Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(8), 3753-3762
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.128369

利用极限与无穷小之间的关系快速求渐近线

郭建立[1]，张曦丹[2]，晏建学[3*]

[1]宁波城市职业技术学院，浙江 宁波
[2]云南财经大学，物流与管理工程学院，云南 昆明
[3]云南财经大学，商学院，云南 昆明

收稿日期：2023年7月26日；录用日期：2023年8月18日；发布日期：2023年8月24日

摘 要

函数图形描述的是“增减极值渐近线，凹凸拐点曲率圆”，其中渐近线描述函数图形变化趋势。求水平渐近线、斜渐近线需要针对函数关系 $y=f(x)$ 分别考虑两个单侧极限($x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$)，斜渐近线在第一次求出斜率之后还需要第二次求极限才能求出截距，垂直渐近线对应于函数的无穷间断点。隐函数 $F(x,y)=0$ 由于难以得出函数关系 $y=f(x)$，从而更加难以求出渐近线。本文梳理了显函数求垂直、水平、斜渐近线的四种题型及其快速解法，使得求渐近线快速简洁，同时给出了丰富的实例。创新之处在于利用极限与无穷小之间的关系快速简便求出渐近线，同时讨论了隐函数间接求垂直、水平、斜渐近线的方法。

关键词

显函数，隐函数，极限，无穷大，无穷小，无穷间断点，垂直渐近线，水平渐近线，
斜渐近线，四种题型

Using the Relationship between Limit and Infinitesimal to Find Asymptote Quickly

Jianli Guo[1], Xidan Zhang[2], Jianxue Yan[3*]

[1]Ningbo City College of Vocational Technology, Ningbo Zhejiang
[2]School of Logistics and Management Engineering, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
[3]School of Business, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Jul. 26th, 2023; accepted: Aug. 18th, 2023; published: Aug. 24th, 2023

*通讯作者。

文章引用: 郭建立, 张曦丹, 晏建学. 利用极限与无穷小之间的关系快速求渐近线[J]. 应用数学进展, 2023, 12(8): 3753-3762. DOI: 10.12677/aam.2023.128369

Abstract

The Graph of a function describes "increasing or decreasing, extreme value, asymptote, concave, convex, inflection point, curvature circle", in which the asymptote describes the change trend of the function graph. To calculate the horizontal Asymptote and the oblique Asymptote, two unilateral limits ($x \to -\infty$ or $x \to +\infty$) need to be considered respectively for the functional relationship $y = f(x)$. The oblique Asymptote needs to calculate the limit for the second time after calculating the slope for the first time to calculate the intercept. The vertical Asymptote corresponds to the infinite breakpoint of the function. The Implicit function $F(x, y) = 0$ is more difficult to find the Asymptote because it is difficult to find the functional relationship $y = f(x)$. This paper combs four types of problems and their fast solving process of explicit function to solve vertical, horizontal and oblique Asymptote, which makes solving Asymptote fast and concise, and gives a wealth of examples. The innovation lies in using the relationship between the limit and the infinitesimal to quickly and simply find the Asymptote. At the same time, the method of indirectly finding vertical, horizontal and oblique Asymptote with Implicit function is discussed.

Keywords

Explicit Function, Implicit Function, Limit, Infinity, Infinitesimal, Infinite Breakpoint, Vertical Asymptote, Horizontal Asymptote, Oblique Asymptote, Four Types of Problems

1. 渐近线的定义

当曲线上一点沿曲线无限远离原点或者无限接近间断点时，如果该点到一条直线的距离无限趋近于零，那么这条直线就称为曲 s 线的渐近线[1]。函数图形描述的是“增减极值渐近线，凹凸拐点曲率圆[2]”，其中渐近线描述函数图形变化趋势。渐近线分为：垂直渐近线、水平渐近线、斜渐近线[3]。

1.1. 垂直渐近线

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图形的垂直渐近线，也就是无穷间断点。

垂直渐近线可以有无数条，也就是有无数个无穷间断点，如 $y = \tan x$。

1.2. 水平渐近线

如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，则 $y = A$ 是函数 $y = f(x) = A + \alpha$ 图形的水平渐近线。

求水平渐近线、斜渐近线需要针对函数关系 $y = f(x)$ 分别考虑两个单侧极限（$x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$）。水平渐近线至多有两条($x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$)。

1.3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x \to \infty}\left[f(x) - kx - b \right] = 0$，则 $y = kx + b$ 是函数 $y = f(x) = kx + b + \alpha$ 图形的斜渐近线。

斜渐近线也至多有两条($x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$)。

水平渐近线与斜渐近线总共最多有两条，不可能既是水平渐近线，同时又是斜渐近线。

根据 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$，求出 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$。

常规方法求渐近线都要求极限，因而做题难度偏大，尤其是求斜渐近线需求两次极限，难度最大。

隐函数 $F(x,y)=0$ 由于难以得出函数关系 $y=f(x)$，从而更加难以求出渐近线。

笔者通过多年教学实践总结出显函数 $y=f(x)$ 及隐函数 $F(x,y)=0$ 渐近线的快速简便方法——通过拆项及泰勒公式展开，然后利用极限与无穷小之间的关系即可求出，整个求渐近线过程避免求极限！

2. 求显函数 $y=f(x)$ 渐近线的快速简便方法

1) 求垂直渐近线就是找到函数 $y=f(x)$ 图形的无穷间断点 x_0，也就求出了垂直渐近线 $x=x_0$。

2) 求水平渐近线就是找到函数 $y=f(x)=A+O\left(\frac{1}{x}\right)$，也就求出了水平渐近线 $y=A$。

3) 求斜渐近线就是找到函数 $y=f(x)=kx+b+O\left(\frac{1}{x}\right)$，也就求出了斜渐近线 $y=kx+b$。

3. 显函数求渐近线实例

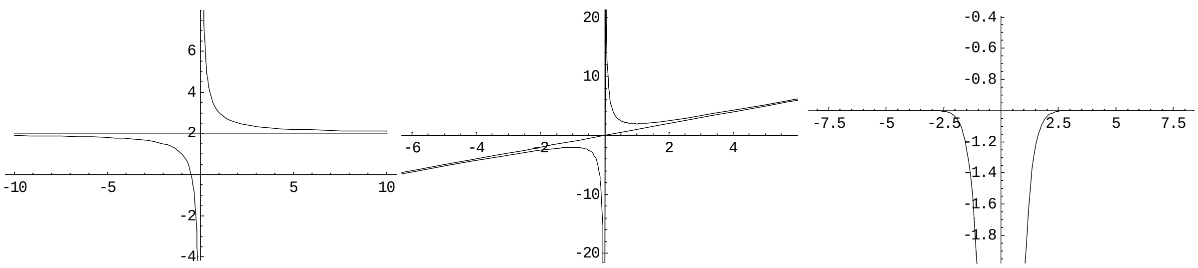
3.1. 简单题型

【例 1】 $y=2+\frac{1}{x}$ 的垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，水平渐近线为 $y=2$。

【例 2】[5] $y=x+\frac{1}{x}$ 的垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，斜渐近线为 $y=x$。

【例 3】 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的垂直渐近线 $x=0$ (无穷间断点)，水平渐近线 $y=1$。

函数图形如下图 1。



例 1　　例 2　　例 3

Figure 1. Graph of a function [4]

图 1. 函数图形[4]

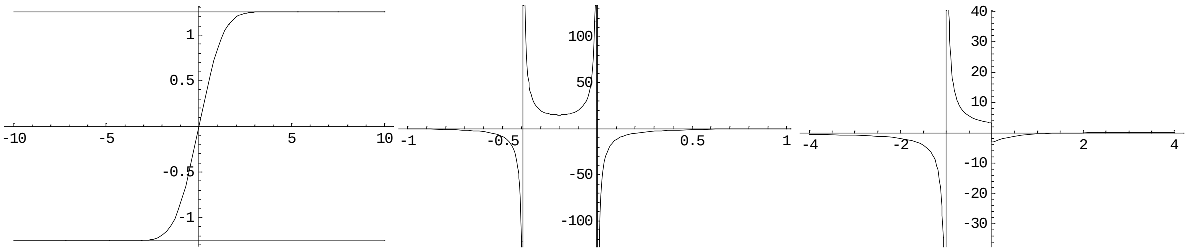
【例 4】[6] $y=f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，$f(+\infty)=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$，

$f(-\infty)=\int_0^{-\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$，水平渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$。

【例 5】[7] $y=\frac{2x^2-3}{5x^2+2\sin x}=\frac{2-\frac{3}{x^2}}{5+2\frac{\sin x}{x^2}}$，垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，水平渐近线为 $y=\frac{2}{5}$。

【例 6】[8] $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}$，垂直渐近线为 $x=-1$ (无穷间断点)，水平渐近线为 $y=0$。

函数图形如下图 2。



例 4　　例 5　　例 6

Figure 2. Graph of a function [4]
图 2. 函数图形[4]

3.2. 拆项题型

【例 7】[9] $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x^2-1+x+1}{(x-1)(x+1)}=1+\dfrac{1}{x-1}$，垂直渐近线为 $x=1$ (无穷间断点)，水平渐近线为 $y=1$。

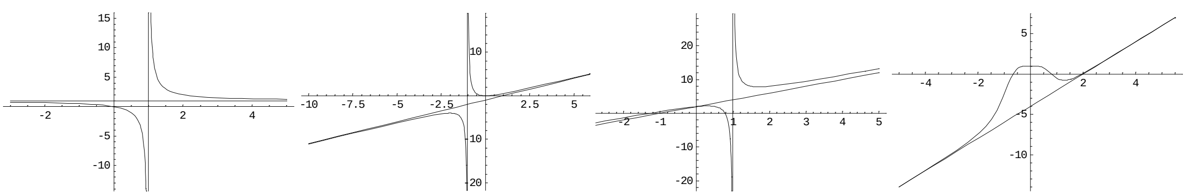
【例 8】 $y=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-1}=\dfrac{x\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$，垂直渐近线为 $x=-1$ (无穷间断点)，斜渐近线为 $y=x-1$。

【例 9】 $y=\dfrac{2x^2+x+2}{x-1}=\dfrac{2x(x-1)+3(x-1)+5}{x-1}=2x+3+\dfrac{5}{x-1}$，垂直渐近线为 $x=1$ (无穷间断点)，斜渐近线为 $y=2x+3$。

【例 10】 $y=\dfrac{2x^5-4x^4+1}{x^4+1}=\dfrac{2x\left(x^4+1\right)-4\left(x^4+1\right)-2x+5}{x^4+1}=2x-4-\dfrac{2x-5}{x^4+1}$。

斜渐近线为 $y=2x-4$。

函数图形如下图 3。



例 7　　例 8　　例 9　　例 10

Figure 3. Graph of a function [4]
图 3. 函数图形[4]

【例 11】 $y=\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{(1+x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=\dfrac{(1+x)\left(\mathrm{e}^x-1+1\right)}{\mathrm{e}^x-1}=1+x+\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x-1}$。

垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，水平渐近线 $y=0$ （$x\to-\infty$），斜渐近线为 $y=x+1$ （$x\to+\infty$）。

【例 12】[5] $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^{x}\right)=\frac{1}{x}+\ln\left[e^{x}\left(1+e^{-x}\right)\right]=x+\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)$。

垂直渐近线 $x=0$ (无穷间断点)，水平渐近线 $y=0$ （$x\to-\infty$），斜渐近线 $y=x$ （$x\to+\infty$）。

【例 13】[9]

$$y=\frac{1}{x(x-1)}+\ln\left(1+e^{x}\right)=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}+\ln\left[e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)\right]=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+x+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)。$$

垂直渐近线 $x=0$， $x=1$ (无穷间断点)，水平渐近线 $y=0$ （$x\to-\infty$），斜渐近线 $y=x$ （$x\to+\infty$）。

【例 14】[10] $y=\frac{x^{3}+4}{x^{2}}=x+\frac{4}{x^{2}}$ 垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，斜渐近线 $y=x$。

函数图形如下图 4。

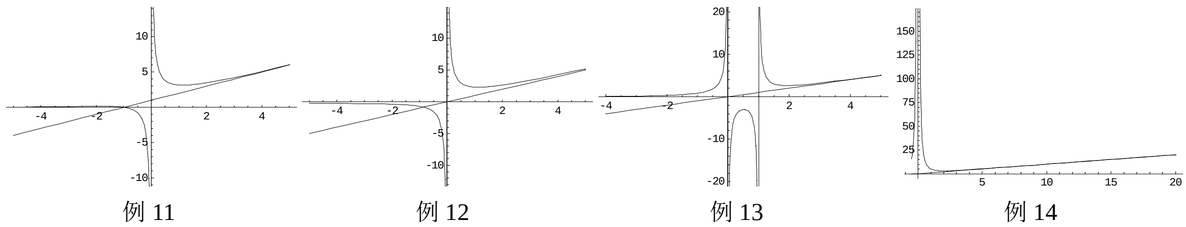


Figure 4. Graph of a function [4]
图 4. 函数图形[4]

3.3. 泰勒公式展开题型

【例 15】[11] $y=x\sin\frac{1}{x}=x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^{2}}\right)\right)=1+o\left(\frac{1}{x}\right)$，水平渐近线 $y=1$。

【例 16】[1] $y=2xe^{\frac{1}{x}}=2x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^{2}}+o\left(\frac{1}{x^{2}}\right)\right)=2x+2+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$，垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，斜渐近线为 $y=2x+2$。

【例 17】[12]

$y=\frac{x^{2}+x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}e^{\frac{1}{x}}=(x+2)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^{2}}+o\left(\frac{1}{x^{2}}\right)\right)=x+3+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$，垂直渐近线为 $x=0$ (无穷间断点)，斜渐近线为 $y=x+3$。

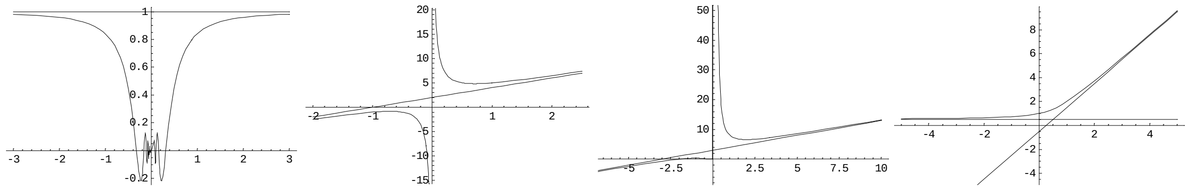
【例 18】[13]

$$y=x+\sqrt{x^{2}-x+1}=x+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{3}{4}}=x\pm\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[1+\frac{\frac{3}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=x\pm\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[1+o\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$y=x\pm\left(x-\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)，\text{渐近线 } y=x\pm\left(x-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}2x-\frac{1}{2} & x\to+\infty\\ \frac{1}{2} & x\to-\infty\end{cases}$$

函数图形如下图 5。

【例 19】(2020 数二 15 分)曲线 $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}$ ($x>0$)的斜渐近线。



例 15　　例 16　　例 17　　例 18

Figure 5. Graph of a function [4]
图 5. 函数图形[4]

$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}=x\frac{x^x}{(1+x)^x}=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=x\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{-1}\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)。$$

这里：$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$，$-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$，

$$\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

$y=\mathrm{e}^{-1}\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$，斜渐近线为 $y=\mathrm{e}^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)$。

【例 20】[14] $y=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$ 垂直渐近线 $x=-3$（无穷间断点），渐近线 $y=\begin{cases}-\frac{1}{2} & x\to+\infty\\ \frac{5}{2}-2x & x\to-\infty\end{cases}$

$$y=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=1-x\pm x\left(1-\frac{3}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}=1-x\pm x\left(1-\frac{1}{2}\frac{3}{3+x}+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{3}{3+x}\right)^2+o\left(\frac{3}{3+x}\right)^2\right),$$

$$y=1-x\pm x\mp\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\frac{3}{3+x}+o\left(\frac{3}{3+x}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\frac{3}{3+x}+o\left(\frac{3}{3+x}\right) & x>0\\ \frac{5}{2}-2x\pm\frac{3}{2}\frac{3}{3+x}+o\left(\frac{3}{3+x}\right) & x<0\end{cases}。$$

【例 21】(2023 数一 5 分)求 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$ 的渐近线。

解：垂直渐近线：$x=1$（无穷间断点），$x=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$（无穷间断点），

$$y=x\ln\left(\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)\right)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=x+x\left(\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}-\frac{1}{2\mathrm{e}^2(x-1)^2}+o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)\right),$$

$y=x+\frac{x-1+1}{\mathrm{e}(x-1)}+o\left(\frac{1}{x-1}\right)=x+\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}+o\left(\frac{1}{x-1}\right)$，斜渐近线：$y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$

【例 22】[11]求 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ 的渐近线。

解：$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\infty$，垂直渐近线：$x=-\frac{1}{2}$（无穷间断点）。

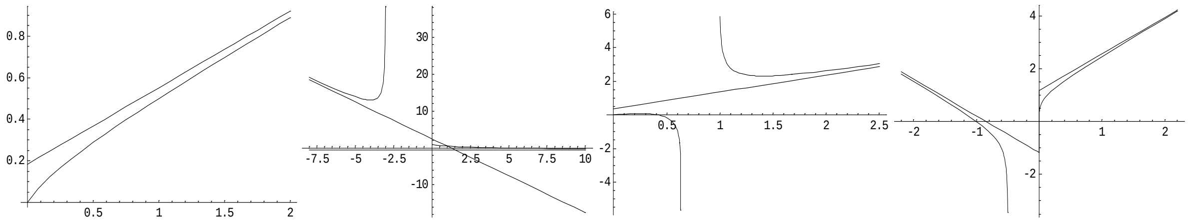
$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\sqrt{1+4x}\left(\ln\frac{1}{x}+\ln(1+2x)\right)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln\frac{1}{x}=0,$$

$$y=2|x|\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)=2|x|\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\ln 2+\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$y=2|x|\left(\ln 2+\frac{\ln 2}{8x}+\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),\quad y=2|x|\ln 2+\left(\frac{\ln 2}{4}+1\right)\frac{|x|}{x}+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

斜渐近线：$y=\begin{cases}2x\ln 2+\left(\dfrac{\ln 2}{4}+1\right) & x\to+\infty\\ -2x\ln 2-\left(\dfrac{\ln 2}{4}+1\right) & x\to-\infty\end{cases}$

函数图形如下图 6。



例 19　例 20　例 21　例 22

Figure 6. Graph of a function [4]
图 6. 函数图形[4]

3.4. 等价无穷小替换题型

【例 23】[12] $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$. $x\to-\infty$ 时，$\frac{\pi}{2}+\arctan x\sim-\frac{1}{x}$，

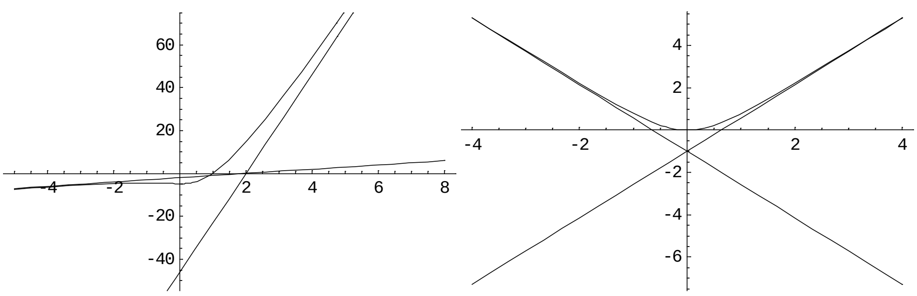
$$(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\sim(x-1)e^{-\frac{1}{x}}=(x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x-2+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$x\to+\infty$ 时，$\arctan x-\frac{\pi}{2}\sim-\frac{1}{x}$，$(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\sim e^{\pi}(x-1)e^{-\frac{1}{x}}=e^{\pi}(x-2)+O\left(\frac{1}{x}\right)$；

$x\to-\infty$ 时，一条斜渐近线为 $y=x-2$；$x\to+\infty$ 时，另一条斜渐近线为 $y=e^{\pi}(x-2)$。

【例 24】[15]求 $y=x\arctan x$ 的渐近线。$x\to-\infty$ 时，$\frac{\pi}{2}+\arctan x\sim-\frac{1}{x}$，

$$x\arctan x=x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\sim x\left(-\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}x-1;$$



例 23　例 24

Figure 7. Graph of a function [4]
图 7. 函数图形[4]

$x\to+\infty$ 时，$\arctan x-\frac{\pi}{2}\sim-\frac{1}{x}$，$x\arctan x=x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\sim x\left(-\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}x-1$。

$y=x\arctan x$ 的斜渐近线为 $y=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}x-1 & x\to-\infty\\ \frac{\pi}{2}x-1 & x\to+\infty\end{cases}$

函数图形如下图 7。

4. 隐函数求渐近线

隐函数因函数关系 $y=f(x)$ 无法写出，只能通过隐函数方程 $F(x,y)=0$ 间接求渐近线。

4.1. 垂直渐近线

如果 $\lim\limits_{y\to\infty}x=x_0$，则 $x=x_0$ 是隐函数 $F(x,y)=0$ 图形的垂直渐近线，也就是无穷间断点。

垂直渐近线可以有无数条，也就是有无数个无穷间断点。

4.2. 水平渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}y=A$，则 $y=A$ 是隐函数 $F(x,y)=0$ 图形的水平渐近线。

水平渐近线至多有两条($x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$)。

4.3. 斜渐近线

如果 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ 存在，则隐函数 $F(x,y)=0$ 图形的斜渐近线 $y=kx+b$ 存在。

将 $y=kx+b$ 带入隐函数方程 $F(x,y)=0$ 求出 b。

斜渐近线也至多有两条($x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$)。

4.4. 隐函数求渐近线实例

【例 25】[15]求隐函数 $xy^3+x^4y^2+2x^4y+3x^3+1=0$ 的渐近线。

解：两边同除 x、y 最高次数 x^4、y^3，得：

$y^2+2y+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{y^3}{x^3}=0$，$x+\frac{x^4}{y}+\frac{2x^4}{y^2}+\frac{3x^3+1}{y}=0$。

当 $x\to\infty$ 时，$y^2+2y=0$，隐函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线为 $y=0$，$y=-2$；

当 $y\to\infty$ 时，$x=0$，隐函数 $y=f(x)$ 图形的垂直渐近线为 $x=0$。

$x^4\frac{y^3}{x^3}+x^6\frac{y^2}{x^2}+2x^5\frac{y}{x}+3x^3+1=0$，若 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ 存在，则 $x\to\infty$ 时等式左边为 ∞，与右边为 0 矛盾，所以隐函数 $y=f(x)$ 没有斜渐近线。

【例 26】[15]隐函数 $(x-1)(y-3)=1$，求渐近线。

解：$x\to\infty,y\to3$，水平渐近线 $y=3$；$y\to\infty,x\to1$，垂直渐近线 $x=1$；

$(x-1)\left(x\cdot\frac{y}{x}-3\right)=1$，若 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ 存在，则 $x\to\infty$ 时等式左边为 ∞ 与右边为常数矛盾，

所以隐函数 $y=f(x)$ 没有斜渐近线。

【例 27】 [16]笛卡尔叶形线曲线 $x^3+y^3=3axy$，$1+\frac{y^3}{x^3}=\frac{3ay}{x^2}$，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$，则 $x\to\infty$ 时 $1+k^3=0$，

$k=-1$。将 $y=-x+b$ 带入曲线方程 $x^3+y^3=3axy$，得：

$b\left(3x^2-3xb+b^2\right)=x^3+\left(-x+b\right)^3=3ax\left(-x+b\right)=-3ax^2+3abx$，$b\left(3-\dfrac{3b}{x}+\dfrac{b^2}{x^2}\right)=-3a+\dfrac{3ab}{x}$，$x\to\infty$ 时，

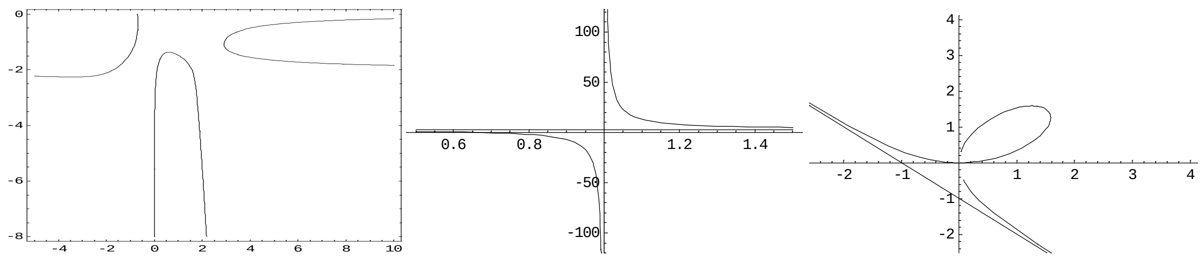
$b=-a$，斜渐近线 $x+y+a=0$。

常规求法：设 $y=tx$，则 $x^3+t^3x^3=3atx^2$，参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

当 $x\to\infty$ 时 $t\to-1$，$x+y+a=\dfrac{3at\left(1+t\right)}{\left(1+t\right)\left(1-t+t^2\right)}+a=\dfrac{a\left(1+t\right)^2}{1-t+t^2}\to0$，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{3at^2}{3at}=\lim\limits_{t\to-1}t=-1$，

$b=\lim\limits_{t\to-1}\left(y-kx\right)=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{3at\left(1+t\right)}{\left(1+t\right)\left(1-t+t^2\right)}=-a$，斜渐近线 $y=-x-a$。

函数图形如下图 8。



例 25　　例 26　　例 27

Figure 8. Graph of a function [4]
图 8. 函数图形[4]

本文中的所有图形均使用 Mathematica 4.0 绘制。

基金项目

《商务智能与大数据金融》建设项目(11511514002)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[2] 晏建学. 微积分、线性代数、概率论与数理统计解题指导及提高[M]. 昆明: 云南科技出版社, 2018.
[3] 马锐主. 高等数学[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[4] [美]斯蒂芬·沃尔夫雷姆. Mathematica 全书[M]. 第 4 版. 赫孝良, 周义仓, 译. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.
[5] 李永乐. 数学历年真题权威解析数学一[M]. 北京: 国家行政学院出版社, 2019.
[6] 汤家凤. 2020 考研数学接力题典 1800 题目册数学三[M]. 北京: 中国原子能出版社, 2019.
[7] 张宇. 张宇考研数学基础 30 讲数一[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2020.
[8] 汤家凤. 2022 考研数学接力题典 1800 题目册数学一[M]. 北京: 中国原子能出版社, 2020.
[9] 李永乐. 2019 考研数学复习全书[M]. 北京: 国家行政学院出版社, 2019.
[10] 张宇. 张宇考研数学基础 30 讲数一基础 300 题[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2020.
[11] 张宇. 张宇考研数学题源探析经典 1000 题[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2019.
[12] 汤家凤. 2023 考研数学接力题典 1800 题目册数学三[M]. 北京: 中国政法大学出版社, 2021.

[13] 李永乐. 分阶习题同步训练数学一[M]. 北京: 国家行政学院出版社, 2019.

[14] 李永乐. 数学基础过关 660 题数学一[M]. 北京: 国家行政学院出版社, 2019.

[15] 考研数学渐近线相关知识点及其解题技巧[EB/OL]. https://mp.weixin.qq.com/s?search_click_id=15135066713143917286-1692179062721-1814163846&__biz=Mzg5NDMzMzE1Nw==&mid=2247485892&idx=1&sn=f4f3836649f608d2d5d681245a54a859&chksm=c020704ef757f958c69f54203885b1e6c7353c704d2fe509457cf9daa21474529fa566a1ef7f&scene=7&subscene=10000&clicktime=1692179062&enterid=1692179062&sessionid=0&ascene=65&fasttmpl_type=0&fasttmpl_fullversion=6814356-zh_CN-zip&fasttmpl_flag=0&realreporttime=1692179062744#rd , 2022-04-12.

[16] 陈文灯, 黄先开, 曹显兵. 2006 版数学题型集萃与练习题集(经济类) [M]. 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2005.