Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(7), 3463-3468**
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127343

Hans汉斯

复正交李超代数$osp(1,4)$的拟型心与型心

洪斌皓，吴金旭，郑克礼*

东北林业大学理学院数学系，黑龙江 哈尔滨

收稿日期：2023年6月25日；录用日期：2023年7月19日；发布日期：2023年7月28日

摘 要

李超代数是一种Z_2-李代数，它由物理学家在研究粒子超对称性的统计规律时提出，具有深刻的数学物理意义和内涵。目前，李超代数的相关理论在物理学量子场论、核物理以及超引力等领域中应用广泛。在本文中，首先，根据复正交李超代数的定义得到了$osp(1,4)$的一组标准基。其次，利用待定系数法确定型心和拟型心的理论表示形式。再次，分别探讨了$osp(1,4)$在奇变换、偶变换情形下型心和拟型心的具体矩阵表达式。最终得到其在奇变换下的拟型心在标准基上的矩阵为$\mathbf{0}_{14\times 14}$，型心在标准基上的矩阵为$\mathbf{0}_{14\times 14}$；其在偶变换下的拟型心在标准基上的矩阵为$\lambda I_{14\times 14}$，型心在标准基上的矩阵为$\lambda I_{14\times 14}$。

关键词

李超代数，型心，拟型心，矩阵表示

Quasi-Centroids and Centroids of the Complex Orthogonal Lie Superalgebra $osp(1,4)$

Binhao Hong, Jinxu Wu, Keli Zheng*

Department of Mathematics, School of Science, Northeast Forestry University, Harbin Heilongjiang

Received: Jun. 25th, 2023; accepted: Jul. 19th, 2023; published: Jul. 28th, 2023

Abstract

The Lie superalgebra is a kind of Z_2-graded Lie algebra, which was proposed by physicists in the study of the statistical laws of particle supersymmetry and has deep mathematical physical

*通讯作者。

文章引用：洪斌皓，吴金旭，郑克礼．复正交李超代数 $osp(1,4)$的拟型心与型心[J]．应用数学进展，2023，12(7): 3463-3468. DOI: 10.12677/aam.2023.127343

meaning and connotation. Recently, the theory related to Lie superalgebra is widely used in the fields of quantum field theory, nuclear physics, and supergravity in physics. In this paper, firstly, a set of standard bases of $osp(1,4)$ is obtained according to the definition of the complex orthogonal Lie superalgebra. Secondly, the theoretical representations of centroid and quasi-centroid are determined using the method of coefficients to be determined. Thirdly, the specific matrix expressions for the centroid and quasi-centroid of $osp(1,4)$ in the odd transformed and even transformed cases are explored separately. The final matrix of its quasi-centroid on the standard basis under odd transformation is obtained as $0_{14\times14}$. The matrix of the centroid on the standard basis is $0_{14\times14}$. The matrix of the quasi-centroid on the standard basis under the even transformation is $\lambda I_{14\times14}$. The matrix of the centroid on the standard basis is $\lambda I_{14\times14}$.

Keywords

Lie Superalgebra, Centroid, Quasi-Centroid, Matrix Representation

1. 引言

李超代数作为李代数的自然推广，其在数学其他分支上以及物理学特别是刚体在超对称空间中运动的轨道描述起到重要作用[1]。型心和拟型心是李超代数结构中的重要概念，型心是广义超导子代数的重要子代数，拟型心的元素是特殊的广义导子[2]。近年来，随着国内外学者的深入研究，其在研究超代数的广义切空间即超导子中重要地位随之逐渐显现出来。文献[3]则通过定义李超代数上的型心和零次型心来考察其性质，证明了二次李超代数(G,B)上的不变数积的集合和其型心中的可逆 B-超对称元素的集合之间存在一一对应。文献[4]应用 Shur 引理证明了复数域上的单李超代数的型心要么是纯量阵，要么其平方是纯量阵。但那种单李超代数到底型心是哪一种并没有明确给出。对具体的单李超代数，文献[5] [6] [7]研究了复数域上特殊线性李超代数 $sl(m,n)$ 在 $m+n\le 4$ 时与复正交李超代数 $osp(1,2)$ 的型心与拟型心，以及在特定基下的矩阵表示。文献[8]给出素特征域上 $osp(1,4)$ 在广义 Witt 李超代数中的中心化子。本文将在上述文献的基础之上，研究正交李超代数 $osp(1,4)$ 的型心与拟型心及其矩阵表示。

本文结构如下：第一部分是预备知识，介绍了本文用到的一些基本概念及符号。第二部分为本文的主体部分，分别讨论了在偶变换和奇变换下 $osp(1,4)$ 的拟型心与型心的矩阵表示。第三部分是文章的结论部分，总结分析本文的研究结论。

2. 基础知识

令本文中的线性空间与超代数都是复数域 C 上的，且都为有限维的。为了后续阐述的便捷性，本节给出李超代数、Z_2-阶化次数、型心与拟型心的定义与符号。

定义 1 [9]设 $Z_2=\{0,1\}$ 为模 2 剩余类环，则复数域 C 上的 Z_2-阶化线性空间 $L=L_0\oplus L_1$ 称为李超代数，若对其上定义的双线性二元运算 $[,]$ 满足：

1) 超反对称性：

$$[x,y]=-(-1)^{d(x)d(y)}[y,x];$$

2) 超雅可比恒等式：

$$(-1)^{d(z)d(x)}\left[x,\left[y,z\right]\right]+(-1)^{d(x)d(y)}\left[y,\left[z,x\right]\right]+(-1)^{d(y)d(z)}\left[z,\left[x,y\right]\right]=0,$$

其中 x，y，z 是李超代数中的 Z_2-齐次元素，$d(x),d(y),d(z)$ 分解为 x，y，z 的 Z_2-阶化次数。

注：雅可比恒等式移项整理后就是超莱布尼茨公式，李超代数也称为 Z_2-阶化李代数。

定义 2 [9]设 L 是复李超代数，则称

$$\Gamma_{\theta}(L)=\left\{f\in End_{\theta}(L)\middle|f[x,y]=\left[f(x),y\right]=(-1)^{d(x)d(f)}\left[x,f(y)\right],x,y\in L,\theta\in Z_2\right\}$$

为 L 上的 Z_2-阶化型心；称

$$Q\Gamma_{\theta}(L)=\left\{f\in End_{\theta}(L)\middle|\left[f(x),y\right]=(-1)^{d(x)d(f)}\left[x,f(y)\right],x,y\in L,\theta\in Z_2\right\}$$

为 L 上的 Z_2-阶化拟型心，其中 $End_{\theta}(L)$ 表示所有 L 中 Z_2-阶化线性变换的集合。

注：对任意 $f\in End_{\theta}(L)$，若 $\theta=\overline{0}$，$d(f)=\overline{0}$，则称 f 为偶变换；若 $\theta=\overline{1}$，$d(f)=\overline{1}$，则称 f 为奇变换。另外显然有 $\Gamma(L)=\Gamma_{\overline{0}}(L)\oplus\Gamma_{\overline{1}}(L)$ 且 $Q\Gamma(L)=Q\Gamma_{\overline{0}}(L)\oplus Q\Gamma_{\overline{1}}(L)$。

根据复正交李超代数 $osp(m,n)$ 定义[9]易得 $osp(1,4)$ 的一组标准基[8]：

$$e_{12}-e_{41},e_{13}-e_{51},e_{41}+e_{21},e_{15}+e_{13},e_{22}-e_{44},e_{23}-e_{54},$$
$$e_{32}-e_{45},e_{33}-e_{55},e_{24},e_{35},e_{25}+e_{34},e_{42},e_{53},e_{43}+e_{52}$$

其中 $e_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$ 表示第 i 行第 j 列的元素为 1，其余位置全为 0 的方阵。

若 f 为 $osp(1,4)$ 上的线性变换，则在基 $e_{12}-e_{41},e_{13}-e_{51},\cdots,e_{43}+e_{52}$ 上的矩阵表示式如下：

$$f\left(e_{12}-e_{41},e_{13}-e_{51},\cdots,e_{43}+e_{52}\right)=\left(e_{12}-e_{41},e_{13}-e_{51},\cdots,e_{43}+e_{52}\right)\begin{pmatrix} lk_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,14} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,14} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{14,1} & k_{14,2} & \cdots & k_{14,14} \end{pmatrix} \quad (1)$$

当 f 分别为型心与拟型心时，由元素 k_{ij} 组成的矩阵表示型心与拟型心在此组基下的矩阵表示法。

3. 主要结论及证明

首先计算 $osp(1,4)$ 拟型心的奇部与偶部的矩阵表示。

命题 1：$osp(1,4)$ 的拟型心偶部在其标准基下的矩阵表示为 $\lambda I_{14\times14}$，其中 λ 为任意复数，I 为单位矩阵。

证明：令 $e_{12}-e_{41},e_{13}-e_{51},e_{41}+e_{21},e_{15}+e_{31},e_{22}-e_{44},e_{23}-e_{54},e_{32}-e_{45},e_{33}-e_{55},e_{24},e_{35}$

$e_{25}+e_{34}$，e_{42}，e_{53}，$e_{43}+e_{52}$ 为李超代数 $osp(1,4)$ 标准基，f 为 $osp(1,4)$ 的拟型心的偶部元素，则由(1)式可得这组基在 f 作用下的像为：

$$\begin{aligned} f\left(e_{12}-e_{41}\right)=&k_{11}\left(e_{12}-e_{41}\right)+k_{21}\left(e_{13}-e_{51}\right)+k_{31}\left(e_{41}+e_{21}\right)+k_{41}\left(e_{15}+e_{31}\right)+k_{51}\left(e_{22}-e_{44}\right)\\ &+k_{61}\left(e_{23}-e_{54}\right)+k_{71}\left(e_{32}-e_{45}\right)+k_{81}\left(e_{33}-e_{55}\right)+k_{91}e_{24}+k_{10,1}e_{35}\\ &+k_{11,1}\left(e_{25}+e_{34}\right)+k_{12,1}e_{42}+k_{13,1}e_{53}+k_{14,1}\left(e_{43}+e_{52}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(e_{13}-e_{51}\right)=&k_{12}\left(e_{12}-e_{41}\right)+k_{22}\left(e_{13}-e_{51}\right)+k_{32}\left(e_{41}+e_{21}\right)+k_{42}\left(e_{15}+e_{31}\right)+k_{52}\left(e_{22}-e_{44}\right)\\ &+k_{62}\left(e_{23}-e_{54}\right)+k_{72}\left(e_{32}-e_{45}\right)+k_{82}\left(e_{33}-e_{55}\right)+k_{92}e_{24}+k_{10,2}e_{35}\\ &+k_{11,2}\left(e_{25}+e_{34}\right)+k_{12,2}e_{42}+k_{13,2}e_{53}+k_{14,2}\left(e_{43}+e_{52}\right) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} f(e_{43}-e_{52}) &= k_{1,14}(e_{12}-e_{41})+k_{2,14}(e_{13}-e_{51})+k_{3,14}(e_{41}+e_{21})+k_{4,14}(e_{15}+e_{31}) \\ &+k_{5,14}(e_{22}-e_{44})+k_{6,14}(e_{23}-e_{54})+k_{7,14}(e_{32}-e_{45})+k_{8,14}(e_{33}-e_{55}) \\ &+k_{9,14}e_{24}+k_{10,14}e_{35}+k_{11,14}(e_{25}+e_{34})+k_{12,14}e_{42}+k_{13,14}e_{53}+k_{14,14}(e_{43}+e_{52}) \end{aligned}$$

分别用 $osp(1,4)$ 的标准基元素 $e_{12}-e_{41}$， $e_{13}-e_{51}$ 代替定义中的 x,y 进行计算可得：

$$\begin{aligned} \left[f(e_{12}-e_{41}),e_{13}-e_{51}\right] &= \left[f(e_{12}-e_{41})\right](e_{13}-e_{51}) \\ &-(-1)^{d(f(e_{12}-e_{41}))d(e_{13}-e_{51})}(e_{13}-e_{51})\left[f(e_{12}-e_{41})\right] \\ &=\left[f(e_{12}-e_{41})\right](e_{13}-e_{51})+(e_{13}-e_{51})\left[f(e_{12}-e_{41})\right] \\ &=k_{71}e_{12}+k_{81}e_{13}+k_{11,1}e_{14}+k_{10,1}e_{15}-k_{11,1}e_{21}+k_{31}e_{23}-k_{10,1}e_{31} \\ &+k_{41}e_{33}+k_{71}e_{41}-k_{11}e_{43}+k_{81}e_{51}-k_{11}e_{52}-2k_{21}e_{53}-k_{31}e_{54}-k_{41}e_{55} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[e_{12}-e_{41},f(e_{13}-e_{51})\right] &= (e_{12}-e_{41})f\left[(e_{13}-e_{51})\right] \\ &-(-1)^{d(e_{12}-e_{41})d(f(e_{13}-e_{51}))}\left[f(e_{13}-e_{51})\right](e_{12}-e_{41}) \\ &=(e_{12}-e_{41})\left[f(e_{13}-e_{51})\right]+\left[f(e_{13}-e_{51})\right](e_{12}-e_{41}) \\ &=k_{52}e_{12}+k_{62}e_{13}+k_{92}e_{14}+k_{11,2}e_{15}-k_{92}e_{21}+k_{32}e_{22}-k_{11,2}e_{31} \\ &+k_{42}e_{32}+k_{52}e_{41}-2k_{12}e_{42}-k_{22}e_{43}-k_{32}e_{44}-k_{42}e_{45}+k_{62}e_{51}-k_{22}e_{52} \end{aligned}$$

由偶部拟型心定义知：$\left[f(e_{12}-e_{41}),e_{13}-e_{51}\right]=\left[e_{12}-e_{41},f(e_{13}-e_{51})\right]$。由于基是线性无关的，因此比较系数可得：

$$k_{11}=k_{22},k_{71}=k_{52},k_{81}=k_{62},k_{10,1}=k_{11,2},k_{11,1}=k_{92},k_{12}=k_{21}=k_{31}=k_{32}=k_{41}=k_{42}=0$$

同理可得：

$$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=k_{66}=k_{77}=k_{88}=k_{99}=k_{10,10}=k_{11,11}=k_{12,12}=k_{13,13}=k_{14,14},$$

其他元素均为 0。因此命题得证。

命题 2： $osp(1,4)$ 的拟型心的奇部在其标准基下的矩阵表示为 $0_{14\times14}$。

证明：若 f 为 $osp(1,4)$ 的拟型心的奇部元素，根据拟型心的定义分别用 $osp(1,4)$ 的标准基元素 $e_{12}-e_{41}$，$e_{13}-e_{51}$ 代替定义中的 x,y 进行计算可得：

$$\begin{aligned} \left[f(e_{12}-e_{41}),e_{13}-e_{51}\right] &= \left[f(e_{12}-e_{41})\right](e_{13}-e_{51}) \\ &-(-1)^{d(f(e_{12}-e_{41}))deg(e_{13}-e_{51})}(e_{13}-e_{51})\left[f(e_{12}-e_{41})\right] \\ &=\left[f(e_{12}-e_{41})\right](e_{13}-e_{51})-(e_{13}-e_{51})\left[f(e_{12}-e_{41})\right] \\ &=-2k_{41}e_{11}-k_{71}e_{12}-k_{81}e_{13}-k_{11,1}e_{14}-k_{10,1}e_{15}-k_{11,1}e_{21}+k_{31}e_{23} \\ &-k_{10,1}e_{31}+2k_{41}e_{33}+k_{71}e_{41}-k_{11}e_{43}+k_{81}e_{51}+k_{11}e_{52}+k_{31}e_{54}+k_{41}e_{55} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[e_{12}-e_{41},f(e_{13}-e_{51})\right] &= (e_{12}-e_{41})f\left[(e_{13}-e_{51})\right] \\ &-(-1)^{d(e_{12}-e_{41})d(f(e_{13}-e_{51}))}\left[f(e_{13}-e_{51})\right](e_{12}-e_{41}) \\ &=(e_{12}-e_{41})\left[f(e_{13}-e_{51})\right]-\left[f(e_{13}-e_{51})\right](e_{12}-e_{41}) \\ &=2k_{32}e_{11}+k_{52}e_{12}+k_{62}e_{13}+k_{92}e_{14}+k_{11,2}e_{15}+k_{92}e_{21}-k_{32}e_{22} \\ &+k_{11,2}e_{31}-k_{42}e_{32}-k_{52}e_{41}-k_{22}e_{43}-k_{32}e_{44}-k_{42}e_{45}-k_{62}e_{51}+k_{22}e_{52} \end{aligned}$$

由拟型心定义知：$\left[f\left(e_{12}-e_{41}\right),e_{13}-e_{51}\right]=-\left[e_{12}-e_{41},f\left(e_{13}-e_{51}\right)\right]$，比较系数可知：

$$k_{31}=k_{32}=k_{41}=k_{42}=0,k_{11}=k_{22},k_{32}=k_{41},k_{71}=k_{52},k_{81}=k_{62},k_{10,1}=k_{11,2},k_{11,1}=k_{92}$$

依据上述方法对每个基进行运算，同理可得：

$$k_{11}=k_{21}=\cdots=k_{14,1}=k_{21}=k_{22}=\cdots=k_{2,14}=\cdots=k_{14,1}=k_{14,2}=\cdots=k_{14,14}=0$$

命题得证。

由命题 1、命题 2 与 $Q\Gamma(L)=Q\Gamma_{\bar{0}}(L)\oplus Q\Gamma_{\bar{1}}(L)$ 可得如下定理：

定理 1： $osp(1,4)$ 的拟型心在标准基下的矩阵表示为 $\lambda I_{14\times14}$，其中 λ 为任意复数，I 为单位矩阵。

接下来计算 $osp(1,4)$ 型心的奇部和偶部的矩阵表示。

命题 3： $osp(1,4)$ 的型心的偶部在其标准基下的矩阵表示为 $\lambda I_{14\times14}$，其中 λ 为任意复数，I 为单位矩阵。

证明：若 f 为 $osp(1,4)$ 的型心的偶部元素，根据命题 1 及型心的定义分别用 $osp(1,4)$ 的标准基元素 $e_{12}-e_{41}$，$e_{13}-e_{51}$ 代替定义中的 x,y 进行计算可得：

$$f\left[e_{12}-e_{41},e_{22}-e_{44}\right]=f\left(e_{12}-e_{41}\right)=\lambda\left(e_{12}-e_{41}\right)$$

$$\begin{aligned}f\left[e_{12}-e_{41},e_{22}-e_{44}\right]&=f\left(e_{12}-e_{41}\right)\left(e_{22}-e_{44}\right)-\left(e_{22}-e_{44}\right)f\left(e_{12}-e_{41}\right)\\&=k_{11}\left(e_{12}-e_{41}\right)-k_{31}\left(e_{21}+e_{14}\right)+k_{61}\left(e_{54}-e_{23}\right)+k_{71}\left(e_{32}-e_{45}\right)\\&\quad-2k_{91}e_{24}-k_{11,1}\left(e_{34}+e_{25}\right)+2k_{12,1}e_{42}+k_{14,1}\left(e_{32}+e_{43}\right)\end{aligned}$$

比较系数可知：$k_{11}=\lambda,k_{31}=k_{61}=k_{71}=k_{91}=k_{11,1}=k_{14,1}=0$。

依据上述方法对每个基进行运算，同理可得：

$$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=k_{66}=k_{77}=k_{88}=k_{99}=k_{10,10}=k_{11,11}=k_{12,12}=k_{13,13}=k_{14,14}=\lambda$$

其余位置元素均为 0。命题得证。

命题 4： $osp(1,4)$ 的型心的奇部在其标准基下的矩阵表示为 $0_{14\times14}$。

证明：若 f 为 $osp(1,4)$ 的型心的奇部元素，根据命题 1 及型心的定义分别用 $osp(1,4)$ 的标准基元素 $e_{12}-e_{41}$，$e_{13}-e_{51}$ 代替定义中的 x,y 进行计算可得：

$$f\left[e_{12}-e_{41},e_{22}-e_{44}\right]=f\left(e_{12}-e_{41}\right)=0$$

$$\begin{aligned}f\left[e_{12}-e_{41},e_{22}-e_{44}\right]&=f\left(e_{12}-e_{41}\right)\left(e_{22}-e_{44}\right)-\left(e_{22}-e_{44}\right)f\left(e_{12}-e_{41}\right)\\&=k_{11}\left(e_{12}-e_{41}\right)-k_{31}\left(e_{21}+e_{14}\right)+k_{61}\left(e_{54}-e_{23}\right)+k_{71}\left(e_{32}-e_{45}\right)\\&\quad-2k_{91}e_{24}-k_{11,1}\left(e_{34}+e_{25}\right)+2k_{12,1}e_{42}+k_{14,1}\left(e_{32}+e_{43}\right)\end{aligned}$$

比较系数可知：$k_{11}=0,k_{31}=k_{61}=k_{71}=k_{91}=k_{11,1}=k_{14,1}=0$。

依据上述方法对每个基进行运算，同理可得：

$$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=k_{66}=k_{77}=k_{88}=k_{99}=k_{10,10}=k_{11,11}=k_{12,12}=k_{13,13}=k_{14,14}=0$$

其余位置元素均为 0。命题得证。

由命题 3、命题 4 与 $\Gamma(L)=\Gamma_{\bar{0}}(L)\oplus\Gamma_{\bar{1}}(L)$ 可得如下定理：

定理 2： $osp(1,4)$ 的型心在标准基下的矩阵表示为 $\lambda I_{14\times14}$，其中 λ 为任意复数，I 为单位矩阵。

4. 结论

由定理 1 与定理 2 可得：

定理 3： 正交李超代数 $osp(1,4)$ 的型心与拟型心矩阵表示都为 $\lambda I_{14\times 14}$，其中 λ 为任意复数，I 为单位矩阵。

因此李超代数 $osp(1,4)$ 的型心与拟型心相同，且在标准基下的矩阵表示为纯量阵。该结论给出了 $osp(1,4)$ 具体的型心结构证明出其没有文献[4]中证明出的平方为纯阵的型心情况。其可应用于超空间的粒子物理学中，即其对应的物理粒子模型是玻色子而无费米子的情况。

基金项目

东北林业大学大学生创新训练项目(S202210225006)；中央高校基本科研业务费专项资金资助(2572021BC02)。

参考文献

[1] 孙洪洲, 韩其智. 李超代数综述[J]. 物理学进展, 1983(1): 81-125.

[2] 李明珠, 孙玉莉. 李超代数拟型心[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(24): 226-232.

[3] 张知学, 刘丽巧. 李超代数上的不变双线性型[J]. 数学年刊 A 辑, 2004, 25(2): 139-146.

[4] Zheng, K. and Zhang, Y.Z. (2013) On (*α*,*β*,*γ*)-Derivations of Lie Superalgebras. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **10**, Article ID: 1350050. https://doi.org/10.1142/S0219887813500503

[5] 高晨阳, 陆炳权, 郑克礼. 低阶特殊线性李超代数的型心与拟型心[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 36-40. https://doi.org/10.12677/pm.2022.121005

[6] 郭睿彤, 李柏霄, 郑克礼. 4 阶特殊线性李超代数的型心与拟型心[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(7): 233-237.

[7] 董瑞林, 张晓茹, 郑克礼. 复正交李超代数 osp(1,2)的拟型心与型心的矩阵表示[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1487-1492. https://doi.org/10.12677/pm.2022.129162

[8] 张馨悦, 张雪天, 刘娜, 等. 素特征域上 *osp*(1,4)在广义 Witt 李超代数中的中心化子[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2021, 37(2): 17-21.

[9] Kac, V.G. (1977) Lie Superalgebras. *Advances in Mathematics*, **26**, 8-96. https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90017-2