Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(9), 3945-3953
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129386

Hans汉斯

$\mathcal{O}$-算子的二次上同调

黄丹莉

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年8月9日；录用日期：2023年9月3日；发布日期：2023年9月11日

摘　要

本文主要介绍三元组(A,B,ε)上的关于双A-模M的$\mathcal{O}$-算子的二次上同调，并进一步利用$\mathcal{O}$-算子给出M的结合代数结构及对应三元组(M,B,ε)的二次Hochschild上同调与$\mathcal{O}$-算子二次Hochschild上同调之间的关系。

关键词

二次上同调，$\mathcal{O}$-算子

Secondary Cohomology of $\mathcal{O}$-Operators

Danli Huang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Aug. 9th, 2023; accepted: Sep. 3rd, 2023; published: Sep. 11th, 2023

Abstract

This paper mainly introduced the secondary cohomology of $\mathcal{O}$-operators on (A,B,ε) with respect to the A-bimodule M. The $\mathcal{O}$-operator is further used to derive the associative algebraic structure on M and the relation between the secondary Hochschild cohomology of corresponding triple (M,B,ε) and the secondary Hochschild cohomology of $\mathcal{O}$-operators.

Keywords

Secondary Cohomology, $\mathcal{O}$-Oparators

文章引用: 黄丹莉. $\mathcal{O}$-算子的二次上同调[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 3945-3953.
DOI: 10.12677/aam.2023.129386

1. 引言

Hochschild 上同调由 Hochschild 提出，常用来描述结合代数的形变[1]，之后 Loday 系统介绍了循环同调与 Hochchild 上同调之间的关系，及相关应用[2]。为了给出代数 A 形变的 B-代数结构，Mihai 介绍了形似 Hochschild 上同调结构的结合代数的二次上同调[3]。以此为基础又进一步研究了二次上同调的循环同调、扩张、导出算子等[4] [5] [6]，这些都丰富并完善了二次上同调的结构特征，并且不难发现二次上同调可看成 Hochschild 上同调的等价变形，因此可以进一步考虑结合代数 Hochschild 上同调的相关结构能否推广到二次上同调上。

在[7]中，Das 介绍了 $\mathcal{O}$-算子的上同调的结构并给出了其与 Hochschild 上同调之间的关系，本文延续 Das 的思想方法，以[2]为依据，进一步探究结合代数上的 $\mathcal{O}$-算子的二次上同调及与对应结合代数的二次上同调之间的关系。

文中所有向量空间、线性映射、张量积都是在特征为 0 的域 K 上讨论。

2. 预备知识

在介绍 $\mathcal{O}$-算子的二次上同调之前，先介绍 $\mathcal{O}$-算子的定义并说明 $\mathcal{O}$-算子可以导出一个相关的结合代数，进一步方便我们给出 $\mathcal{O}$-算子的二次上同调与二次 Hochschild 上同调之间的关系。

定义 2.1 [7] 设 A 是结合代数并且 M 是 A-双模，若线性映射 $T:M\to A$ 对于任意 $m,n\in M$，满

$$T(m)T(n)=T(m\cdot T(n)+T(m)\cdot n)$$

则称之为代数 A 上的关于 A-双模 M 的 $\mathcal{O}$-算子。

实际上，进一步地，可以利用模作用和 $\mathcal{O}$-算子定义在线性空间 M 上的代数运算：

$$m*n=m\cdot T(n)+T(m)\cdot n\text{。}$$

在此情况下，自然可以定义代数 A 上的双模结构。

定义 2.2 [7] 设 $T:M\to A$ 是代数 A 上的 $\mathcal{O}$-算子。定义：$\forall m\in M,a\in A$

$$l:M\otimes A\to A,\ l(m,a)=T(m)a-T(m\cdot a),$$

$$r:A\otimes M\to A,\ r(a,m)=aT(m)-T(a\cdot m),$$

则 M 是 (A,l,r) 上的双模。

接下来，介绍二次上同调的定义。

若 A 是结合代数，B 是交换代数并且 $\varepsilon:B\to A$ 是满足 $\varepsilon(B)\subset Z(A)$ (A 的中心)的代数同态。假设线性空间 M 是 A-双模，并且满足对于任意 $u\in M$，$b\in B$，有 $\varepsilon(b)\cdot u=u\cdot\varepsilon(b)$。令

$$C^n((A,B,\varepsilon);M):=Hom_k\left(A^{\otimes n}\otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}},M\right),$$

并且，$A^{\otimes n}\otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}}$ 的任意一个元素都记作

DOI: 10.12677/aam.2023.129386

$$\otimes\begin{pmatrix} a_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} & b_{1.n+1} \\ 1 & a_2 & \cdots & b_{2,n} & b_{2.n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n & b_{n.n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix},$$

其中，$a_i \in A$，$b_{i,j} \in B$，$1 \in k$。对于任意 $f \in C^n\left(\left(A,B,\varepsilon\right);M\right)$，定义

$$d_n^\varepsilon : C^n\left(\left(A,B,\varepsilon\right);M\right) \to C^{n+1}\left(\left(A,B,\varepsilon\right);M\right),$$

$$d_n^\varepsilon\left(f\right)\left(\otimes\begin{pmatrix} a_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ 1 & a_2 & \cdots & b_{2,n} & b_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n & b_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\varepsilon\left(b_{1,2}b_{1,3}\cdots b_{1,n+1}\right) f\left(\otimes\begin{pmatrix} a_2 & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} & b_{2,n+1} \\ 1 & a_3 & \cdots & b_{3,n} & b_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n & b_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f\left(\otimes\begin{pmatrix} a_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,i}b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ 1 & a_2 & \cdots & b_{2,i}b_{2,i+1} & \cdots & b_{2,n} & b_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \varepsilon\left(b_{i,i+1}\right)a_i a_{i+1} & \cdots & b_{i,n}b_{i+1,n} & b_{i,n+1}b_{i+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & a_n & b_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix}\right)$$

$$+(-1)^n f\left(\otimes\begin{pmatrix} a_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 1 & a_2 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix}\right) a_{n+1}\varepsilon\left(b_{1,n+1}b_{2,n+1}\cdots b_{n,n+1}\right).$$

实际上，Staic。等人也进一步对二次 Hochschild 上同调结构进行了研究[4]，表示其具有 G-代数结构，即可以定义在 $\oplus_{n\geq1} C^n\left(\left(A,B,\varepsilon\right);M\right) := Hom_k\left(A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}}, M\right)$ 上的分次李代数结构。为了方便计算，对任意 $0 \leq i-1 \leq j \leq n$，记

$$T_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}-1} = \otimes\begin{pmatrix} a_i & \cdots & b_{i,j} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & a_j \end{pmatrix},$$

为任意子张量矩阵。对 $\forall f^n \in C^n\left(\left(A,B,\varepsilon\right);M\right), g^m \in C^m\left(\left(A,B,\varepsilon\right);M\right)$，定义

$$\left[f^n, g^m\right] = f^n \circ g^m - (-1)^{(n-1)(m-1)} g^m \circ f^n,$$

其中 $f^n \circ g^m = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)} f^n \circ_i g^m$，并且

$$f^n \circ_i g^m \left(\otimes \begin{pmatrix} a_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n+m-2} & b_{1,n+m-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & b_{2,n+m-2} & b_{2,n+m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n+m-2} & b_{n+m-2,n+m-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n+m-1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= f^n \left(\otimes \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & b_{1,i-1} & \prod_{j=i}^{m+i-1} b_{1,j} & b_{1,m+i} & \cdots & b_{1,n+m-1} \\ 1 & \cdots & b_{2,i-1} & \prod_{j=i}^{m+i-1} b_{2,j} & b_{2,m+i} & \cdots & b_{2,n+m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & a_{i-1} & \prod_{j=i}^{m+i-1} b_{i-1,j} & b_{i-1,m+i} & \cdots & b_{i-1,n+m-1} \\ 1 & \cdots & 1 & g^m\left(T_{m+i-1}^{i-1}\right) & \prod_{j=i}^{m+i-1} b_{j,m+i} & \cdots & \prod_{j=i}^{m+i-1} b_{j,n+m-1} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & a_{m+i} & \cdots & b_{m+i,n+m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & a_{n+m-1} \end{pmatrix} \right).$$

实际上，对任意 $b \in B$，映射 $\pi \in C^2\left((A,B,\varepsilon);M\right)$ 满足

$$\pi\left(\otimes \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \right) = \varepsilon(b) a_1 a_2,$$

则有 $\pi \circ \pi = 0$。因此 $[\pi,]$ 自然地可以定义在 $\oplus_{n\geq 1} C^n\left((A,B,\varepsilon);M\right) := Hom_k\left(A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes \frac{n(n-1)}{2}}, M\right)$ 上的微分复形。

3. $\mathcal{O}$ 算子的二次上同调

假设 A 是一个结合代数，B 是交换代数，$\varepsilon : B \to A$ 是满足 $\varepsilon(B) \subset Z(A)$ 的代数同态，因此对于任意 $b \in B$ 可以定义双线性映射 $m_b : A \otimes A \to A$，$m_b(a_1 \otimes a_2) = \varepsilon(b) a_1 a_2$。不难验证对于任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$，$q \in k$，都有一下恒等式成立：

$$m_{b_1+b_2}(a_1 \otimes a_2) = m_{a_1}(a_1 \otimes a_2) + m_{b_2}(a_1 \otimes a_2),$$

$$m_{qb}(a_1 \otimes a_2) = q m_b(a_1 \otimes a_2),$$

$$m_{b_2 b_3}\left(m_{b_1} \otimes id\right) = m_{b_1 b_2}\left(id \otimes m_{b_3}\right)。$$

现在，如果向量空间 M 是 A-双模，并且对于任意 $m \in M$，$b \in B$，有 $\varepsilon(b) \cdot m = m \cdot \varepsilon(b)$。对于三元组 (A,B,ε) 可以定义双线性映射：

$$L_b : M \otimes A \to M, m \otimes a \mapsto \varepsilon(b) \cdot (m \cdot a),$$

$$R_b : A \otimes M \to M, a \otimes m \mapsto \varepsilon(b) \cdot (a \cdot m)。$$

类似地，不难验证对于任意 $b_1, b_2, b_3 \in B$，$q \in k$，L_b 和 R_b 满足一下恒等式：

$$L_{b_1+b_2}(m\otimes a)=L_{b_1}(m\otimes a)+L_{b_2}(m\otimes a)\text{，}\tag{3.1}$$

$$R_{b_1+b_2}(m\otimes a)=R_{b_1}(m\otimes a)+R_{b_2}(m\otimes a)\text{，}\tag{3.2}$$

$$L_{qb}(m\otimes a)=qL_b(m\otimes a)\text{，}\tag{3.3}$$

$$R_{qb}(m\otimes a)=qR_b(m\otimes a)\text{，}\tag{3.4}$$

$$L_{b_2b_3}(L_{b_1}\otimes id)=L_{b_1b_2}(id\otimes m_{b_3})\text{，}\tag{3.5}$$

$$R_{b_2b_3}(m_{b_1}\otimes id)=R_{b_1b_2}(id\otimes R_{b_3})\text{。}\tag{3.6}$$

实际上，m_b，l_b 和 r_b 与结合代数、双模作用的定义类似，因此也可以进一步考虑在三元组 (A,B,ε) 上关于 A-双模 M 的 $\mathcal{O}$-算子。

若线性映射 $T:M\to A$ 是代数 A 上的关于 A-双模 M 的 $\mathcal{O}$-算子，满足 $T(m)T(n)=T(m\cdot T(n)+T(m)\cdot n)$，自然对于任意 $b\in B$，有

$$m_b(T(u)\otimes T(v))=T(L_b(u\otimes T(v))+R_b(T(u)\otimes v))\text{。}$$

以此为基础，参考[7]的处理方式，考虑三元组 (A,B,ε) 上 $\mathcal{O}$-算子的二次上同调。

已知如果结合代数 A 有 A-双模 M，则 $A\oplus M$ 是结合代数：

$$(a_1,m_1)(a_2,m_2)=(a_1a_2,a_1\cdot m_2+m_1\cdot a_2)\text{。}$$

对于三元组 (A,B,ε) 定义 $\varepsilon_M:B\to A\oplus M,b\mapsto(\varepsilon(b),0)$，满足 $\varepsilon_M(B)\subset Z(A\oplus M)$。自然地，可以定义三元组 $(A\oplus M,B,\varepsilon_M)$ 的二次 Hochschild 上同调及分次李代数：

$$\left(\oplus_{n\geq1}C^n((A\oplus M,B,\varepsilon_M);A\oplus M):=Hom_k\left((A\oplus M)^{\otimes n}\otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}},A\oplus M\right),[\,,\,]\right),$$

进一步利用 Voronov 的方法定义在 $\oplus_{n\geq1}Hom_k\left(M^{\otimes n}\otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}},A\right)$ 上的分次李代数结构：

$$[F^n,G^m]_M\left(\otimes\begin{pmatrix}u_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m+n-1} & b_{1,m+n}\\ 1 & u_2 & \cdots & b_{2,m+n-1} & b_{2,m+n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & u_{m+n}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{m(i-1)}F^n\left(\otimes\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & b_{1,i-1} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{1,j} & b_{1,m+i+1} & \cdots & b_{1,m+n}\\ 1 & \cdots & b_{2,i-1} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{2,j} & b_{2,m+i+1} & \cdots & b_{2,m+n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & u_{i-1} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{i-1,j} & b_{i-1,m+i+1} & \cdots & b_{i-1,m+n}\\ 1 & \cdots & 1 & \varepsilon\left(\prod_{j=i}^{m+i-1}b_{j,m+i}\right)G^m\left(T_{m+i-1}^{i-1}\right)\cdot u_{m+i} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{j,m+i+1} & \cdots & \prod_{j=i}^{m+i}b_{j,m+n}\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & u_{m+i+1} & \cdots & b_{i+m+1,m+n}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & u_{m+n}\end{pmatrix}\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{im}F^{n}\left(\otimes\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & b_{1,i-1} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{1,j} & b_{1,m+i+1} & \cdots & b_{1,m+n} \\ 1 & \cdots & b_{2,i-1} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{2,j} & b_{2,m+i+1} & \cdots & b_{2,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & u_{i-1} & \prod_{j=i}^{m+i}b_{i-1,j} & b_{i-1,m+i+1} & \cdots & b_{i-1,m+n} \\ 1 & \cdots & 1 & \varepsilon\left(\prod_{j=i}^{m+i}b_{i,j}\right)\cdot u_i\cdot G^{m}\left(T_{m+i}^{i}\right) & \prod_{j=i}^{m+i}b_{j,m+i+1} & \cdots & \prod_{j=i}^{m+i}b_{j,m+n} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & u_{m+i+1} & \cdots & b_{i+m+1,m+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & u_{m+n} \end{pmatrix}\right)$$

$$-(-1)^{nm}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n(i-1)}G^{m}\left(\otimes\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & b_{1,i-1} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{1,j} & b_{1,n+i+1} & \cdots & b_{1,m+n} \\ 1 & \cdots & b_{2,i-1} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{2,j} & b_{2,n+i+1} & \cdots & b_{2,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & u_{i-1} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{i-1,j} & b_{i-1,n+i+1} & \cdots & b_{i-1,m+n} \\ 1 & \cdots & 1 & \varepsilon\left(\prod_{j=i}^{n+i-1}b_{j,n+i}\right)F^{n}\left(T_{n+i-1}^{i-1}\right)\cdot u_{n+i} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{j,n+i+1} & \cdots & \prod_{j=i}^{n+i}b_{j,m+n} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & u_{n+i+1} & \cdots & b_{i+n+1,m+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & u_{m+n} \end{pmatrix}\right)$$

$$+(-1)^{nm}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{ni}G^{m}\left(\otimes\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & b_{1,i-1} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{1,j} & b_{1,n+i+1} & \cdots & b_{1,m+n} \\ 1 & \cdots & b_{2,i-1} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{2,j} & b_{2,n+i+1} & \cdots & b_{2,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & u_{i-1} & \prod_{j=i}^{n+i}b_{i-1,j} & b_{i-1,n+i+1} & \cdots & b_{i-1,m+n} \\ 1 & \cdots & 1 & \varepsilon\left(\prod_{j=i+1}^{n+i}b_{i,j}\right)\cdot u_i\cdot F^{n}\left(T_{n+i}^{i}\right) & \prod_{j=i}^{n+i}b_{j,n+i+1} & \cdots & \prod_{j=i}^{n+i}b_{j,m+n} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & u_{n+i+1} & \cdots & b_{i+n+1,m+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & u_{m+n} \end{pmatrix}\right)$$

$$-\varepsilon\left(\prod_{j=i}^{m}\prod_{i=m+1}^{n+m}b_{j,i}\right)G^{m}\left(T_{m}^{0}\right)F^{n}\left(T_{m+n}^{m}\right)+(-1)^{nm}\varepsilon\left(\prod_{j=i}^{n}\prod_{i=n+1}^{n+m}b_{j,i}\right)F^{n}\left(T_{n}^{0}\right)G^{m}\left(T_{m+n}^{n}\right).$$

其中，$F^{n}\in Hom_{k}\left(M^{\otimes n}\otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}},A\right)$，$G^{m}\in Hom_{k}\left(M^{\otimes m}\otimes B^{\otimes\frac{m(m-1)}{2}},A\right)$。

此时，对于任意线性映射 $T,T'\in Hom_k(M,A)$，满足

$$\begin{aligned}&[T,T']_M\left(\otimes\begin{pmatrix}u_1 & b_{1,2}\\ 1 & u_2\end{pmatrix}\right)\\&=T\left(\varepsilon(b_{1,2})\cdot(u_1\cdot T'(u_2))\right)+T\left(\varepsilon(b_{1,2})\cdot(T'(u_1)\cdot u_2)\right)+T'\left(\varepsilon(b_{1,2})\cdot(T(u_1)\cdot u_2)\right)\\&\quad+T'\left(\varepsilon(b_{1,2})\cdot(u_1\cdot T(u_2))\right)-\varepsilon(b_{1,2})T'(u_1)T(u_2)-\varepsilon(b_{1,2})T(u_1)T'(u_2).\end{aligned}$$

对任意 $n\geq 1$，定义 $C^n((M,B,\varepsilon);A)=Hom_k\left(M^{\otimes n}\otimes B^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}},A\right)$，考虑分次向量空间 $\oplus_{n\geq 1}C^n((M,B\varepsilon),A)$。得到以下结论。

定理 3.1 $\left(\oplus_{n\geq 1}C^n((M,B\varepsilon),A),[\ ,\ ]_M\right)$ 是分次李代数。如果 A 是一个结合代数，B 是交换代数，$\varepsilon:B\to A$ 是满足 $\varepsilon(B)\subset Z(A)$ 的代数同态，线性映射 $T:M\to A$ 是结合代数关于双模 M 的 $\mathcal{O}$ 算子当且仅当 $T\in Hom_k(M,A)$ 是 $\left(\oplus_{n\geq 1}C^n((M,B\varepsilon),A),[\ ,\ ]_M\right)$ 中的 Maurer-Cartan 元素，即微分 $d_T=[T,\ ]_M$ 使分次李代数 $\left(\oplus_{n\geq 1}C^n((M,B\varepsilon),A),[\ ,\ ]_M\right)$ 成为微分分次李代数。

4. $\mathcal{O}$-算子导出的二次 Hochschild 上同调

对于 A-双模 M，若线性映射 $T:M\to A$ 是 $\mathcal{O}$-算子，则 $(M,*)$ 是结合代数，因此对于三元组 (A,B,ε) 中的 ε 和任意 $b\in B$ 自然可以定义 $*_b:M\otimes M\to M,u\otimes v\mapsto\varepsilon(b)\cdot(u*v)$，并且满足对于任意 $b_1,b_2,b_3\in B$，$q\in k$，一下等式成立：

$$*_{b_1+b_2}(u\otimes v)=*_{a_1}(u\otimes v)+*_{b_2}(u\otimes v),$$

$$*_{qb}(u\otimes v)=q*_b(u\otimes v),$$

$$*_{b_2b_3}(*_{b_1}\otimes id)=*_{b_1b_2}(id\otimes *_{b_3}),$$

因此，自然可以定义三元组 (M,B,ε) 上二次上同调。由定义 2.2 可知，A 是 M-双模。并且对于任意 $b\in B$

$$l_b:M\otimes A\to A,\ l_b(m\otimes a)=\varepsilon(b)T(m)a-T(\varepsilon(b)\cdot(m\cdot a)),$$

$$r_b:A\otimes M\to A,\ r_b(a\otimes m)=\varepsilon(b)aT(m)-T(\varepsilon(b)\cdot(a\cdot m)),$$

满足恒等式(3.1)~(3.6)。因此对于任意 $f\in C^n((M,B,\varepsilon);A)$，定义

$$\delta_n^\varepsilon:C^n((M,B,\varepsilon);A)\to C^{n+1}((M,B,\varepsilon);A),$$

$$\begin{aligned}&\delta_n^\varepsilon(f)\left(\otimes\begin{pmatrix}u_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1}\\ 1 & u_2 & \cdots & b_{2,n} & b_{2,n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & u_n & b_{n,n+1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & u_{n+1}\end{pmatrix}\right)\\&=\varepsilon(b_{1,2}b_{1,3}\cdots b_{1,n+1})\left(T(u_1)f\left(\otimes\begin{pmatrix}u_2 & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} & b_{2,n+1}\\ 1 & u_3 & \cdots & b_{3,n} & b_{3,n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & u_n & b_{n,n+1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & u_{n+1}\end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

$$-T\left(\varepsilon\left(b_{1,2}b_{1,3}\cdots b_{1,n+1}\right)\cdot\left(u_1\cdot f\left(\otimes\begin{pmatrix} u_2 & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} & b_{2,n+1}\\ 1 & u_3 & \cdots & b_{3,n} & b_{3,n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & u_n & b_{n,n+1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & u_{n+1}\end{pmatrix}\right)\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f\left(\otimes\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i}b_{1,i+1} & b_{1,i+2} & \cdots & b_{1,n+1}\\ 1 & \cdots & b_{2,i-1} & b_{2,i}b_{2,i+1} & b_{2,i+2} & \cdots & b_{2,n+1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & u_{i-1} & b_{i-1,i}b_{i-1,i+1} & b_{i-1,i+2} & \cdots & b_{i-1,n+1}\\ 1 & \cdots & 1 & \varepsilon\left(b_{i,i+1}\right)\cdot\left(T\left(u_i\right)\cdot u_{i+1}+u_i\cdot T\left(a_{i+1}\right)\right) & b_{i,i+2}b_{i+1,i+2} & \cdots & b_{i,n+1}b_{i+1,n+1}\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & u_{i+2} & \cdots & b_{i+2,n+1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & u_{n+1}\end{pmatrix}\right)$$

$$+(-1)^n T\left(f\left(\otimes\begin{pmatrix} u_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n}\\ 1 & u_2 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & u_{n-1} & b_{n-1,n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & u_n\end{pmatrix}\right)u_{n+1}\varepsilon\left(b_{1,n+1}b_{2,n+1}\cdots b_{n,n+1}\right)\right)$$

$$-(-1)^n\varepsilon\left(b_{1,n+1}b_{2,n+1}\cdots b_{n,n+1}\right)\left(f\left(\otimes\begin{pmatrix} u_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n}\\ 1 & u_2 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & u_{n-1} & b_{n-1,n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & u_n\end{pmatrix}\right)T\left(u_{n+1}\right)\right).$$

定理 4.1 令 $T:M\to A$ 是 A 上的 $\mathcal{O}$ -算子。则上边算子 δ_n^{ε} 和 $d_T=[T,\ ]_M$ 满足

$$d_T(f)=(-1)^n\delta_n^{\varepsilon}(f),n\geq 1,$$

其中 $f\in C^n\left((M,B,\varepsilon);A\right)$。

5. 总结与展望

这篇文章将 $\mathcal{O}$ -算子的 Hochschild 上同调的结构推广到了二次上同调，丰富了二次上同调的理论，并为二次上同调的应用提供了理论依据。在[7]中，作者介绍了 r-矩阵与 $\mathcal{O}$ -算子的关系及 r-矩阵的形变与 $\mathcal{O}$ -算子的上同调之间的关系，因此，以本篇为基础可以进一步考虑三元组 (A,B,ε) 的 r-矩阵与 $\mathcal{O}$ -算子的关系。

参考文献

[1] Hochschild, G. (1945) On the Cohomology Groups of an Associative Algebra. *Annals of Mathematics*, **46**, 58-67. https://doi.org/10.2307/1969145

[2] Loday, J.-L. (2013) Cyclic Homology. Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-21739-9

[3] Staic, M.D. (2015) Secondary Hochschild Cohomology. *Algebra Represent Theory*, **19**, 47-56. https://doi.org/10.1007/s10468-015-9561-8

[4] Staic, M.D. and Stancu, A. (2015) Operations on the Secondary Hochschild Cohomology. *Homology*, *Homotopy and Applications*, **17**, 129-146. https://doi.org/10.4310/HHA.2015.v17.n1.a6

[5] Corrigan-Salter, B.R. and Staic, M.D. (2016) Higher-Order and Secondary Hochschild Cohomology. *Comptes Rendus*

Mathematique, **11**, 1049-1054. https://doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.013

[6] Laubacher, J., Staic, M.D. and Stancu, A. (2018) Bar Simplicial modules and Secondary Cyclic (Co)homology. *Journal of Noncommutative Geometry*, **12**, 865-887. https://doi.org/10.4171/JNCG/293

[7] Das, A. (2020) Deformations of Associative Rota-Baxter operators. *Journal of Algebra*, **560**, 144-180. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.05.016