情况 2.2 相类似, 除了  $T_{\frac{3n-5}{2}} = x_1 x_1'' \cup x_2 x_2'' \cup Q^{\frac{3n-3}{2}}$ 。

综上所述, 当  $n$  为奇数时,  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-5}{2}$  条内部互不相交的树; 当  $n$  为偶数时, 在  $CF_n$  中存在包含  $M$  的  $\frac{3n-6}{2}$  条内部互不相交的树。故定理得证。

#### 4. 结论

广义  $k$ -连通度是传统连通度的一个自然推广, 它可以用来测量一个图  $G$  连接任意  $k$  个顶点的能力, 当  $k=2$  时, 广义 2-连通度和传统的连通度是一样的。在这篇文章中, 我们主要研究一类 Cayley 图: 叶形图的广义 3-连通度, 证明了: 当  $n$  为大于等于 3 的奇数时,  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-5}{2}$ ; 当  $n$  为大于等于 4 的偶数时,  $\kappa_3(CF_n) = \frac{3n-6}{2}$ 。到目前为止, 关于广义  $k$ -连通度的研究大多数都是  $k=2$  的, 对  $k \geq 4$  的广义  $k$ -

连通度的研究是非常少的, 所以对于  $k \geq 4$  的  $\kappa_k(CF_n)$  的研究是非常有意义的。

## 致 谢

本篇论文主要证明了叶形图的广义连通性, 是在我的导师王世英老师以及正在读博的师姐赵丽娜的帮助下完成的。我要特别感谢我的导师, 本文题目的选定、证明过程的书写、判断结论是否正确无不包含老师的心血。王老师严谨治学的态度、为人师的人格风范、渊博的知识使我受益终身。这篇论文是我研究生的第一篇论文, 在写作时有很多不明白的地方, 我非常感谢我的师姐们给予我的帮助, 让我可以顺利完成这篇论文。在此, 我向王世英老师以及我的各位师姐们表示深深的感谢!

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目(61772010), 山西省基础研究计划(202203021221128)。

## 参考文献

- [1] Li, S.S. and Li, X.L. (2012) Note on the Hardness of Generalized Connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, **24**, 389-396. <https://doi.org/10.1007/s10878-011-9399-x>
- [2] Li, S.S. Li, W. and Li, X.L. (2012) The Generalized Connectivity of Complete Bipartite Graphs. *Ars Combinatorics*, **104**, 65-79.
- [3] Li, S.S. Li, W. and Li, X.L. (2014) The Generalized Connectivity of Complete Equipartition 3-Partite Graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **37**, 103-121.
- [4] Li, H.Z., Li, X.L., Mao, Y.P. and Sun, Y.F. (2014) Note on the Generalized Connectivity. *Ars Combinatoria*, **114**, 193-202.
- [5] Li, S.S., Li, X.L. and Shi, Y.T. (2011) The Minimal Size of a Graph with Generalized Connectivity  $\kappa_3 = 2$ . *Australasian Journal of Combinatorics*, **51**, 209-220.
- [6] Li, H.Z., Li, X.L. and Sun, Y.F. (2012) The Generalized 3-Connectivity of Cartesian Product Graphs. *Discrete Mathematics Theoretical Computer Science*, **14**, 43-54. <https://doi.org/10.46298/dmtcs.572>
- [7] Li, S.S., Li, X.L. and Zhou, W.L. (2010) Sharp Bounds for the Generalized Connectivity  $\kappa_3(G)$ . *Discrete Mathematics*, **310**, 2147-2163. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.04.011>
- [8] Chartrand, G., Okamoto, F. and Zhang, P. (2010) Rainbow Trees in Graphs and Generalized Connectivity. *Networks*, **55**, 360-367. <https://doi.org/10.1002/net.20339>
- [9] Li, H.Z., Ma, Y.B., Yang, W.H. and Wang, Y.F. (2017) The Generalized 3-Connectivity of Graph Products. *Applied Mathematics and Computation*, **295**, 77-83. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.10.002>
- [10] Li, S.S., Tu, J.H. and Yu, C.Y. (2016) The Generalized 3-Connectivity of Star Graphs and Bubble-Sort Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **274**, 41-46. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.016>
- [11] Li, S.S., Shi, Y.T. and Tu, J.H. (2017) The Generalized 3-Connectivity of Cayley Graphs on Symmetric Groups Generated by Trees and Cycles. *Graphs and Combinatorics*, **33**, 1195-1209. <https://doi.org/10.1007/s00373-017-1837-9>
- [12] Zhao, S.L. and Hao, R.X. (2019) The Generalized Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **30**, 793-809. <https://doi.org/10.1142/S0129054119500229>
- [13] Lin, S.W. and Zhang, Q.H. (2017) The Generalized 4-Connectivity of Hypercubes. *Discrete Applied Mathematics*, **220**, 60-67. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.12.003>
- [14] Zhao, S.L., Hao, R.X. and Cheng, E. (2018) Two Kinds of Generalized Connectivity of Dual Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **257**, 306-316. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.09.025>
- [15] Wang, S.Y., Wang, Y.L. and Wang, M. (2019) Connectivity and Matching Preclusion for Leaf-Sort Graphs. *Journal of Interconnection Networks*, **19**, Article ID: 1940007. <https://doi.org/10.1142/S0219265919400073>
- [16] Bondy, J.A. and Murty, U. (2008) *Graph Theory*. Springer, New York.