Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(7), 3292-3297**
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127328

Hans汉斯

关于Euler方程$\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$的整数解

袁　莎

延安大学数学与计算机科学学院，陕西　延安

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月13日；发布日期：2023年7月24日

摘　要

本文探究Euler函数$\varphi(n)$的非线性方程$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$，其中$a,b,c$为定值，利用初等数论的方法给出$\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$所包含的全部45组解。

关键词

Euler函数方程的可解性，非线性方程，正整数的解

On the Integer Solution of Euler Equation $\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$

Sha Yuan

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Jun. 18th, 2023; accepted: Jul. 13th, 2023; published: Jul. 24th, 2023

Abstract

In this paper, we investigate the nonlinear equations $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ of Euler function $\varphi(n)$, where a,b,c are fixed values, all 45 solutions contained in $\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$ are given by using the method of elementary number theory.

Keywords

Solvability of Euler Function Equation, Nonlinear Equation, Positive Integer Solution

文章引用: 袁莎. 关于 Euler 方程$\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$的整数解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(7): 3292-3297.
DOI: 10.12677/aam.2023.127328

1. 概述

欧拉函数在数论中有着及其广泛的应用。Euler 函数作为初等数论体系中比较重要的一类函数，定义一般为：不大于 n 且同 n 互素的所有正整数的个数。研究数论最基本的工具，则是数论函数，因而进一步加强对数论函数的研究有着特别的意义。

不定方程又称丢番图方程，而有关不定方程解的研究，在数论中也有着非常重要的意义，引起许多学者对此问题的关注，同时取得了一定的研究成果与坚实基础。具体应用到一次不定方程来说，一般形式为 $ax+by=c$，其中 a、b、c 往往也都是个整数，而要求的解 (x,y) 也是整数。这仍是探讨初等数论中一门重要的新课题，虽然早就有了系统、完整可行的数学解法，但对于不同数值的方程的求解计算的量会随着系数增大而日趋复杂。要提醒注意的事情是，c 只能是 a、b 的最大公约数的整数倍。

随着人们对数论函数研究的逐渐深入，发现看起来十分简单的数论函数，但方程的解与解的个数却均无规律可循，若对其进行直接的研究显得较为复杂，因此对其所对应的方程可用类似方法求解。

2. 引言

n 是一正整数，令 $\varphi(n)$ 为一个 Euler 函数。Euler 函数 $\varphi(n)$ 是初等数论中所包含的一类非常重要的函数，有关其方程解的研究方法也是数论研究中一个及其重要的理论部分，对欧拉函数的不断研究，在此也得到了许多的结论，如文献[1]-[7]。

形如

$$\varphi(mn)=k\left(\varphi(m)+\varphi(n)\right) \tag{1}$$

这样的研究。文献[8]讨论出方程(1)式中当 k 为素数时的情形，给出得到了在此 $k=3$ 方程(1)解中的部分解；文献[9]给出得到此方程 $k=3$ 中的全部解；文献[10]管春梅得到了在当 $k=4,6$ 时，此方程式的全部解；文献[11]鲁伟阳给出了 $k=5$ 时，该方程的全部解；文献[12]仅有作者姜友谊获得了包含方程 $\varphi(x)=m$ 的几乎所有的近似解。

对于形如

$$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c \tag{2}$$

的 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程，在文献[13]探究了当 $a=7,b=8,c=16$ 时方程(2)的全部解。本文给出了 $a=3,b=8,c=32$ 的 Euler 函数 $\varphi(n)$ 非线性方程

$$\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32 \tag{3}$$

的整数解。

3. 性质

性质 1 若 $(a,b)\neq c$，则 $ax+by=c$ 无整数解。

性质 2 若 $(a,b)=1$，则 $ax+by=1$ 必有整数解。

性质 3 若 $(a,b)=d$，则 $ax+by=d$ 必有整数解。

性质 4 若 $(a,b)=1$，且 $ax+by=c$ 有一组整数解 (x_0,y_0)。

则所有解为 $\begin{cases} x=x_0+bk \\ y=y_0-ak \end{cases}$ (k 为任意整数)。

4. 相关引理

引理 1 [14]：对任意的正整数 m 与 n，$\varphi(mn)=\dfrac{(m,n)\varphi(n)}{\varphi(m,n)}$。

引理 2 [14] 当 $n\geq 2$ 时，$\varphi(n)\leq n$，当 $n\leq 3$ 时，$\varphi(n)$ 必为偶数。

引理 3 [12] p 为素数，$\varphi(x)=2p$ 的解 x 为：1) 当 $p=2$ 时，$x=5,8,10,12$

2) 当 $p=3$ 时，$x=7,9,14,18$

引理 4 [12] 若 $\varphi(x)=2$，则 $x=3,4,6$

若 $\varphi(x)=2^2$，则 $x=5,8,10,12$

若 $\varphi(x)=2^3$，则 $x=15,16,20,24,30$

若 $\varphi(x)=2^4$，则 $x=17,32,34,40,48,60$

若 $\varphi(x)=2^5$，则 $x=51,64,68,80,96,102,120$

若 $\varphi(x)=2^6$，则 $x=85,128,136,140,160,170,192,204$

引理 5 [14] 1) 当 $n\geq 2$ 时，有 $\varphi(n)\leq n$，当 $n\geq 3$ 时，$\varphi(n)$ 为偶数。

2) 当 $p\geq 5$ 时，$g=2p+1$ 为素数 $\varphi(x)=2p$ 有两个解 $x=g,2g$；$g=2p+1$ 不为素数，$g(x)=2p$ 无整数解。

引理 6 [12]若 $\varphi(x)=12$，则 $x=13,21,26,28,36,42$；

若 $\varphi(x)=48$，则 $x=105,112,135,168,180,210$。

引理 7 [14]对任意正整数 m 与 n，若 $m\mid n$ 则 $\varphi(m)\mid\varphi(n)$。

5. 定理及其证明

定理 1：方程 $\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$ 有正整数解。

$(15,15),(15,16),(15,20),(15,24),(15,30),(16,15),(17,3),(17,4),(17,6),(17,11),(17,22),(20,15),(24,15),$
$(30,15),(32,3),(32,11),(34,3),(34,11),(40,3),(40,11),(48,3),(48,11),(60,3),(60,11),(85,5),(85,8),(85,10),$
$(85,12),(105,3),(105,4),(105,6),(112,3),(128,5),(135,3),(135,4),(135,6),(136,5),(140,5),(160,5),(168,3),$
$(170,5),(180,3),(192,5),(204,5),(210,3)$

共 45 组。

证明：设 $(m,n)=d$，则 $\varphi(m)=m_1\varphi(d),\varphi(n)=n_1\varphi(d)$，其中 $m_1,n_1\in Z^+$，由方程 $\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$ 得 $\varphi(d)(dm_1n_1-3m_1-8n_1)=32$，则 $\varphi(d)=1,2,4,8,16,32$。

情形 1

当 $\varphi(d)=1$，有 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=32$，由 $\varphi(d)=1$ 得 $d=1,2$。

当 $d=1$ 时，$m_1n_1-3m_1-8n_1=32$ 有 $(m_1-8)(n_1-3)=56$ 根据求因式中与反因式中的所有关系，建立关系式，从而得到 $(m_1,n_1)=(9,59),(10,31),(12,17),(15,11),(16,10),(22,7),(36,5),(64,4)$。

因为 $(9,59),(10,31),(12,17),(15,11),(22,7),(36,5)$ 中至少有一个大于 1 的正奇数且与引理 2 矛盾，因此方程无解，所以 $(m_1,n_1)=(16,10),(64,4)$。

当 $(m_1,n_1)=(16,10)$ 时，$\varphi(m)=16,\varphi(n)=10$，此时 $m=17,32,34,40,48,60$；$n=11,22$，则

$(m_1,n_1)=(17,11),(17,22),(32,11),(34,11),(40,11),(48,11),(60,11)$。

当 $(m_1,n_1)=(64,4)$ 时，$\varphi(m)=64,\varphi(n)=4$ 此时 $m=85,128,136,140,160,170,192,204$ $n=5,8,10,12$ 则 $(m_1,n_1)=(85,5),(85,8),(85,10),(85,12),(128,5),(136,5),(140,5),(160,5),(170,5),(192,5),(204,5)$。

当 $d=2$，$2m_1n_1-3m_1-8n_1=32$ 有 $(m_1-4)(2n_1-3)=44$ 从而得到 $(m_1,n_1)=(8,7),(48,2)$ 而当 $(m_1,n_1)=(8,7)$ 时，方程无解。

当 $(m_1,n_1)=(48,2)$，$\varphi(m)=48,\varphi(n)=2$ 此时 $m=105,112,135,168,180,210$，$n=3,4,6$ 则 $(m_1,n_1)=(105,3),(105,4),(105,6),(112,3),(135,3),(135,4),(135,6),(168,3),(180,3),(210,3)$。

情形2

当 $\varphi(d)=2$，有 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=16$，由 $\varphi(d)=2$ 得 $d=3,4,6$。

当 $d=3$ 时，$3m_1n_1-3m_1-8n_1=16$，即有 $(3m_1-8)(n_1-1)=24$，从而有 $(m_1,n_1)=(3,25),(4,7)$，而当 $(m_1,n_1)=(3,25),(4,7)$ 时，此方程无解。

当 $d=4$ 时，$4m_1n_1-3m_1-8n_1=16$，即有 $(m_1-2)(4n_1-3)=22$，从而有 $(m_1,n_1)=(24,1)$。

当 $(m_1,n_1)=(24,1)$ 时，有 $\varphi(m)=48$，$\varphi(n)=2$，则有 $m=105,112,135,168,180,210$ $n=3,4,6$，同上解。

当 $d=6$ 时，$6m_1n_1-3m_1-8n_1=16$，$(3m_1-4)(2n_1-1)=20$，从而有 $(m_1,n_1)=(8,1)$。

当 $(m_1,n_1)=(8,1)$ 时，有 $\varphi(m)=16$，$\varphi(n)=2$，则有 $m=17,32,34,40,48,60$，$n=3,4,6$ 从而有 $(m_1,n_1)=(17,3),(17,4),(17,6),(32,3),(34,3),(40,3),(48,3),(60,3)$。

情形 3

当 $\varphi(d)=4$ 时，$dm_1n_1-3m_1-8n_1=8$，由 $\varphi(d)=4$，得出 $d=5,8,10,12$。

当 $d=5$ 时，$5m_1n_1-3m_1-8n_1=8$，由 $(5m_1-8)(5n_1-3)=64$，从而有 $(m,n)=(2,7),(8,1)$，而当 $(m_1,n_1)=(2,7)$ 时，该方程无解。

当 $(m_1,n_1)=(8,1)$ 时，$\varphi(m)=16,\varphi(n)=2$，同上解。

当 $d=8$ 时，$8m_1n_1-3m_1-8n_1=8$，由 $(m_1-1)(8n_2-3)=11$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

当 $d=10$ 时，$10m_1n_1-3m_1-8n_1=8$，由 $(5m_1-4)(10n_1-3)=52$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

当 $d=12$ 时，$12m_1n_1-3m_1-8n_1=8$，由 $(3m_1-2)(4n_1-1)=10$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

情形4

当 $\varphi(d)=8$，有 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=4$ 由 $\varphi(d)=8$ 可得 $d=15,16,20,24,30$。

当 $d=15$ 时，有 $15m_1n_1-3m_1-8n_1=4$，$(15m_1-8)(5n_1-1)=28$，从而有 $(m_1,n_1)=(1,1)$。

当 $(m_1,n_1)=(1,1)$ 时，有 $\varphi(m)=8,\varphi(n)=8$，则 $m=15,16,20,24,30$，$n=15,16,20,24,30$ 从而有 $(m_1,n_1)=(15,15),(15,16),(15,20),(15,24),(15,30),(16,15),(20,15),(24,15),(30,15)$。

当 $d=16$ 时有 $16m_1n_1-3m_1-8n_1=4$ 即 $(2m_1-1)(16n_1-3)=11$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

当 $d=20$ 时有 $20m_1n_1-3m_1-8n_1=4$ 即 $(5m_1-2)(20n_1-3)=26$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

当 $d=24$ 时有 $24m_1n_1-3m_1-8n_1=4$ 即 $(3m_1-1)(8n_1-1)=5$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

当 $d=30$ 时有 $30m_1n_1-3m_1-8n_1=4$ 即 $(15m_1-4)(10n_1-1)=24$ 通过计算不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，因此方程无解。

情形5

当 $\varphi(d)=16$ 时 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=2$ 由 $\varphi(d)=16$ 可得 $d=17,32,34,40,48,60$。

当 $d=17$ 时有 $17m_1n_1-3m_1-8n_1=2$，即有 $(17m_1-8)(17n_1-3)=58$。

当 $d=32$ 时有 $32m_1n_1-3m_1-8n_1=2$，即有 $(4m_1-1)(32n_1-3)=11$。

当 $d=34$ 时有 $34m_1n_1-3m_1-8n_1=2$，即有 $(17m_1-4)(34n_1-3)=46$。

当 $d=40$ 时有 $40m_1n_1-3m_1-8n_1=2$，即有 $(5m_1-1)(40n_1-3)=13$。

当 $d=48$ 时有 $48m_1n_1-3m_1-8n_1=2$，即有 $(6m_1-1)(16n_1-1)=5$。

当 $d=60$ 时有 $60m_1n_1-3m_1-8n_1=2$，即有 $(15m_1-2)(20n_1-1)=12$。

经计算可得当 $d=17,32,34,40,48,60$ 时，对于方程 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=2$，不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，故方程无解。

情形6

当 $\varphi(d)=32$ 时 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=1$ 由 $\varphi(d)=32$ 可得 $d=51,64,68,80,96,102,120$。

当 $d=51$ 时有 $51m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(51m_1-8)(51n_1-3)=75$。

当 $d=64$ 时有 $64m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(8m_1-1)(64n_1-3)=11$。

当 $d=68$ 时有 $68m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(17m_1-2)(68n_1-3)=23$。

当 $d=80$ 时有 $80m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(10m_1-1)(80n_1-3)=13$。

当 $d=96$ 时有 $96m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(12m_1-1)(96n_1-3)=15$。

当 $d=102$ 时有 $102m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(51m_1-4)(102n_1-3)=63$。

当 $d=120$ 时有 $120m_1n_1-3m_1-8n_1=1$，即有 $(15m_1-1)(140n_1-1)=6$。

经计算可得当 $d=51,64,68,80,96,102,120$ 时，对于方程 $dm_1n_1-3m_1-8n_1=1$，不存在 $m_1,n_1\in Z^+$ 使之成立，故方程无解。

6. 总结

通过证明得到关于 $\varphi(mn)=3\varphi(m)+8\varphi(n)+32$ 的全部 45 组解，在 c 的因子有较多的情况下，需要讨论的情形较多，浪费一定的人力物力，存在着一定的局限性，之后通过发展更加高效和快速的算法来求解欧拉方程的整数解问题，来提高计算速度和精度。

参考文献

[1] 张四保. 三类包含 Euler 函数的方程[J]. 数学的实践与认识, 2016, 44(8): 287-291.

[2] 张四保, 刘启宽. 关于 Euler 函数一个方程的正整数解[J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2015, 47(3): 49-54.

[3] 郭瑞, 赵西卿, 等. 关于欧拉方程 $\varphi(mn)=2\times3(\varphi(m)+\varphi(n))$ 的正整数解[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2016, 34(2): 60-63.

[4] 郑惠. 欧拉函数方程 $\varphi(abc)=2(\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)-1)$ 的正整数解[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(1): 50-53.

[5] 范盼红. 关于 F Smarandache 函数和欧拉函数的三个方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2012, 29(5): 626-628.

[6] 曹盼盼, 赵西卿. 欧拉方程 $\varphi(abcd)=\varphi(a)+2\varphi(b)+3\varphi(c)+4\varphi(d)+16$ 的正整数解[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 428-431+463.

[7] 许霞, 徐小凡. 关于欧拉方程 Φ(ab)=2k(Φ(a)+Φ(b))的正整数解[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2015, 41(4):

6-9.

[8] Sun, C.F. and Cheng, Z. (2010) Some Kind of Equations Involving Euler Function Φ(n). *Journal of Mathematical Study*, **43**, 364-369.

[9] 张四保. 有关 Euler 函数 Φ(n)方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(20): 302-305.

[10] 管春梅, 张四保. 与 Euler 函数 Φ(n)有关的两个方程[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(9): 221-225.

[11] 鲁伟阳, 高丽, 王曦浛. 有关 Euler 函数 Φ(n)的方程的可解性问题[J]. 江西科学, 2016, 34(1): 15-16.

[12] 姜友谊. 关于 Euler 函数方程 Φ(x) = m 的解[J]. 重庆工业管理学院学报, 1998, 12(5): 91-94.

[13] 夏衣旦·莫合德, 张四保, 熊满玉. 一个有关 Euler 函数 Φ(n)的非线性方程的解[J]. 首都师范大学学报: 自然科学版, 2018, 39(2): 4-7.

[14] Rosen, K.H. (2005) Elementary Theory and Its Applications. Pearson Education, Inc., Boston.