

含两个交叉的图的弱退化度

王程

浙江师范大学, 数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2023年7月21日; 录用日期: 2023年8月13日; 发布日期: 2023年8月21日

摘要

图的弱退化度是由Bernshteyn和Lee提出的一个新的定义, 是图的退化度的变形。根据定义可知, 每个 d -退化的图也是 d -弱退化的。另一方面, 如果 G 是 d -弱退化的, 那么 $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq d + 1$ 。因此, 研究一些特殊图类的弱退化度有利于我们更好地深刻了解图的性质和特征。含有交叉的图是一类比平面图范围更大的图类。2011年, Dvořák 等人证明了含有至多两个交叉的图是5-可选的。2018年, 胡建章证明了含有至多一个交叉的图是5-在线可选的。2021年, 李旭珺和朱绪鼎证明了含有至多两个交叉的图是DP-5-可染的。在这篇论文中, 证明了至多含有2个交叉的图是4-弱退化的。

关键词

交叉数, 退化, 弱退化, 图

Weak Degeneracy of Graphs with Two Crossings

Cheng Wang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jul, 21st, 2023; accepted: Aug, 13th, 2023; published: Aug, 21st, 2023

Abstract

Weak degeneracy of graphs is a new definition proposed by Bernshteyn and Lee. It is the variation of the degeneracy of graphs. By definition, every d -degenerate graph is also weakly d -degenerate. On the other hand, if G is weakly d -degenerate, then $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq d + 1$. So studying weak degeneracy of some special graph classes is beneficial for us to better understand the properties and features of graphs. Graphs with crossings are a class of graphs with a larger scope than planar graphs. In 2011, Dvořák et al. proved that every graph with at most two crossings is 5-choosable. In 2018, Jianzhang Hu proved that every graph with at most one crossing is 5-paintable. In 2021, Xu'er Li and Xuding Zhu proved that every graph with at most two crossings are DP-5-colorable. In this paper, we prove that every graph with at most two crossings is weakly 4-degenerate.

Keywords

Crossing Number, Degeneracy, Weak Degeneracy, Graphs

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本篇文章中所有的图都是简单图, 即没有环也没有重边的图. 我们用 $V(G)$ 表示图 G 的顶点集, $E(G)$ 表示图 G 的边集. 若将图 G 嵌入平面, 两条边在不是顶点处相交, 则称为该嵌入图的一个交叉. 图 G 的交叉数是指将图 G 嵌入平面中, 出现最少的交叉数, 记为 $cr(G)$.

Erdős 和 Rubin [1] 介绍了列表染色的概念以及相关结论. G 是一个图且 C 是一个颜色集合. 我们称函数 $L : V(G) \rightarrow 2^C$ 是图 G 上的一个列表配置. 特别地, 当 L 满足对于每一个顶点 $v \in V(G)$, $|L(v)| = k$, 我们称 L 是图 G 上的一个 k -列表配置. 若存在一个染色 $\phi : V(G) \rightarrow C$, 使得对于每一个顶点 $v \in V(G)$, $\phi(v) \in L(v)$ 且对于每一条边 $uv \in E(G)$, $\phi(v) \neq \phi(u)$, 则称 ϕ 是图 G 的一个好的列表染色且图 G 是 L -可染的. 设 k 是一个整数, 对于任意 G 的列表配置 L , 其中, L 满足对于每一个顶

点 $v \in V(G)$, $|L(v)| \geq k$, 若图 G 总是 L -可染的, 我们称图 G 是 k -可选的或 k -列表可染的. 图 G 的列表色数或选择数被定义为最小的整数 k , 使得 G 是 k -可选的, 用 $\chi_l(G)$ 表示.

DP-染色是列表染色的进一步推广, 在2015年, 为了证明不含4到8圈的平面图是3-可选的, Dvořák 和 Postle [2] 引入了DP-染色的概念. 在2018年, Bernshteyn 和 Kostochka [3] 提出了DP-染色.

令 L 是图 G 的一个列表配置. 对于每一条边 $uv \in E(G)$, 令 $M_{L,uv}$ 为点集 $\{u\} \times L(u)$ 和 $\{v\} \times L(v)$ 之间的匹配. 令 $\mathcal{M}_L = \{M_{L,uv} : uv \in E(G)\}$. 若图 H_L 满足以下条件, 我们称图 H_L 为 G 的一个 \mathcal{M}_L -覆盖:

- H_L 的顶点集为 $\bigcup_{u \in V(G)} (\{u\} \times L(u))$;
- 对于每个顶点 $v \in V(G)$, $\{v\} \times L(v)$ 导出 H_L 中的一个完全子图;
- 若 $uv \in E(G)$, $\{u\} \times L(u)$ 和 $\{v\} \times L(v)$ 之间的边为 $M_{L,uv}$ 的边;
- 若 $uv \notin E(G)$, $\{u\} \times L(u)$ 和 $\{v\} \times L(v)$ 之间没有边.

若 G 的一个 \mathcal{M}_L -覆盖中的独立集 I 满足 $|I| = |V(G)|$, 则称 I 是 G 的一个 \mathcal{M}_L -染色. 若对于所有图 G 上的 k -列表配置 L 以及 L 上的任意 \mathcal{M}_L -覆盖, 总存在一个 \mathcal{M}_L -染色, 则称 G 是 DP- k -可染的. 图 G 的 DP 色数被定义为最小的整数 k , 使得 G 是 DP- k -可染的, 用 $\chi_{DP}(G)$ 表示.

在这篇文章中, 我们研究了图染色的贪婪算法. 基本的贪婪算法是每次只考虑 G 的一个顶点, 当我们考虑点 u 时, 从 $L(u)$ 中给它分配一个任意的颜色, 比如 α . 此时, 为了确保染色是正常的, 我们必须从 u 的邻居可用的颜色列表中移除 α . 因此, u 的每个邻居的列表大小可能会减少1, 而其它所有列表保持不变. 如果在整个过程中没有一个点的列表大小减少到0(即每个未染色的顶点总是至少有一种可用的颜色), 那么我们就得到了 G 的一个正常染色. 这个想法引出了退化度的概念.

定义1.1 设 G 是一个图以及函数 $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, 对于点 $u \in V(G)$, 我们定义一种作用在 (G, f) 上的操作“删除 (G, f, u) ”以及其操作结果 (G', f') , 其中, $G' := G - u$, 函数 $f' : V(G') \rightarrow \mathbb{Z}$ 为

$$f'(v) := \begin{cases} f(v) - 1, & \text{若 } uv \in E(G); \\ f(v), & \text{其它.} \end{cases}$$

如果最终得到的函数 f' 是非负的, 即对任意 $v \in V(G')$, 都有 $f'(v) \geq 0$, 那么我们称该“删除”操作是有效的. 如果我们可以通过一系列有序的有效“删除”操作去掉 G 中所有顶点, 那么我们称图 G 是 f -退化的. 若 f 是常值函数 d , 则称图 G 是 d -退化的. 图 G 的退化度被定义为最小的整数 d , 使得 G 是 d -退化的, 用 $d(G)$ 表示.

图的DP-染色和列表染色一个区别是: 在列表染色中, 如果 n 是偶数, 那么 $\chi_l(C_n) = 2$, 如果 n 是奇数, 那么 $\chi_l(C_n) = 3$. 但在DP-染色中, 对于所有的 $n \geq 3$, 都有 $\chi_{DP}(C_n) = 3$. 因此, 我们考虑是否可以通过调整贪婪染色过程的一些细节来“保存”一些颜色, 从而得到 $\chi_{DP}(G)$ 的一个更好的界限. 这是很有趣的, 因此, 我们研究一种简单但却很强大的方法.

考虑点 $u \in V(G)$, 设 w 是它的邻居. 一般来说, 如果我们给 u 染一种颜色 c , 那么 w 可能会失去颜色 c . 但是, 假设 $|L(u)| > |L(w)|$, 即严格来说 u 的可用颜色比 w 多. 在这种情况下, $L(u)$ 中一定有一

个颜色不出现在 $L(w)$ 中, 并且当我们将这个颜色分配给 u 并不会影响 $L(w)$ (当然, u 的其它邻居可能仍然会失去一种颜色). 通过这种方式, 我们为 w “保存”了一个额外的颜色. Bernshteyn 和Lee [4]提出了以下定义:

定义1.2 设 G 是一个图以及函数 $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, 对于一条边 $uw \in E(G)$, 物品, 我们定义一种作用在 (G, f) 上的操作“删除保存 (G, f, u, w) ”以及其操作结果 (G', f') , 其中, $G' := G - u$, 函数 $f' : V(G') \rightarrow \mathbb{Z}$ 为

$$f'(v) := \begin{cases} f(v) - 1, & \text{若 } uv \in E(G) \text{ 且 } v \neq w; \\ f(v), & \text{其它.} \end{cases}$$

如果 $f(u) > f(w)$ 且最终得到的函数 f' 是非负的, 那么我们称该“删除保存”操作是有效的. 如果我们可以通过一系列有序的有效的“删除”及“删除保存”操作去掉 G 中所有的点, 那么我们称图 G 是 f -弱退化的. 若 f 是常值函数 d , 则称图 G 是 d -弱退化的. 图 G 的弱退化度被定义为最小的整数 d , 使得 G 是 d -弱退化的, 用 $wd(G)$ 表示.

给定一个集合 $S \subseteq V(G)$, 如果从 (G, f) 开始, 使得 S 中的点仅通过有效的“删除”操作去掉, 而其它点可以通过一系列有序的有效的“删除”及“删除保存”操作去掉, 那么我们称 G 是“保 S - f -弱退化的”. 特别地, G 是“保 $V(G)$ - f -弱退化的”当且仅当 G 是 f -退化的.

Bernshteyn 和Lee [4]证明了以下命题:

命题1.3 [4] 对任意图 G , 都满足

$$\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq \chi_{DPP}(G) \leq wd(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

这里 $\chi_{DP}(G)$ 表示 G 的DP-色数, $\chi_{DPP}(G)$ 表 G 的DP-在线色数.

在 [4]中, 作者证明了Brooks定理的弱退化版本: 如果 G 是一个最大度 $\Delta \geq 3$ 的连通图, 那么 G 是 $(\Delta - 1)$ -弱退化的或者 $G \cong K_{\Delta+1}$. GDP树是一个满足每一个块是完全图或者一个圈的连通图. 在 [4]中, 作者证明了下列两条命题是等价的:

- G 是 $(d - 1)$ -弱退化的;
- G 不是GDP树.

作者还证明了若非空图 G 的弱退化度至少为 $d \geq 3$, 那么 G 包含一个 $(d + 1)$ -团或者

$$mad(G) \geq d + \frac{d - 2}{d^2 + 2d - 2}.$$

事实证明, 使用“删除”和“删除保存”操作的方法可以证明几个非平凡的上界. 1994年, Thomassen [5]证明了所有的平面图是5-可选的; 2015年, Dvořák 和Postle [2]证明了所有的平面图是DP-5-可染的; 2021年, Bernshteyn 和Lee [4]提出了弱退化度的概念, 再次把这一结果进行加强, 他们证明了所有的平面图是4-弱退化的. 2022年, 丁萧萧 [6]在Bernshteyn 和Lee 的结果基础之上, 进一步证明了不含 K_5 -子式的图是4-弱退化的, 同时还证明了4-圈与5-圈不相邻的平面图是3-弱退化的. 2023年, 王涛 [7]证明了不含4-圈与6-圈的平面图是2-弱退化的. 2023年, 韩铭等人 [8]证明了围

长为5的平面图是2-弱退化的且局部平面图是4-弱退化的.

2011年, Dvořák 等人 [9]证明了含有至多两个交叉的图是5-可选的. 2018年, 胡建章 [10]证明了含有至多一个交叉的图是5-在线可选的. 2021年, 李旭珺和朱绪鼎 [11]证明了含有至多两个交叉的图是DP-5-可染的. 我们加强了上述结果, 证明如下定理:

定理1.4 交叉数至多为2的图是4-弱退化的.

2. 至多含有2个交叉的图是4-弱退化的

定理2.1 [4] 定义一类三元对 (G, F, xy) : G 是一个平面图, F 是 G 的一个面, xy 是 F 上的一条边. 对于每一个三元对 (G, F, xy) , 定义 $f_{G,F,xy}: V(G) \setminus \{x, y\} \rightarrow \mathbb{Z}$ 为

$$f_{G,F,xy}(v) := \begin{cases} 2 - |N_G(v) \cap \{x, y\}|, & v \in V(F) \setminus \{x, y\}; \\ 4 - |N_G(v) \cap \{x, y\}|, & \text{其它.} \end{cases}$$

那么 $G - x - y$ 是“保 $(V(F) \setminus \{x, y\})$ - $f_{G,F,xy}$ -弱退化的”.

推论2.2 设 G 是一个连通图, $f \in \mathbb{N}^G$ 是定义在 $V(G)$ 上的函数. 若存在三元对 (G^*, F^*, xy) 以及一系列有序的有效的作用在 (G, f) 上的“删除”及“删除保存”操作, 使得这一系列操作的结果 (G', f') 满足 $G' = G^* - x - y$ 及 $f' \geq f_{G^*, F^*, xy}$, 那么 G 是 f -弱退化的.

为了去证明**定理1.4**, 我们证明一个更强的定理.

定理2.3 设图 G 满足:

- $cr(G) \leq 2$, or
- $cr(G) \leq 1$ 且 G 包含一个预去除三角形 $T = t_1t_2t_3$.

设函数 $f \in \mathbb{N}^{G-V(T)}$ 满足: 对于任意顶点 $v \in V(G - V(T))$, $f(v) = 4 - |N_G(v) \cap V(T)|$ (若预去除三角形 T 不存在, $V(T) = \emptyset$). 那么 $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

证明 若**定理2.3**不成立. 我们考虑首先交叉数最小, 其次点数最少, 最后边数最大的反例 (G, f) . 注意到, G 是联通的且对于任意顶点 $v \in V(G - V(T))$, $d_G(v) \geq 5$.

引理2.3.1 $cr(G) \geq 1$.

证明 假设 G 是一个平面图. 由**定理2.3**的假设条件可知, G 包含一个预去除三角形 $T = t_1t_2t_3$. 不妨设 T 是 G 的外面. 令 $G^* = G - t_1$, F^* 是 G^* 的外面. 特别地, t_2t_3 在面 F^* 上. 注意到, $(G - V(T), f)$ 满足 $G - V(T) = G^* - t_2 - t_3$ 以及 $f \geq f_{G^*, F^*, t_2t_3}$. 由**推论2.2**可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

引理2.3.2 只包含一个交叉的图是4-弱退化的.

证明 假设 $cr(G) = 1$, 考虑图 G 只有一个交叉 $C = \{x_1y_1, x_2y_2\}$ 的平面嵌入. 我们不妨假设4-圈 $x_1x_2y_1y_2x_1$ 为 G 的外面且 $G - C$ 的内部是一个三角剖分. 令 $G^* = G - x_1 - x_2$, F^* 是 G^* 的外面. 特

别地, y_1y_2 在面 F^* 上. 设 (G', f') 为在 (G, f) 上依次使用“删除”操作去掉 x_1, y_1, x_2, y_2 后的结果. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - y_1 - y_2$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, y_1y_2}$. 由推论2.2可知, G 是4-弱退化的.

将交叉和预去除三角形 T 统称为“危险构型”. 由引理2.3.2可知, 可以假设图 G 中存在两个“危险构型”: 要么 $cr(G) = 2$, 要么 $cr(G) = 1$ 且图 G 包含一个预去除三角形 T . 固定一个使得图 G 交叉数最少的平面嵌入画法.

引理2.3.3 若预去除三角形 T 存在, 那么 $E(T)$ 中不包含交叉边.

证明 令 $T = uvw$. 假设边 uv 和边 xy 交叉. 令 G_1 是 T 及其内部顶点在 G 中的导出子图. 令 $G_2 = G \setminus (V(G_1) \setminus V(T))$. 由对称性, 不妨设 $x \neq w$ 且 $x \in V(G_1)$. 由于 $|V(G)| > |V(G_2)|$, 我们可以通过一系列作用在 $(G - V(T), f)$ 有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作去掉 $V(G_2) - V(T)$ 中的所有点. 令 (G', f') 为上述一系列操作的结果. 令 $G^* = G_1 - u$, F^* 是 G^* 的外面. 特别地, vw 在面 F^* 上. 由于 $cr(G) \geq 1$, $x \in V(F^*)$. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - v - w$ 以及 $f \geq f_{G^*, F^*, vw}$. 由推论2.2可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

假设 C 是 G 中的一个圈. 令 G_1 为 C 中以及其内部的顶点在 G 的导出子图, G_2 为 C 中以及其外部的顶点在 G 的导出子图, $G_1 \cap G_2 = C$. 若 C 上不存在交叉且 $V(G_1) \neq V(C) \neq V(G_2)$, 则称 C 为 G 的一个分离圈, 称 G_1 和 G_2 为 C -分支.

引理2.3.4 G 不包含分离三角形.

证明 假设 G 中存在分离三角形 $C = x_1x_2x_3$, 令 G_1 和 G_2 为 G 的 C -分支. 若两个“危险构型”都在同一个 C -分支, 根据对称性, 不妨设该 C -分支为 G_1 , 由于 $|V(G)| > |V(G_1)|$, 我们可以首先对 $(G_1 - V(T), f)$ 进行一系列有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作来去掉 $G_1 - V(T)$ 中的所有点, 进而继续进行一系列有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作来去掉 $G_2 - V(C)$ 中的所有点, 其中 C 可以看作是 G_2 中的预去除三角形. 若两个“危险构型”不在同一个 C -分支, 不妨设 $T \subseteq G_1$ (若预去除三角形 T 存在). 由于 $|V(G)| > |V(G_1)|$, 我们可以首先对 $(G - V(T), f)$ 进行一系列有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作来去掉 $G_1 - V(T)$ 中的所有点, 进而继续进行一系列有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作来去掉 $G_2 - V(C)$ 中的所有点, 其中 C 可以看作是 G_2 中的预去除三角形.

同理, 可证得下述引理.

引理2.3.5 G 是2-连通的且若 $\{u, v\}$ 是 G 的一个点割集, 那么 uv 是交叉边.

此外, 我们还可以对图 G 中的分离4-圈做一些限制.

引理2.3.6 G 不包含两个“危险构型”在同侧的分离4-圈 C .

证明 假设 G 中存在两个“危险构型”在同侧的分离4-圈 C , 令 G_1 和 G_2 分别为为 G 的内部和外部 C -分支. 根据对称性, 不妨设两个“危险构型”在 G_2 中. 由引理2.3.4可知, C 是 G_1 中的导出圈. 根据 G 的极小性, 我们可以首先对 $(G - V(T), f)$ 进行一系列有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作来去掉 $G_2 - V(T)$ 中的所有点, 令上述操作的结果为 (G', f') . 令 $G^* = G_1 - x_1 - x_2$, F^* 是 G^* 的外面. 特别地, x_3x_4 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - x_3 - x_4$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, x_3x_4}$. 由推论2.2可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

引理2.3.7 不存在含两个交叉的边.

证明 假设边 $e = uv$ 与边 $e_1 = w_1z_1, e_2 = w_2z_2$ 交叉, 此时不存在预去除三角形 T . 我们根据与边 e_1, e_2 均邻接的顶点个数来考虑以下两种情况.

若存在点 w 与边 e_1, e_2 均邻接, 即 $w_1 = w_2$. 我们可以对 (G, f) 依次进行有效的“删除”操作来去掉点 w, v, z_1, z_2 并得到相应的操作结果 (G', f') . 令 $G^* = G - w - v, F^*$ 是 G^* 的面但不是 G 的面. 特别地, z_1z_2 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - z_1 - z_2$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, z_1z_2}$. 由**推论2.2**可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

若不存在点与边 e_1, e_2 均邻接. 由于 G 是边数最大的极小反例, 我们可以假设 $C = uw_1w_2vz_2z_1$ 是一个长度为6的圈且两个交叉均位于圈 C 的内部. 由**引理2.3.5**可知, 在圈 C 的内部不存在顶点. 令 $S = \{u, w_1, w_2\}, B$ 为由所有 S 中顶点的共同邻居组成的顶点集合. 因为每个 C 上的顶点度数至少为5, 由**引理2.3.4, 引理2.3.5**以及**引理2.3.6**可知, $B \cap V(C) = \emptyset$. 若存在点 $x \in B$, 根据**引理2.3.4**, 三角形 uw_1x, xw_1w_2 形成两个面的边界, 这表明 $d_G(w) = 4$, 与图 G 的最小度至少为5矛盾. 因此, $B = \emptyset$. 我们可以对 (G, f) 依次进行有效的“删除”操作来去掉点 u, w_1, w_2, z_1, z_2 并得到相应的操作结果 (G', f') . 令 $G^* = G - u - w_1 - w_2, F^*$ 是 G^* 的面但不是 G 的面. 特别地, z_1z_2 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - z_1 - z_2$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, z_1z_2}$. 由**推论2.2**可知, G 是 f -弱退化的.

引理2.3.8 $cr(G) = 1$.

证明 假设 $cr(G) = 2$, 边 $e = xx_0$ 和边 $f = yy_0$ 相互交叉. 令 $X = \{x, x_0, y, y_0\}$. 在图 $G - e - f$ 中添加一个新点 v 并且使得点 v 与 X 中所有点邻接, 所得到的新图记为 G_0 . 注意到, $cr(G) = 1$ 且由于 G 是边数最大的极小反例, x, y 邻接. 设 $T_0 = xyv$ 为 G_0 的预去除三角形以及函数 $f_0 \in \mathbb{N}^{G_0 - V(T_0)}$ 满足: 对于任意顶点 $v \in V(G_0 - V(T_0))$, $f_0(v) = 4 - |N_{G_0}(v) \cap V(T_0)|$. 由 $cr(G) > cr(G_0)$ 可知, $G_0 - V(T_0)$ 是 f_0 -弱退化的. 注意到, 我们可以在 (G, f) 上依次进行有效的“删除”操作来去掉点 x, y 并获得相应结果 (G', f') . 由于 $G' = G_0 - V(T_0)$ 以及 $f' = f_0$, G' 是 f' -弱退化的. 因此, G 是 f -弱退化的.

综上所述, 接下来只需证明 T 存在的情况. 令 $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 其中, 边 $e = v_1v_3$ 和边 $f = v_2v_4$ 互相交叉. 由于图 G 是一个边数最多的反例, 因此下述引理成立.

引理2.3.9 $G[X]$ 是一个完全图.

由**引理2.3.9**可知, $v_1v_2v_3v_4$ 是一个四圈且 v_1, v_2, v_3, v_4 在该四圈上按顺时针方向标记. 令 t_1, t_2, t_3 为 T 上按顺时针方向标记的三个顶点.

引理2.3.10 令 $h = uv$ 为边 e 或边 f . 若一个顶点 w 同时邻接 u, v , 则 $w \in X$.

证明 假设 $w \notin X$, 则令 $\{x, y\} = X \setminus \{u, v\}$. 由于圈 $wuxv, wuyv$ 的对称性, 所以不妨假设两个“危险构型”都出现在 $wuxv$ 所围成的闭区域中, 由**引理2.3.6**可知, 圈 $wuxv$ 不是分离圈. 因此, 顶点 x 的度数最多是4, 这与图 G 的最小度至少是5矛盾.

引理2.3.11 图 G 不含分离4-圈 C , 使得 $|V(C) \cap X| \geq 2$.

证明 假设图 G 中存在分离4-圈 C , 使得 $|V(C) \cap X| \geq 2$. 由于 C 是分离圈, C 不存在交叉. 令 G_1 和 G_2 为 G 的 C -分支, 其中 $X \subseteq V(G_2)$, 令 u, v 为 $V(C) \cap X$ 中的两个顶点. **引理2.3.6**表

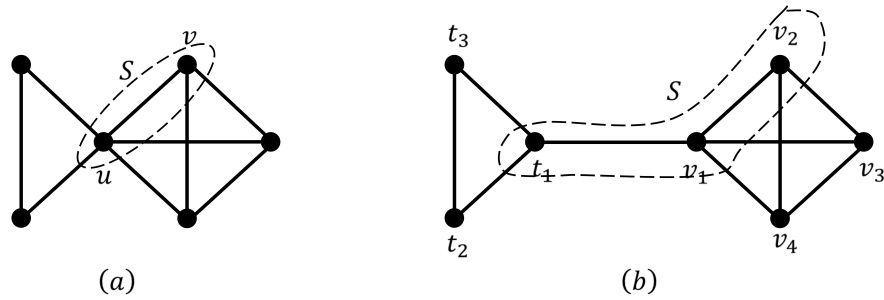


Figure 1. The configurations of Lemma 2.3.12 and Lemma 2.3.13
图 1. 引理2.3.12和引理2.3.13中的结构

明 G_1 和 G_2 中均包含一个“危险构型”. 由引理2.3.9 可知, u, v 在 G_2 中邻接. 引理2.3.6表明 uv 不是交叉边. 结合引理2.3.4可知, uv 是 C 上的一条边且 C 是 G_2 的一个导出圈. 令 $X = \{u, v, w, x\}$. 不失一般性, 我们假设 X 在 C 的内部且 T 在 C 的外部. 根据 G 的极小性, 我们可以首先对 $(G - V(T), f)$ 进行一系列有序的有效的“删除”以及“删除保存”操作来去掉 $G_1 - V(T)$ 中的所有点并得到相应的操作结果 (G', f') . 令 $G^* = G - u - v$, F^* 是 G^* 的面. 特别地, wx 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - x - w$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, xw}$. 由推论2.2可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

引理2.3.12 $V(T)$ 和 X 不交.

证明 假设 $u \in V(T) \cap X$, $v \in X$ 且 uv 是一条非交叉边, 见图1(a). 我们可以首先对 $(G - V(T), f)$ 进行有效的“删除”操作来去掉点 u 并得到相应的操作结果 (G', f') . 令 $G^* = G - u - v$, F^* 是 G^* 的面但不是 G 的面. 特别地, t_2t_3 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - t_2 - t_3$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, t_2t_3}$. 由推论2.2 可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

引理2.3.13 不存在边 tv , 使得 $t \in V(T)$ 且 $v \in X$.

证明 不失一般性, 假设 t_1v_1 是一条边. 令 $S = \{t_1, v_1, v_2\}$, 见图1(b). 由于 v_2, v_4 的对称性以及引理2.3.10, 我们不妨假设 $t_1v_4 \notin E(G)$. 一个点 $y \in V(G) \setminus V(T)$ 若与 S 中所有顶点相邻, 则称点 y 是一个“捣乱点”. 因为 $t_1v_4 \notin E(G)$, 所以 v_4 不是“捣乱点”. 进一步地, 若 $t_1v_3 \notin E(G)$, 那么由引理2.3.6 可知 v_2, v_4 中至少有一个点的度数不超过4, 矛盾. 因此, v_3 也不是“捣乱点”.

假设不存在“捣乱点”. 我们可以在 $(G - V(T), f)$ 上依次进行有效的“删除”操作来去掉点 v_1, v_2 并获得相应结果 (G', f') . 令 $G^* = G - t_1 - v_1 - v_2$, F^* 是 G^* 的面但不是 G 的面. 特别地, t_2t_3 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - t_2 - t_3$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, t_2t_3}$. 由推论2.2可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

假设存在“捣乱点” $y \in V(G) \setminus (X \cup V(T))$. 根据引理2.3.4, t_1v_1y, v_1v_2y 都是面(因此, 除了 y 没有其他“捣乱点”)且 $t_1v_2 \notin E(G)$. 引理2.3.11 表明 v_2 既不与 t_2 邻接也不与 t_3 邻接. 首先, 我们可以在 $(G - V(T), f)$ 上有效的“删除”操作来去掉点 v_1 并获得相应结果 $(G - V(T) - v_1, f_1)$. 接下来, 由于 $f_1(v_2) = 3 > 2 - |N_G(v) \cap \{t_1, t_2\}| = f_1(y)$, 我们可以进行“删除保存 $(G - V(T) - v_1, f_1, v_2, y)$ ”来去掉 v_2 并获得相应结果 (G', f') . 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - t_2 - t_3$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, t_2t_3}$. 由推论2.2 可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的.

令 $P = p_1 p_2 \dots p_k$ 是一条路, 其中 $p_1 \in V(T)$, $p_2, \dots, p_k \in V(G)$, $p_{k-1}, p_k \in X$ 且 P 上不存在交叉, 见图2. 令这条路的权值为 $2k - b$, 其中

$$b = \begin{cases} 1, & p_{k-2} p_k \in E(G); \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

令 $P \subseteq G$ 为一条权值极小的路. 由引理2.3.13可知, $k \geq 4$. 令 $\bar{P} = p_1 p_2 \dots p_{k-1}$, 见图2. \bar{P} 是一条导出路, 否则 P 会包含一条权值更小的子路. 不失一般性, 假设 $p_1 = t_1$. 由于 P 为一条权值极小的路, 易得下述三条引理:

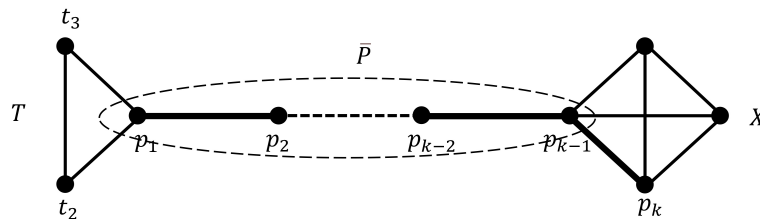


Figure 2. P and \bar{P}

图 2. P 和 \bar{P}

引理2.3.14 若 $p_i, p_j \in V(\bar{P})$ 均为点 $v \in V(G) \setminus V(P)$ 的邻居, 则 $|i - j| \geq 2$.

引理2.3.15 每个点 $v \in V(G) \setminus V(P)$ 至多与 $V(P)$ 中的三个点邻接.

引理2.3.16 若点 $v \in V(G) \setminus V(P)$ 恰好与 $V(P)$ 中的三个点邻接, 则 $v \notin V(T) \cup X$.

若 $v \in V(G) \setminus V(P)$ 与 $V(P)$ 中的三个点邻接, 则定义 $g_P(v) = p_i$, 其中 p_i 是点 v 在 P 上的三个邻居中指标 i 最大的点. 若 $v \in V(G) \setminus V(P)$ 至多与 $V(P)$ 中的两个点邻接, 则定义 $g_P(v) = v$. 若所讨论的路 P 是明确的, 则可以将 $g_P(v)$ 简记为 $g(v)$.

引理2.3.17 若 u, v 是 $V(G) \setminus V(P)$ 中两个不同的点, 则 $g(u) \neq g(v)$.

证明 假设存在 $V(G) \setminus V(P)$ 中两个不同的点 u, v 满足 $g(u) = g(v) = p_g$. 若 $g \neq k$, 那么根据引理2.3.14可知, u, v 共同邻接 p_{g-2}, p_{g-1}, p_g . 然而, 这与引理2.3.4或引理2.3.6 矛盾, 因此 $g = k$. 由于 P 的选择性, 所有 u, v 的邻居都来自于 $\{p_{k-3}, p_{k-2}, p_{k-1}, p_k\}$. 由引理2.3.4可知, u, v 不能同时与 p_{k-1} 邻接, 不妨假设 u 邻接 p_{k-3}, p_{k-2}, p_k . 根据引理2.3.6 以及引理2.3.11, 圈 $p_{k-2} p_{k-1} p_k u$ 不是分离圈, 因此, 由引理2.3.4可知 v 不与 p_{k-1} 邻接, 则 v 与 p_{k-2} 邻接, 但 $p_{k-2} p_{k-1} p_k v$ 是分离圈, 矛盾.

我们现在尝试通过对 $(G - V(T), f)$ 进行一系列有序的有效的去点操作使得其操作结果 (G', f') 满足推论2.2的假设条件. 我们将依次通过有效的去点操作去掉 P 上的所有点.

首先, 我们进行一个有效的去点操作 “删除 $(G - V(T), f, p_2)$ ” 并得到其操作结果 (G_3, f_3) . 注意到, 在 P 不会有 p_2 之外的点与 $V(T)$ 中的点邻接.

在去点过程中, 假设我们已经通过一些有效的去点操作去掉了 p_2, \dots, p_{j-1} , 我们令 (G_j, f_j) 为上述那些去点操作的结果. 接下来, 我们描述 p_j 在某一些情况下如何被去掉. 若不存在点 y 满足 $g(y) = p_j$, 那么由于 $f_j(p_j) \geq 1$, 我们可以继续利用有效的 “删除” 操作去掉 p_j . 否则, 存在点 y 满

足 $g(y) = p_j$. 若 $f_j(p_j) = 3$, 由于 $f_j(p_j) = 3 > 2 - |N_G(y) \cap \{t_2, t_3\}| = f_j(y)$, 我们可以继续利用有效的去点操作“删除保存 (G_i, f_i, p_i, y) ”去掉 p_j . 若 $f_j(p_j) = 2$, 则 p_j 有两个邻居 $p_i, p_j \in V(P)$, 其中 $i < l < j$. 由于 \bar{P} 是一条导出路, $f_j(p_j) = 2$ 只可能在 $j = k$ 且 p_{k-2} 邻接 p_k 的情况下出现. 由引理2.3.4 知, p_{k-1} 与 y 不邻接. 由于 y 在 P 上有且仅有三个邻居, 则 y 与 p_{k-3}, p_{k-2}, p_k 邻接. 现在我们考虑另外一条路 $P' = p_1 \dots p_{k-2} p_k p_{k-1}$. 注意到, P' 与 P 的权值相同, 因此, 我们不妨假设也存在一个点 y' 使得 y' 与 $p_{k-1}, p_{k-2}, p_{k-3}$ 邻接. 由引理2.3.4知, $yp_{k-3}p_{k-2}, yp_k p_{k-2}, y'p_{k-3}p_{k-2}, y'p_{k-2}p_{k-1}$ 是四个面, 见图3.

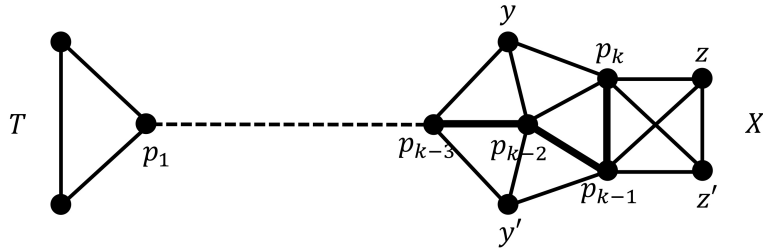


Figure 3. Positions of T, X, y and y'
 图 3. T, X, y 以及 y' 的位置

我们固定一系列依次去掉 p_2, \dots, p_{k-2} 的有效的去点操作并得到该操作结果 (G_{k-1}, f_{k-1}) . 注意到, (G_{k-1}, f_{k-1}) 满足

$$f_{k-1}(y) = 2 - |N_G(y) \cap \{t_2, t_3\}|,$$

$$f_{k-1}(y') = 2 - |N_G(y') \cap \{t_2, t_3\}|,$$

$$f_{k-1}(p_{k-1}) = 3.$$

因此, 我们可以继续在 (G_{k-1}, f_{k-1}) 上进行有效的去点操作“删除保存 $(G_{k-1}, f_{k-1}, p_{k-1}, y')$ ”并得到该操作结果 (G_k, f_k) . 注意到, (G_k, f_k) 满足

$$f_k(y) = 2 - |N_G(y) \cap \{t_2, t_3\}|,$$

$$f_k(y') = 2 - |N_G(y') \cap \{t_2, t_3\}|,$$

$$f_k(p_k) = 2.$$

令 $X \setminus \{p_{k-1}, p_k\} = \{z, z'\}$, 其中 z 与 p_k 通过一条非交叉边相邻接. 根据图的平面性, z' 不与 p_{k-2} 邻接, 因此 $f_k(z') = 3 > 2 = f_k(p_k)$. 令 $Q = p_1 \dots p_{k-1} z'$. 若不存在 $w' \notin \{y, y', p_k\}$ 使得 $g_Q(w') = z'$, 那么我们可以对 (G_k, f_k) 进行有效的去点操作“删除保存 (G_k, f_k, z', p_k) ”来去掉点 z' 并得到相应操作的结果 (G', f') . 令 $G^* = G - u - V(Q)$, F^* 是 G^* 的面但不是 G 的面. 特别地, $t_2 t_3$ 在面 F^* 上. 注意到, (G', f') 满足 $G' = G^* - t_2 - t_3$ 以及 $f' \geq f_{G^*, F^*, t_2 t_3}$. 由推论2.2 可知, $G - V(T)$ 是 f -弱退化的, 矛盾. 因此, 存在 $w' \notin \{y, y', p_k\}$ 使得 $g_Q(w') = z'$ 且 w' 与 p_{k-3}, p_{k-1}, z' 邻接.

同样地, 根据图的对称性, 我们也去考虑路 $Q' = p_1 \dots p_{k-2} p_k z$. 类似于上述对 Q 的考察可知, 存在 $w \notin \{y, y', p_{k-1}\}$ 使得 $g_{Q'}(w) = z$ 且 w 与 p_{k-3}, p_k, z 邻接. 然而, 根据图的平面

性, 四圈 $p_{k-3}p_{k-2}p_{k-1}w', p_{k-3}p_{k-2}p_k w$ 中必有一个会与引理2.3.6 产生矛盾.图4展示了 T 相对四圈 $p_{k-3}p_{k-2}p_{k-1}w', p_{k-3}p_{k-2}p_k w$ 的所有可能性.

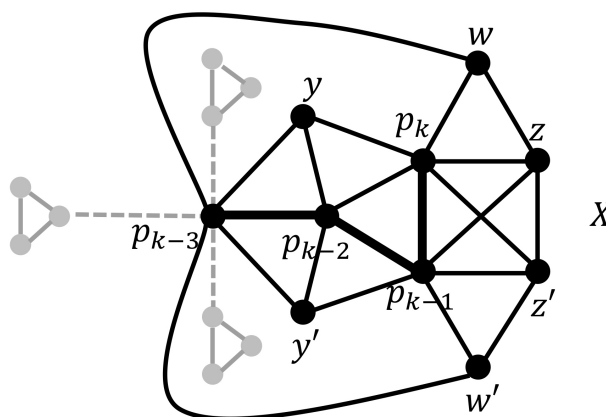


Figure 4. Positions of T, w and w'
 图 4. T, w 以及 w' 的位置

3. 总结与展望

在这篇论文中, 主要通过反证法去证明了至多含有2个交叉的图是4-弱退化的. 在证明过程中, 致力于去寻找一些可以使去点过程尽可能节省的子图结构, 通过极小反例的性质去将整个图的点有效地去掉, 从而推出矛盾来证明本文结论.

弱退化度是描述图的染色性质的一个新的定义. 在现阶段, 许多图类的弱退化度都是未知的. 因此, 弱退化度这方面的研究还存在着许多空白. 弱退化度是具有一定研究价值的, 研究一些特殊图类的弱退化度有利于更深刻地了解图的性质和特征, 如平面图以及一些不含 K_n -子式的图.

参考文献

- [1] Erdős, P., Rubin, A.L. and Taylor, H. (1979) Choosability in Graphs. *Congressus Numerantium*, **26**, 125-127.
- [2] Dvořák, Z. and Postle, L. (2018) Correspondence Coloring and Its Application to List-Coloring Planar Graphs without Cycles of Lengths 4 to 8. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **129**, 38-54. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.09.001>
- [3] Bernshteyn, A. and Kostochka, A. (2018) On Differences between DP-Coloring and List Coloring. *Siberian Advances in Mathematics*, **21**, 61-71.
- [4] Bernshteyn, A. and Lee, E. (2021) Weak Degeneracy of Graphs. arXiv:2111.05908
- [5] Thomassen, C. (1994) Every Planar Graph Is 5-Choosable. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **62**, 190-191. <https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1062>

- [6] 丁萧萧. 平面图和不含 K_5 -子式图的弱退化度[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4760-4773.
<https://doi.org/10.12677/AAM.2022.117501>
- [7] Wang, T. (2023) Weak Degeneracy of Planar Graphs without 4- and 6-Cycles.
arXiv: 2303.13267.
- [8] Han, M., Wang, T., Wu, J., Zhou, H. and Zhu, X. (2023) Weak Degeneracy of Planar Graphs and Locally Planar graphs. arXiv: 2303.07901
- [9] Dvořák, Z., Lidický, B. and Škrekovski, R. (2011) Graphs with Two Crossings Are 5-Choosable. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **25**, 1746-1753. <https://doi.org/10.1137/11082703X>
- [10] 胡建章. 含有交叉数的图的在线列表染色[J]. 运筹与模糊学, 2018, 8(2): 45-53.
- [11] 李旭珥, 朱绪鼎. 含2个交叉的图是5-DP-可染的[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(3): 252-258.