**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2023, 12(9), 4049-4056
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129397

# 基于结构特征的三角函数有理式不定积分的解析与探究

**贾瑞玲，孙铭娟，文生兰**

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2023年8月12日；录用日期：2023年9月6日；发布日期：2023年9月14日

## 摘　要

三角函数有理式不定积分是积分学的一个重要组成部分，是解决三角函数问题的关键。由于其计算方法灵活多变且技巧性强，这给很多学生带来了困难。许多学者对这方面也进行了探索和研讨。在前人研究的基础上，本文深入阐述了具有结构特征的三角函数有理式的不定积分，突出分析和科学抽象的全过程，潜移默化地培养学生探索问题、剖析细节、提炼精髓、升华思维的能力。

## 关键词

结构特征，三角函数有理式，不定积分，变量代换，联合积分法

# Analysis and Exploration of the Indefinite Integral of Rational Trigonometric Function Based on Structural Feature

**Ruiling Jia, Mingjuan Sun, Shenglan Wen**

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Aug. 12th, 2023; accepted: Sep. 6th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

## Abstract

**The indefinite integral of rational trigonometric function is an important part of integral theory and the key to solving trigonometric function problem. Because of its flexible calculation methods and strong skills, it brings difficulties to many students. Many scholars have also explored and discussed this aspect. Based on previous studies, this paper deeply expounds the indefinite integral**

文章引用：贾瑞玲，孙铭娟，文生兰．基于结构特征的三角函数有理式不定积分的解析与探究[J]．应用数学进展，2023, 12(9): 4049-4056. DOI: 10.12677/aam.2023.129397

**of rational trigonometric function with structural feature, highlights the whole process of analysis and scientific abstraction, and subtly cultivates students' ability to explore problems, analyze details, refine essence and sublimate thinking.**

## Keywords

**Structural Feature, Rational Trigonometric Function, Indefinite Integral, Variable Substitution, Joint Integral**



## 1. 引言

三角函数的有理式是指由三角函数和常数经过有限次的四则运算所构成的函数。由于 $\tan x$，$\cot x$，$\sec x$ 和 $\csc x$ 都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数，故凡是三角函数的有理函数都可以化成 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数，因此我们只要研究如何求解形如 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的不定积分就可以了，其中 $R(u,v)$ 表示两个变量 $u,v$ 的有理函数(即分子和分母都是关于 $u,v$ 的二元多项式)。

对于这类积分，一般用三角函数的万能公式 $t=\tan\frac{x}{2}$ 作代换，则

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\text{，}$$

于是原不定积分的求解就化成了有理函数不定积分的求解，问题迎刃而解。

虽然用万能公式可以求出所有形如 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的不定积分，但有时作这样的代换运算比较复杂，计算量大且较为繁琐；胡佳媛[1]曾探究过用万能代换法求三角函数不定积分的不足，同时还探讨了具有某些特点的这类不定积分的计算方法。

事实上，该类型的不定积分很早就引起了学者的青睐和关注。早在 1995 年、1996 年，段生贵[2]、段玉珍[3]和赵晶[4]就不约而同地探索了几类三角函数有理式的计算方法。随后更多学者参与研究这类不定积分的计算问题，比如梁汉光[5]详细地阐述了三角函数有理式积分的若干方法与技巧；展丙军[6]论述了一类特殊三角函数有理式积分的特殊积分法，并加以推广。受展丙军研究结果的启发，李永利[7]又给出了此类积分的一种简捷求法：将被积函数的分子分母都化成正弦型函数；这里不再详述各位学者[8] [9] [10] [11] [12]的研讨成果。

以上诸多学者从不同角度和方面对三角函数有理式的不定积分进行了探索和钻研，并取得了一定的成果。这些学者侧重介绍和阐述该类不定积分的计算方法和技巧，但是这些计算方法和技巧的选取是如何确定的呢？对于这个阶段的学生而言，他们还没有熟练掌握不定积分的相关理论，更未达到灵活运用各种积分技巧的能力，种种因素限制了他们的解题思维和视野。再加上被积函数的结构形式千变万化，故绝大多数情况下确定合适的变换代换或计算方法都具有一定的难度。为此，学生常常感到迷茫，束手无策。常言道：比知识更重要的是思维方式，因此在教学过程中，我们不但要介绍计算不定积分的技巧和方法，更要着眼于如何确定这些计算方法和技巧。

基于此，本文以追本溯源的探究方式，从被积函数的结构特征出发，尽力还原知识的产生、发展过

程，将变量代换的来龙去脉由表及里、逐层深入地展示出来，让学生知其然更要知其所以然。以期帮助学生更好地理解和掌握不定积分，助力他们搭建完整的积分学知识体系。

## 2. 特殊结构的三角函数有理式的不定积分

对不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，除万能公式外，下述特殊结构的特殊方法更简单些。

### 2.1. 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，即 $R(\sin x,\cos x)$ 关于 $\sin x$ 是奇函数，可令 $t=\cos x$ 进行有理化处理

**分析** 事实上，此时 $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}$ 关于 $\sin x$ 为偶函数，即 $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}$ 中只含有 $\sin x$ 的偶次项，不含 $\sin x$ 的奇次幂；故可设 $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}=R_0\left(\sin^2 x,\cos x\right)$，即

$$R(\sin x,\cos x)=\sin xR_0\left(\sin^2 x,\cos x\right),$$

因而

$$\begin{aligned}\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x&=\int\sin xR_0\left(\sin^2 x,\cos x\right)\mathrm{d}x\\&=-\int R_0\left(1-\cos^2 x,\cos x\right)\mathrm{d}\cos x\overset{t=\cos x}{=}-\int R_0\left(1-t^2,t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由此将原不定积分转化为有理式不定积分。

**例 1** 计算 $I=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos x}\mathrm{d}x$。

**分析** 记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos x}$，则易验证 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$。

**解** 根据分析知，令 $t=\cos x$，则

$$I=-\int\frac{\cos x}{1-\cos^2 x+\cos x}\mathrm{d}\cos x=\int\frac{t}{t^2-t-1}\mathrm{d}t,$$

因 $\mathrm{d}\left(t^2-t-1\right)=(2t-1)\mathrm{d}t$，故 $t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(t^2-t-1\right)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t$，从而

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-t-1}\mathrm{d}\left(t^2-t-1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t-1}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-t-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\\&=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-t-1\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-t-1\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t-\left(1+\sqrt{5}\right)}{2t-\left(1-\sqrt{5}\right)}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\sin^2 x+\cos x\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\cos x-\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\cos x-\left(1-\sqrt{5}\right)}\right|+C\end{aligned}$$

**例 2** 计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$。

**分析** 记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}$，则易验证 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$。

故可令 $t=\cos x$，则

$$I=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+t)(t^2-1)},$$

对 $\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+t)(t^2-1)}$ 按照有理函数的不定积分计算即可。

**科学抽象** 根据上述分析和解法，当确定变量代换 $t=\cos x$ 之后，首先利用“凑”的思想，将 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int R_1(\cos x)\mathrm{d}\cos x$ 的形式，然后再将 $t=\cos x$ 代入，其中 $R_1(\cos x)$ 是关于 $\cos x$ 的有理函数。

## 2.2. 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，即 $R(\sin x,\cos x)$ 关于 $\cos x$ 是奇函数，可令 $t=\sin x$ 进行有理化处理

**分析** 事实上，此时 $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ 关于 $\cos x$ 为偶函数，即 $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ 中只含有 $\cos x$ 的偶次项，不含 $\cos x$ 的奇次幂；故可设 $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}=R_0(\sin x,\cos^2 x)$，即

$$R(\sin x,\cos x)=\cos xR_0(\sin x,\cos^2 x),$$

因而

$$\begin{aligned}\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x&=\int\cos xR_0(\sin x,\cos^2 x)\mathrm{d}x\\&=\int R_0(\sin x,1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x\overset{t=\sin x}{=}\int R_0(t,1-t^2)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由此将原不定积分转化为有理式不定积分。

**例 3** 计算 $I=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$。

**分析** 记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}$，则易验证 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$。

**解** 根据分析，令 $t=\sin x$，则

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}\sin x=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)\mathrm{d}t\\&=2\arctan t-t+C=2\arctan(\sin x)-\sin x+C.\end{aligned}$$

**例 4** 计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cot x+\cos x}$。

**分析** 记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\cot x+\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$，则易验证

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)。$$

故可令 $t=\sin x$，则

$$I=\int\frac{\sin x\mathrm{d}\sin x}{(1+\sin x)\cos^2 x}=\int\frac{\sin x\mathrm{d}\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin^2 x)}=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1-t)},$$

对 $\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1-t)}$ 按照有理函数的不定积分计算即可。

**科学抽象** 根据上述分析和解法，当确定变量代换 $t=\sin x$ 之后，首先利用“凑”的思想，将 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int R_1(\sin x)\mathrm{d}\sin x$ 的形式，然后再将 $t=\sin x$ 代入，其中 $R_1(\sin x)$ 是关于 $\sin x$ 的有理函数。

### 2.3. 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，可令 $t=\tan x$ 进行有理化处理

**分析** 事实上，由于

$$R(\sin x,\cos x)=R(\tan x\cos x,\cos x)=R_1(\tan x,\cos x),$$

利用 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ 可得

$$R_1(\tan x,-\cos x)=R_1(\tan x,\cos x),$$

即 $R_1(\tan x,\cos x)$ 中只含有 $\cos x$ 的偶次项，不含 $\cos x$ 的奇次幂；故可设

$$R_1(\tan x,\cos x)=R_0(\tan x,\cos^2 x)=R_0\left(\tan x,\frac{1}{\sec^2 x}\right)=R_0\left(\tan x,\frac{1}{1+\tan^2 x}\right),$$

从而

$$\begin{aligned}\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x&=\int R_1(\tan x,\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int R_0\left(\tan x,\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)\mathrm{d}x\overset{t=\tan x}{=}\int\frac{1}{1+t^2}\cdot R_0\left(t,\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这样就将原不定积分转化为有理式不定积分。

**例 5** 计算 $I=\int\frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$。

**分析** 记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$，则易验证

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)。$$

**解** 根据分析可知，令 $t=\tan x$，则

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\tan^2 x}{\tan^4 x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\tan^2 x}{\tan^4 x+1}\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1-\tan^2 x}{\tan^4 x+1}\mathrm{d}\tan x=\int\frac{1-t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\frac{1}{t^2}-1}{\frac{1}{t^2}+t^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\left(\frac{1}{t}+t\right)^2-2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sec^2 x-\sqrt{2}\tan x}{\sec^2 x+\sqrt{2}\tan x}\right|+C.\end{aligned}$$

**科学抽象** 根据上述分析和解法，当确定变量代换 $t=\tan x$ 之后，首先利用“凑”的思想，将 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int R_1(\tan x)\mathrm{d}\tan x$ 的形式，然后再将 $t=\tan x$ 代入，其中 $R_1(\tan x)$ 是关于 $\tan x$ 的有理函数。

**例 6** 计算(1) $I_1=\int\frac{1}{\sin^3 x\cos x}\mathrm{d}x$；(2) $I_2=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$。

**分析** (1)记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$，则易验证

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\text{，}$$

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\text{，}$$

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)\text{。}$$

故本题令 $t=\cos x$， $t=\sin x$， $t=\tan x$ 均可，但是若令 $t=\cos x$ 或 $t=\sin x$，计算则比较麻烦(不再详细展开)。注意到

$$\int\frac{1}{\sin^3 x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\tan^3 x\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\tan^3 x}\cdot\sec^2 x\mathrm{d}\tan x=\int\left(\frac{1}{\tan^3 x}+\frac{1}{\tan x}\right)\mathrm{d}\tan x\text{，}$$

故可令 $t=\tan x$，则 $I=-\frac{1}{2}\frac{1}{\tan^2 x}+\ln|\tan x|+C$。

(2)与(1)类似，令 $t=\sin^2 x$ 即可。

**注** 由例 6 可知，利用换元法计算不定积分时，所作变量代换的形式可能不唯一，那么随之而来的计算复杂量也不相同。在具体问题中，有时可以通过一些特殊的技巧或者观察，将原始函数进行变形、整理或简化，从而使不定积分的计算更加容易。不过这需要对数学知识的灵活运用和问题的深入理解。

### 2.4. 若 $R(\sin x,\cos x)=\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}$，且 $a^2+b^2\neq 0$，则

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x=\int\frac{A}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x+Bx+C\ln|a\sin x+b\cos x+c|\text{。}$$

其中 $A=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}$， $B=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$， $C=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$。

**分析** 易知 1， $\sin x$， $\cos x$ 线性在实数域上线性无关，且

$$(a\sin x+b\cos x+c)'=-b\sin x+a\cos x+0\cdot 1\text{，}$$

即 $a\sin x+b\cos x+c$ 的导数仍可由 1， $\sin x$， $\cos x$ 线性表示。另外

$$\begin{pmatrix}1 & a\sin x+b\cos x+c & (a\sin x+b\cos x+c)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ 0 & a & -b\\ 0 & b & a\end{pmatrix}\text{，}$$

且 $\begin{vmatrix}1 & c & 0\\ 0 & a & -b\\ 0 & b & a\end{vmatrix}=a^2+b^2\neq 0$，根据向量组的线性相关性理论[13]知，向量组 1，$\sin x$， $\cos x$ 与向量组 1，$a\sin x+b\cos x+c$，$(a\sin x+b\cos x+c)'$ 有相同的相关性，即 1，$a\sin x+b\cos x+c$，$(a\sin x+b\cos x+c)'$ 线性无关。故对任意的 $a_1\sin x+b_1\cos x+c_1$，一定存在常数 $A$，$B$，$C$，使得

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=A+B(a\sin x+b\cos x+c)+C(a\sin x+b\cos x+c)'\text{，}$$

即 $a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=(aB-bC)\sin x+(bB+aC)\cos x+A+Bc$，解得

$$A=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}\text{，}\quad B=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\text{，}\quad C=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\text{。}$$

从而

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{A+B(a\sin x+b\cos x+c)+C(a_1\sin x+b_1\cos x+c_1)'}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{A}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x+Bx+C\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

对于 $\int\frac{A}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x$，利用万能公式求解即可(令 $t=\tan\frac{x}{2}$)。

**注** (1) 文献[8] [9] [10]也探究了以 $R(\sin x,\cos x)=\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}$ 为被积函数的不定积分，[8]主要利用待定系数法求解，并将其推广到 $\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$ 和 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\left(n\in Z^+,n\geq 3\right)$ 类型的积分；[9]将该方法推广到两类非三角函数有理式的不定积分；[10]则利用待定系数法与矩阵法求解。

(2) 若 $c=c_1=0$，此时 $R(\sin x,\cos x)=\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}$，则还可使用联合积分法计算。关于联合积分法，也有学者[2] [3] [4] [5] [10] [11]进行了探讨和研究。记

$$I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,\quad H=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

则 $I=a_1H+b_1J$。观察得到

$$\begin{cases}aH+bJ=\int\mathrm{d}x=x+C_1\\ -bH+aJ=\int\frac{(a\sin x+b\cos x)'}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\ln|a\sin x+b\cos x|+C_2\end{cases},$$

解方程求出 $H,J$，从而可求得 $I$。

**例 7** 计算 $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$。

**解** 方法 1 根据上述分析，记 $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}$，即 $a=1$，$b=2$，$c=0$，$a_1=1$，$b_1=1$，$c_1=0$，代入计算得 $A=0$，$B=\frac{3}{5}$，$C=-\frac{1}{5}$。故

$$I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C_1。$$

方法 2 联合积分法，记

$$I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x,\quad H=\int\frac{\sin x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x,$$

则 $I=H+J$。观察得到

$$\begin{cases}H+2J=\int\mathrm{d}x=x+C_2\\ -2H+J=\int\frac{(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x+2\cos x|+C_2\end{cases},$$

解方程求出 $H, J$，从而可求得 $I=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+C_1$。

在计算具有特殊结构的三角函数有理式不定积分时，不能墨守常规，一味地套用上述方法；一方面要善于观察被积函数的形式，不同类型的函数在求不定积分时具有不同的计算难度。另一方面要注意积分技巧的应用，是否能够灵活运用积分技巧也会影响计算的难度。此外还要兼顾积分的特殊性质和积分问题的整体复杂性，一些具有特殊性质的积分问题可能是一个较长的、多步骤的计算过程，需要进行多次代换、分解或应用不同的积分技巧。总之三角函数有理式不定积分的计算是一个具有一定难度和技巧性的过程，在实际操作中可能会遇到复杂的情况和特殊的技巧。因此在进行计算时，建议充分掌握相关的数学知识和技巧，进行练习和思考，在求解过程中领会解题的思想方法。

## 4. 结束语

针对这些特殊结构的三角函数有理式的不定积分，本文按照由浅入深、由具体到抽象、由现象到本质的思路，从被积函数的结构特征入手，将变量代换的来源和本质逐步地呈现出来。

事实上不定积分的计算题型多，技巧性强，难度大，并且不存在对一切情况都适用的固定方法。文章仅针对一些特殊结构的题目给出了一般性的处理方法，但在实际的计算中，不要局限于这些一般性的方法，要针对具体的题型结构，掌握各种方法的实质，基于结构特点，灵活使用各种技巧，尽量选择简单的特殊的方法，只有这样才能收到事半功倍的效果。

## 基金项目

强军新工科一般课题：强联[2022] 2 号。

## 参考文献

[1] 胡佳媛. 用万能代换法求三角函数不定积分的不足[J]. 萍乡高等专科学校学报, 2010, 27(6): 5-8.

[2] 段生贵. 三角函数有理式的积分方法[J]. 河北地质学院学报, 1995(5): 438-441.

[3] 段玉珍. 一类三角函数有理式积分的简便求法[J]. 工科数学, 1995(3): 236-239.

[4] 赵晶. 一类三角函数有理式的积分法[J]. 数学学习, 1996(4): 4-7.

[5] 梁汉光. 三角函数有理式积分[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2006(S2): 21-28.

[6] 展丙军, 李兆兴. 两类不定积分的巧解[J]. 高等数学研究, 2005, 8(6): 20-22+24.

[7] 李永利. 一类不定积分的另一种简捷求法[J]. 高等数学研究, 2006, 9(6): 35-36+59.

[8] 朱琳. 三角函数有理式的不定积分的待定系数法[J]. 中国科技信息, 2009(1): 264-265.

[9] 高丽, 齐琼, 谢瑞. 关于三类特殊不定积分求解方法的讨论[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2010, 36(2): 169-171.

[10] 李永杰, 刘展. 一类三角函数有理式积分计算的简便方法及推广[J]. 平顶山学院学报, 2009, 24(5): 68-70.

[11] 魏章志, 陈浩. 三角函数有理式积分技巧[J]. 高等数学研究, 2011, 14(1): 77-79.

[12] 严文利. 对一道三角函数有理式积分的深入挖掘[J]. 高等数学研究, 2019, 22(6): 37-40.

[13] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.