Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(7), 3121-3126**
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127311

一类新的伪黎曼可解代数里奇孤立子

黄　浩*，王　辉

南京邮电大学理学院，江苏　南京

收稿日期：2023年6月6日；录用日期：2023年7月1日；发布日期：2023年7月11日

摘　要

里奇孤立子是一类重要的黎曼度量，它是一类重要的哈密尔顿曲率流的解，有重要的几何性质，具有重要的理论研究价值。在本文中，我们研究了在可解连通李群上构造伪黎曼代数里奇孤立子的一般方法，并在可解李群上构造了伪黎曼代数里奇孤立子，给出了它们等距的充分必要条件。

关键词

伪黎曼代数里奇孤立子，可解李群，里奇曲率算子

A New Class of Pseudo-Riemannian Solvable Algebraic Ricci Solitons

Hao Huang*, Hui Wang

School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing Jiangsu

Received: Jun. 6th, 2023; accepted: Jul. 1st, 2023; published: Jul. 11th, 2023

Abstract

Ricci soliton is an important Riemannian metric, which is an important solution of the Hamilton curvature flow. So Ricci soliton has important geometry properties and significant research values. In this paper, we study the generally method of constructing pseudo Riemannian algebraic soliton on solvable connected Lie group, and we get the pseudo Riemannian algebraic soliton. Besides, we give the sufficient and necessary conditions in which two pseudo Riemannian algebraic soliton are isometrical to each other.

*通讯作者。

文章引用: 黄浩, 王辉. 一类新的伪黎曼可解代数里奇孤立子[J]. 应用数学进展, 2023, 12(7): 3121-3126.
DOI: 10.12677/aam.2023.127311

Keywords

Pseudo-Riemannian Algebraic Ricci Soliton, Solvable Lie Group, Ricci Curvature Operator

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

设 (M,g) 为伪黎曼流形。如果存在光滑向量场 X 和实数 $c\in\mathbb{R}$，使得 (M,g) 的里奇曲率张量 $\mathrm{ric}=cg+L_X g$，则称 g 为里奇孤立子。里奇孤立子是一类非常重要的哈密尔顿曲率流的解，也即存在 (M,g) 上的微分同胚 φ_t 和函数 $c(t)$，使得 $g(t)=c(t)\varphi_t^* g, g(0)=g$。

满足哈密尔顿里奇流方程

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t)=-2\mathrm{ric}_{g(t)}.$$

里奇孤立子具有重要的几何性质，类似于 Ricci 曲率定号的流形，也具有特殊的拓扑性质。在黎曼情形，里奇孤立子的很多良好性质已经被研究([1] [2] [3] [4] [5])。例如，在[1]中，J. Lauret 证明了半单李群上的代数里奇孤立子一定是爱因斯坦度量；在幂零(可解)李群的情形，J. Lauret 证明了在等距意义下，幂零(可解)李群上至多存在一个幂零(可解)的孤立子。在伪黎曼的情形，爱因斯坦度量李代数已被广泛研究([6]-[16])。另一方面，非爱因斯坦孤立子却知之甚少，且从已知结果看来，与黎曼情形大相径庭，例如，在三维 Heisenberg 群上，存在三个不等距的左不变 Lorentz 度量，且这三个度量都是里奇孤立子([17] [18])。

在[1]中，J. Lauret 最先研究了幂零连通李群 G 上左不变的黎曼里奇孤立子 h，他证明了此时黎曼里奇孤立子一定是代数里奇孤立子，即存在常数 $c\in\mathbb{R}$ 和李代数 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}G$ 上的导子 $D\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$，使得 (G,h) 的里奇曲率算子 $\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}+D$。同时，他也证明了代数里奇孤立子一定是里奇孤立子。随后，在 2011 年，J. Lauret 研究了可解连通李群 S 上的左不变黎曼代数里奇孤立子的结构([3])。记 s 为 S 的李代数，$\langle\,,\rangle$ 是 S 上的左不变黎曼度量，$n=[s,s]$ 为 s 的幂零根基，$a=n^{\perp}$ 为 n 的正交补，$\forall Y\in a$，记 D_Y 为 $\mathrm{ad}(Y)$ 的对称部分，

$$D_Y=\frac{\mathrm{ad}(Y)+\mathrm{ad}(Y)^*}{2}.$$

S_Y 为 $\mathrm{ad}(Y)$ 的反对称部分，

$$S_Y=\frac{\mathrm{ad}(Y)-\mathrm{ad}(Y)^*}{2}.$$

定理 1 ([3]) $(S,\langle\,,\rangle)$ 是代数里奇孤立子 $\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}+D$ 当且仅当 $(S,\langle\,,\rangle)$ 满足以下条件：

i) $\{D_Y,S_Y \mid Y\in a\}$ 是 S 上的一族交换导子，且 $D_Y(a)=S_Y(a)=0$；

ii) $\langle A,A\rangle=-\frac{1}{c}\mathrm{trace}(D_A)^2$，$\forall A\in a$；

iii) $\langle\,,\rangle_0=\langle\,,\rangle_{n\times n}$ 是 n 上的代数里奇孤立子，即它的里奇曲率算子 $\mathrm{Ric}_0=c\mathrm{Id}+D_0$，其中 $D_0\in\mathrm{Der}(n)$。

特别地，如果存在 $Y\in a$，使得 $D_0=D_Y|_n$，则 $\langle\,,\rangle$ 是 S 上爱因斯坦度量，$\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}$。

2014 年，K. Onda ([19])研究了伪黎曼代数里奇孤立子，并证明伪黎曼代数里奇孤立子一定是里奇孤立子。2021 年，Z. Yan 和 S. Deng ([20])研究了幂零李群上洛伦兹代数里奇孤立子的结构，并给出了中心退化时的完整刻画。事实证明，李代数对研究流形的几何性质有很大的帮助。本文主要是根据定理 1 的结论，构造一类新的伪黎曼代数里奇孤立子。

符号如上，记 $\left(n,\langle\,,\rangle_0\right)$ 为黎曼代数里奇孤立子，由参考文献[21]知，存在常数 $k\in\mathbb{R}$，使得 kD_0 的特征值均为正整数，且无公共因子。设 $n=n_1\oplus n_2\oplus\cdots\oplus n_p$ 是 kD_0 的特征子空间分解，这里 n_i 的下标 i 表示相应的特征值。我们允许某些特征子空间 n_i 为零。由 n 的李括号性质可知 $\left[n_i,n_j\right]\subseteq n_{i+j}$，其中 $1\le i,j\le p,i+j\le p$，$\Lambda=\left\{\left(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_p\right)\middle\|\delta_i\right|=1\}$，且当 $i+j=k,\left[n_i,n_j\right]\ne 0$ 时，$\delta_i\delta_j\delta_k=1$。注意到 $(1,1,\cdots,1)\in\Lambda,\left((-1)^1,(-1)^2,\cdots,(-1)^p\right)\in\Lambda$，定义 S 上的左不变黎曼度量 $\langle\,,\rangle_\delta\,(\delta\in\Lambda)$ 为：

$$\langle\,,\rangle_\delta\big|_{a\times a}=\langle\,,\rangle\big|_{a\times a},\langle a,n\rangle_\delta=0,$$

$$\langle\,,\rangle_\delta\big|_{n\times n}=\delta_1\langle\,,\rangle\big|_{n_1\times n_1}+\delta_2\langle\,,\rangle\big|_{n_2\times n_2}+\cdots+\delta_p\langle\,,\rangle\big|_{n_p\times n_p}.$$

在参考文献([22])中，Zhang Hui 和 Yan Zaili 证明了当 $\langle\,,\rangle$ 是爱因斯坦度量时，$\langle\,,\rangle_\delta$ 也是爱因斯坦度量，本文主要证明如下定理：

定理 2 符号如上，对于任意 $\delta\in\Lambda$，$\langle\,,\rangle_\delta$ 都是 S 上的伪黎曼代数里奇孤立子。对于不同的 $\delta\in\Lambda,\delta'\in\Lambda$，$\langle\,,\rangle_\delta$ 和 $\langle\,,\rangle_{\delta'}$ 互不同构。

2. 基本知识

设 G 是一个连通李群，$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}G$ 是其李代数，即所有左不变向量场的集合。记 $\langle\,,\rangle$ 是 G 上左不变伪黎曼度量，∇ 是 $\left(G,\langle\,,\rangle\right)$ 的黎曼联络。对于任意的 $x,y\in\mathfrak{g},u,v,z\in\mathfrak{g}$，有

$$\nabla_x y-\nabla_y x=[x,y],$$

$$\langle\nabla_x y,z\rangle=\frac{1}{2}\left(\langle[x,y],z\rangle-\langle[y,z],x\rangle+\langle[z,x],y\rangle\right)$$

黎曼曲率张量为：

$$R(x,y)z=\left[\nabla_x,\nabla_y\right]z=\nabla_x\nabla_y z-\nabla_y\nabla_x z-\nabla_{[x,y]}z,$$

$(0,2)$-型里奇曲率张量 ric 为

$$\mathrm{ric}(u,v)=\mathrm{trace}\left(x\mapsto R(x,u)v\right).$$

里奇曲率算子 $\mathrm{Ric}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为

$$\langle\mathrm{Ric}(u),v\rangle=\mathrm{ric}(u,v).$$

曲率向量 H 为

$$\langle H,x\rangle=\mathrm{trace}\left(\mathrm{ad}(x)\right).$$

注意到 $\mathfrak{g}$ 是幺模的当且仅当 $H=0$，当且仅当 $\forall x\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{trace}\left(\mathrm{ad}(x)\right)=0$。

引理 1　设 K 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，$\{e_i\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组正交基，即 $\varepsilon_i=\langle e_i,e_i\rangle\in\{-1,1\}$，$\langle e_i,e_j\rangle=0(i\ne j)$，则 $\forall u,v\in\mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{ric}(u,v) &= -\frac{1}{2}K(u,v)-\frac{1}{2}\left(\langle [H,u],v\rangle+\langle u,[H,v]\rangle\right)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_i\langle [u,e_i],[v,e_i]\rangle\varepsilon_i+\frac{1}{4}\sum_{i,j}\langle [e_i,e_j],u\rangle\langle [e_i,e_j],v\rangle\varepsilon_i\varepsilon_j\end{aligned}$$

定义 1 设 $(\mathrm{g}_1,\langle\,,\rangle_1)$ 和 $(\mathrm{g}_2,\langle\,,\rangle_2)$ 是两个度量李代数，

i) 如果存在李代数同构 $\varphi:\mathrm{g}_1\to\mathrm{g}_2$，使得 $\langle x,y\rangle_1=\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle_2$，$\forall x,y\in\mathrm{g}_1$，则称度量李代数 $(\mathrm{g}_1,\langle\,,\rangle_1)$ 和 $(\mathrm{g}_2,\langle\,,\rangle_2)$ 同构。

ii) 如果存在李代数同构 $\varphi:\mathrm{g}_1\to\mathrm{g}_2$ 和常数 $c\neq 0$，使得 $\langle x,y\rangle_1=c\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle_2$，$\forall x,y\in\mathrm{g}_1$，则称在相差一个常数意义下度量李代数 $(\mathrm{g}_1,\langle\,,\rangle_1)$ 和 $(\mathrm{g}_2,\langle\,,\rangle_2)$ 同构。

注意：如果 $(\mathrm{g}_1,\langle\,,\rangle_1)$ 和 $(\mathrm{g}_2,\langle\,,\rangle_2)$ 同构(或在相差一个常数意义下同构)，则它们相应的连通单连通伪黎曼流形 $(G_1,\langle\,,\rangle_1)$ 和 $(G_2,\langle\,,\rangle_2)$ 同构(或相差一个常数意义下同构)。反之一般不对。

定义 2 设 G 是一个连通李群，h 是 G 上一个左不变伪黎曼度量。若 G 的李代数 g 上存在一个导子 $\mathrm{D}\in\mathrm{Der}(\mathrm{g})$ 和常数 $c\in\mathbb{R}$，使得 (G,h) 的里奇曲率算子 $\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}+\mathrm{D}$，则称 h 为代数里奇孤立子。

特别的，若 G 是可解李群(或幂零李群)，则称 h 为可解代数里奇孤立子(或幂零代数里奇孤立子)。J. Lauret 首先研究了黎曼幂零代数里奇孤立子，并证明了以下一些结论：

i) 设 G 是一个幂零李群，h 是一个左不变黎曼度量，则 h 是里奇孤立子当且仅当 h 是代数里奇孤立子；

ii) 在相差一个常数意义下，幂零李群至多存在一个代数里奇孤立子；

iii) 幂零代数里奇孤立子可扩张成为爱因斯坦度量；

iv) 半单李群上的代数里奇孤立子一定是爱因斯坦度量。

3. 定理 2 的证明

为了证明定理 2，我们需要如下引理，其证明可见参考文献([20])。

引理 2 $\forall A\in a$，D_A 是 $\left(n,\langle\,,\rangle_\delta|_{n\times n}\right)$ 的对称导子，S_A 是 $\left(n,\langle\,,\rangle_\delta|_{n\times n}\right)$ 的反对称导子。

引理 3 $\forall A\in a$，在度量 $\langle\,,\rangle_\delta$ 下，伴随矩阵 $(\mathrm{ad}A)^*$ 与 $\delta\in\Lambda$ 的选择无关。

引理 4 $(S,\langle\,,\rangle_\delta)$ 的曲率向量 $H_\delta\in a$，且与 $\delta\in\Lambda$ 的选择无关，即 $\forall\delta\in\Lambda$，$H_\delta=H$，这里 H 为 $(S,\langle\,,\rangle)$ 的曲率向量。

引理 5 $\forall\delta\in\Lambda$，$\left(n,\langle\,,\rangle_\delta|_{n\times n}\right)$ 的里奇曲率算子 $\mathrm{Ric}_\delta|_n=\mathrm{Ric}_0=c\mathrm{Id}+D_0$。

引理 6 $\forall\delta,\delta'\in\Lambda$，$\left(n,\langle\,,\rangle_\delta|_{n\times n}\right)$ 与 $\left(n,\langle\,,\rangle_{\delta'}|_{n\times n}\right)$ 同构当且仅当 $\delta=\delta'$。

有了上述引理，我们便可证明定理 2。

定理 2 的证明：

设 $(S,\langle\,,\rangle)$ 的里奇曲率算子为 $\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}+D$，$(S,\langle\,,\rangle_\delta)$ 的里奇曲率算子为 Ric_δ。我们证明 $\mathrm{Ric}_\delta=\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}+D$，$\forall\delta\in\Lambda$。设 $d_i=\dim n_i,1\le i\le p$，$\{A_s\}\subseteq a$，$\{E_i^j\}_{j=1}^{d_i}\subseteq n_i$ 为 $(S,\langle\,,\rangle)$ 的一组标准正交基。按照 $\langle\,,\rangle_\delta$ 的定义，这组基是 $(S,\langle\,,\rangle_\delta)$ 的标准伪正交基，其中 $\langle E_i^j,E_i^j\rangle_\delta=\delta_i$。由引理 1 知，$\forall A\in a,X\in n$，有：

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{Ric}_\delta(A),A\right\rangle_\delta \\
&=-\frac{1}{2}K(A,A)-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\langle\left[A,E_i^j\right],\left[A,E_i^j\right]\right\rangle_\delta \delta_i \\
&=-\frac{1}{2}K(A,A)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}A\right)^*\circ \mathrm{ad}(A) \\
&=\left\langle \mathrm{Ric}(A),A\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{Ric}_\delta(A),X\right\rangle_\delta &=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\langle\left[A,E_i^j\right],\left[X,E_i^j\right]\right\rangle_\delta \delta_i \\
&=-\frac{1}{2}K(A,A)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}A\right)^*\circ \mathrm{ad}(X) \\
&=\left\langle \mathrm{Ric}(A),X\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{Ric}_\delta(X),X\right\rangle_\delta &=-\frac{1}{2}\sum_{s}\left\langle[X,A_s],[X,A_s]\right\rangle_\delta-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\langle\left[X,E_i^j\right],\left[X,E_i^j\right]\right\rangle_\delta \delta_i \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{s,i,j}\left\langle\left[A_s,E_i^j\right],X\right\rangle_\delta^2 \delta_i+\frac{1}{4}\sum_{i,j,s,t}\left\langle\left[E_i^s,E_j^t\right],X\right\rangle_\delta^2 \delta_i\delta_j-\left\langle[H,X],X\right\rangle_\delta \\
&=-\frac{1}{2}\sum_{s}\left\langle[X,A_s],[X,A_s]\right\rangle_\delta+\frac{1}{2}\sum_{s,i,j}\left\langle\left[A_s,E_i^j\right],X\right\rangle_\delta^2 \delta_i \\
&\quad+\left\langle \mathrm{Ric}_\delta|_n(X),X\right\rangle_\delta-\left\langle[H,X],X\right\rangle_\delta,
\end{aligned}
$$

由引理 2，3，4，5 知， $\forall i\neq j$，

$$
\left\langle \mathrm{Ric}_\delta(n_i),n_j\right\rangle_\delta=0,
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{Ric}_\delta(n_k),n_k\right\rangle_\delta &=-\frac{1}{2}\sum_{s}\left\langle[n_k,A_s],[n_k,A_s]\right\rangle\delta_k+\sum_{s,i,j}\left\langle\left[A_s,E_i^j\right],n_k\right\rangle^2 \delta_k \\
&\quad+\left\langle \mathrm{Ric}_0(n_k),n_k\right\rangle\delta_k-\left\langle[H,n_k],n_k\right\rangle\delta_k \\
&=\left\langle \mathrm{Ric}(n_k),n_k\right\rangle\delta_k,
\end{aligned}
$$

从而 $\mathrm{Ric}_\delta=\mathrm{Ric}=c\mathrm{Id}+D$， $\forall\delta\in\Lambda$， 即 $\left(S,\langle\,,\rangle_\delta\right)$ 是代数里奇孤立子。

最后，假设存在 $\delta,\delta'\in\Lambda$， 使得 $\left(S,\langle\,,\rangle_\delta\right)$ 和 $\left(S,\langle\,,\rangle_{\delta'}\right)$ 同构，从而存在李代数同构 $\varphi:S\to S$， 使得

$$
\langle X,X\rangle_\delta=\langle\varphi(X),\varphi(X)\rangle_{\delta'},\quad \forall X\in S,
$$

由于 $n=[s,s]$,

$$
\varphi(n)=\varphi([s,s])=\left[\varphi(s),\varphi(s)\right]=[s,s]=n,
$$

因此

$$
\varphi|_n:\left(n,\langle\,,\rangle_\delta|_{n\times n}\right)\to\left(n,\langle\,,\rangle_{\delta'}|_{n\times n}\right)
$$

是同构。由引理 6 知， $\delta=\delta'$， 证毕。

4. 结束语

在本文中，我们基于可解李群上代数里奇孤立子的充分必要条件得到了可解连通李群上新的一类伪黎曼代数里奇孤立子，且给出了它们同构的充分必要条件。

基金项目

江苏省自然科学基金——青年科学基金项目(BK20150828)。

参考文献

[1] Lauret, J. (2001) Ricci Soliton Homogeneous Nilmanifolds. *Mathematische Annalen*, **319**, 715-733. https://doi.org/10.1007/PL00004456

[2] Lauret, J. (2002) Finding Einstein Solvmanifolds by a Variational Method. *Mathematische Zeitschrift*, **241**, 83-99. https://doi.org/10.1007/s002090100407

[3] Lauret, J. (2011) Ricci Soliton Solvmanifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **2011**, 1-21. https://doi.org/10.1515/crelle.2011.001

[4] Lauret, J. and Will, C. (2011) Einstein Solvmanifolds: Existence and Non-Existence Questions. *Mathematische Annalen*, **350**, 199-225. https://doi.org/10.1007/s00208-010-0552-0

[5] Nikolayevsky, Y. (2011) Einstein Solvmanifolds and the Pre-Einstein Derivation. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 3935-3958. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05045-2

[6] Bajo, I., Benayadi, S. and Medina, A. (2007) Symplectic Structures on Quadratic Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **316**, 174-188. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.06.001

[7] Barco, V.D. and Ovando, G.P. (2012) Free Nilpotent Lie Algebras Admitting Ad-Invariant Metrics. *Journal of Algebra*, **366**, 205-216. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.05.016

[8] Benayadi, S. and Elduqe, A. (2014) Classification of Quadratic Lie Algebras of Low Dimension. *Journal of Mathematical Physics*, **55**, Article ID: 0811703. https://doi.org/10.1063/1.4890646

[9] Bordemann, M. (1997) Nondegenerate Invariant Bilinear Forms on Nonassociative Algebras. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **66**, 151-201.

[10] Chen, S. and Liang, K. (2012) Left-Invariant Pseudo-Einstein Metrics on Lie Groups. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **19**, 236-246. https://doi.org/10.1142/S1402925112500155

[11] Conti, D. and Rossi, F.A. (2019) Einstein Nilpotent Lie Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **223**, 976-997. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.05.010

[12] Conti, D. and Rossi, F.A. (2019) Ricci-Flat and Einstein Pseudoriemannian Nilmanifolds. *Complex Manifolds*, **6**, 170-193. https://doi.org/10.1515/coma-2019-0010

[13] Derdzinski, A. and Gal, S.R. (2014) Indefinite Einstein Metrics on Simple Lie Group. *Indiana University Mathematics Journal*, **63**, 165-212. https://doi.org/10.1512/iumj.2014.63.5191

[14] Duong, M.T., Pinczon, G. and Ushirobira, R. (2012) A New Invariant of Quadratic Lie Algebras. *Algebras and Representation Theory*, **15**, 1163-1203. https://doi.org/10.1007/s10468-011-9284-4

[15] Favre, G. and Santharoubane, L.J. (1987) Symmetric, Invariant, Non-Degenerate Bilinear Form on a Lie Algebra. *Journal of Algebra*, **105**, 451-464. https://doi.org/10.1016/0021-8693(87)90209-2

[16] Figueroa-O'Farrill, J. and Stanciu, S. (1996) On the Structure of Symmetric Self-Dual Lie Algebras. *Journal of Mathematical Physics*, **37**, 4121-4134. https://doi.org/10.1063/1.531620

[17] Onda, K. (2010) Lorentz Ricci Solitons on 3-Dimensional Lie Groups. *Geometriae Dedicata*, **147**, 313-322. https://doi.org/10.1007/s10711-009-9456-0

[18] Rahmani, S. (1992) Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois [Lorentz Metrics on Three-Dimensional Unimodular Lie Groups]. *Journal of Geometry and Physics*, **9**, 295-302. https://doi.org/10.1016/0393-0440(92)90033-W

[19] Onda, K. (2014) Example of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case. *Acta Mathematica Hungarica*, **144**, 247-265. https://doi.org/10.1007/s10474-014-0426-0

[20] Yan, Z.L. and Deng, S.Q. (2021) Double Extensions on Riemannian Ricci Nilsolitons. *The Journal of Geometric Analysis*, **31**, 9996-10023. https://doi.org/10.1007/s12220-021-00636-x

[21] Heber, J. (1998) Noncompact Homogeneous Einstein Spaces. *Inventiones Mathematicae*, **133**, 279-352. https://doi.org/10.1007/s002220050247

[22] Zhang, H. and Yan, Z.L. (2021) New Pseudo Einstein Metrics on Einstein Solvmanifolds. *Manuscripta Mathematica*, **166**, 427-436. https://doi.org/10.1007/s00229-020-01249-4