

不同氮水平下大豆与玉米单、间作氮素吸收的 微分方程建模

普雯瑞, 化存才*

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2023年12月19日; 录用日期: 2024年1月13日; 发布日期: 2024年1月23日

摘要

大豆/玉米间作具有一定的养分利用优势,但是不同氮水平下的间作体系对氮素吸收的响应不同。在本文中,首先分别建立了自然条件下大豆和玉米单作氮素吸收的非自治Logistic微分方程模型,探讨了不同氮水平下大豆和玉米单作时氮素吸收的非自治Logistic微分方程模型,得到单作大豆和玉米的最佳施氮量分别为 $0.4808 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 、 $2.6199 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 。然后,进一步建立了不同氮水平下大豆和玉米间作氮素吸收的二维非自治微分方程模型,对模型拟合的相关系数均在98%以上,数值计算得到间作大豆和玉米的最佳施氮量分别为 $0.4821 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 、 $2.6201 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$,与单作结果差别不大,然而,两作物的氮素吸收量在不同氮水平交叉种植模式下却有着显著差异。在最佳施氮量下,间作玉米的氮素吸收量最大为 $4.48 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$,较自然间作提升了59.43%,而大豆的氮素吸收量为 $1.31 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$,较自然间作也提升了32.32%;就氮肥利用率而言,最佳施氮量下间作大豆相比最佳单作大豆下降了24.01%,而最佳间作玉米相比最佳单作玉米则提高了30.45%。

关键词

大豆/玉米间作, 氮素吸收, 非自治微分方程, 最佳施氮量, 氮利用率

Differential Equation Modeling of Nitrogen Uptake in Soybean and Maize Monoculture and Intercropping under Different Nitrogen Levels

Wenrui Pu, Cuncai Hua*

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

*通讯作者。

Abstract

Soybean/corn intercropping has certain advantages in nutrient utilization, but the response of intercropping systems to nitrogen uptake is different under different nitrogen levels. In this paper, non-autonomous Logistic differential equation models of nitrogen absorption of monoculture soybean and corn under natural conditions were established respectively, and non-autonomous Logistic differential equation models of nitrogen absorption of soybean and corn under different nitrogen levels were discussed at first. The optimal nitrogen application rates for the soybean and maize were $0.4808 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ and $2.6199 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$, respectively. Then, a two-dimensional non-autonomous differential equation model was established further for the nitrogen uptake between soybean and corn at different nitrogen levels. The correlation coefficients of the model were all above 98%. The optimal nitrogen application rates for intercropping soybean and corn were $0.4821 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ and $2.6201 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ respectively, which was no significant difference between the intercrops and monoculture results. However, the nitrogen uptake of the two crops was significantly different under different nitrogen levels of cross-cropping. Under the optimal nitrogen application rate, the maximum nitrogen uptake of intercropping maize was $4.48 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$, which was 59.43% higher than that of natural intercropping, while the nitrogen uptake of soybean was $1.31 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$, which was 32.32% higher than that of natural intercropping. In terms of the nitrogen utilization ratios, the best intercropping soybean decreased by 24.01% by comparing with the best monoculture soybean, while the best intercropping corn increased by 30.45% by comparing with the best monoculture corn.

Keywords

Soybean/Maize Intercropping, Nitrogen Uptake, Non-Autonomous Differential Equation, Optimal Nitrogen Application Rate, Nitrogen Utilization Rate

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

大豆、玉米是我国极其重要的粮油饲作物。氮素是植物生长过程中所必需的第一元素。肥料的利用在很大程度上解决了植物生长过程中的需氮问题,然而,氮肥施用量大且利用率偏低已给我国带来了严重的环境问题[1]。研究表明,豆科与非豆科作物的间作已成为一种农业可持续发展模式,它不仅减少了化学肥料的投入,减轻农业生产对环境的负面影响,而且还提高了各作物的氮素吸收量及其产量[2],比如大豆/玉米间作[3]、玉米/花生间作[4]、玉米/毛苕子间作[5]等都使得间作玉米的氮素吸收积累量较单作时有了不同程度的提升,是一种“共赢”的种植模式。

但是,在不同氮水平下间作体系的养分利用效率表现不同。当水稻/花生间作[6]时,在不同氮肥施用量下,花生体内有4%~10%的氮素能够准确转移到水稻植株体内。大豆/玉米间作研究表明[7],在施氮量 $180 \text{ kg}\cdot\text{hm}^{-2}$ 水平下,单位面积间作玉米的氮素最大吸收量相比于单作提高了18.4%,间作大豆的则比单作处理降低了15.9%,而整个间作系统的氮素则提高了0.4%。总之,禾本科与豆科间作能够显著增加作物氮吸收优势,减轻了豆科作物自身的“氮遏制”,提高了豆科作物的固氮效率和间作体系的氮素利用率,进而增加了其干物质的累积量和产量。

在数学交叉生物应用的研究中, 将植物或农作物生长发育上升为微分方程建模研究具有极其重要的理论和应用意义。早在 1926 年, 意大利数学家 Volterra 就两种群提出了 Volterra 食饵 - 捕食者微分方程模型[8]。2012 年, 张林、化存才和张继业等考虑到 UV-B (波长为 280~320 nm 的紫外光)辐射对烤烟株高的影响, 建立了非自治 Logistic 模型[9]。2021 年, 梁仕军考虑到花生间作可缓解连作障碍问题, 建立了花生与玉米间作生长的二维微分方程模型[10], 数值模拟显示: 花生和玉米总产量增加了 11.15%, 验证了间作的增产优势。2023 年, 段国梅考虑到作物的氮素吸收是农作物提升产量的关键机制, 选取大豆和玉米这两种作物, 建立了在自然条件间作模式下氮素吸收量的二维微分方程模型[11], 数值模拟显示: 大豆和玉米两者的氮素吸收总量比起两者单作时的总量增加了 5.33%。

综上所述, 关于大豆、玉米间作时氮素吸收的微分方程建模才刚开始, 没有从数学本质上阐明间作减少供氮水平或者有效提高氮利用率的生态机理问题。为此, 本文在考虑到大豆本身的固氮作用和不同供氮水平对植物的氮素吸收产生显著影响的基础上, 主要地建立在不同氮水平下大豆、玉米间作时氮素吸收的微分方程组模型, 数值计算阐明间作减少供氮水平或有效提高氮利用率等问题。

2. 不同氮水平下大豆单作氮素吸收的非自治 Logistic 微分方程模型

大豆是我国食用油和蛋白粕饲料的主要来源, 其需氮量是其他谷类作物的 4 倍[12], 而在实际中施加于土壤中的氮养分情况对于大豆的氮素吸收具有直接的重要影响。在本节中, 将基于农学实验的一些数据, 结合施氮量对于大豆氮素吸收积累量的影响, 把大豆在每个生长阶段的氮素吸收积累量与其生长的时间节点联系起来, 建立大豆在不同氮水平下的非自治 Logistic 微分方程模型, 分析单作大豆在不同氮水平下的氮素吸收机制, 以揭示大豆的需肥规律, 为实现大豆的合理施肥、提高其氮素吸收积累量及氮肥利用率提供理论依据。

2.1. 模型的建立

通过分析大豆在整个生育期内的氮素吸收积累量[13], 我们总结出以下基本事实:

(F1) 大豆对氮素的吸收积累量是大豆产量提高的基础, 也是影响氮肥利用率的主要因素;

(F2) 大豆的氮素吸收积累过程符合“慢 - 快 - 慢”的“S”型曲线增长生长规律, 并且在种植 82~102 天内氮素积累能力达到最快;

(F3) 随着时间的推移, 大豆的氮素吸收积累量最终达到一个饱和值(最大值)。

基于以上事实, 我们作出如下合理假设:

(H1) 单株大豆氮素吸收积累量的饱和值为一个常数;

(H2) 大豆的氮素吸收积累受自身条件以及土壤肥力水平、土壤 PH 值、灌溉条件等多种因素的综合影响, 由此可设其内禀增长率是一个随时间呈“先增后减”变化趋势的二次函数;

(H3) 在整个生育期内大豆的氮素吸收积累速度与环境中所剩的资源成正比。

根据上述基本事实和合理假设, 现设 t 时刻单株大豆的氮素吸收积累量为 $S(t)$, 单位为 g/plant, 最大值为 S_m , 大豆氮素吸收的内禀增长率为 $r_s(t) = -\alpha_1(t-92)^2 + \beta_1$, 其中 α_1, β_1 为待定参数且 $\alpha_1 > 0$, 于是, 在自然条件下, 我们建立单株大豆氮素吸收积累的非自治 Logistic 模型的如下初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_s(t)S\left(1 - \frac{S}{S_m}\right) = [-\alpha_1(t-92)^2 + \beta_1]S\left(1 - \frac{S}{S_m}\right) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases} \quad (1)$$

由于不同施氮量处理下大豆氮素吸收积累量仍然满足 Logistic 微分方程, 故借鉴文献[14]的建模思想, 我们基于模型(1)考虑不同氮水平, 建立大豆氮素吸收积累的微分方程模型:

$$\frac{dS}{dt} = h_s r_s(t) S \left(1 - \frac{S}{\bar{S}_m} \right) \tag{2}$$

其中, h_s 为有关施氮量的影响因子, 最大值 $\bar{S}_m = h_s S_m$, 其他参数同模型(1)。

2.2. 参数拟合值

由文献[13]易得, 大豆在苗期、开花期、结荚期、鼓粒期、成熟期各个生育阶段中的氮素吸收积累量的数据, 见表 1:

Table 1. Nitrogen uptake accumulation data of soybean monoculture under natural conditions

表 1. 自然条件下单作大豆氮素吸收积累量数据

t/day	48	54	76	93	109	128	132
$S/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0.08	0.12	0.38	0.74	1.07	1.31	1.34

由表 1 可知, 模型(1)的初值条件为 $S(40) = 0.05$ 。利用 OpenLu 编程软件拟合得其中的参数值为: $\alpha_1 = 0.000001019$, $\beta_1 = 0.0627$, $S_m = 1.45$ 。

根据文献[13]整理得到不同施氮量下大豆最大氮素吸收积累量的数据, 见表 2。

Table 2. Nitrogen application rate and maximum nitrogen uptake accumulation in soybean

表 2. 大豆施氮量与其最大氮素吸收积累量

施氮量: $x/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0	0.20	0.40	0.61
最大氮素吸收积累量: $\bar{S}_m/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	1.45	1.63	1.80	1.75

由表 2 得: 在一定施氮量范围内, 大豆的氮素吸收积累量随着施氮量的增加而增大; 而当施氮量超过一定的范围后, 大豆的氮素吸收积累量随着施氮量的增加而减少。

利用 MATLAB 编程对表 2 中的数据点进行拟合, 得到如下的三次拟合函数:

$$\bar{S}_m = -3.8746x^3 + 2.1429x^2 + 0.6264x + 1.45 \tag{3}$$

拟合函数的曲线见图 1。对式(3)求导, 当取施氮量为 $x = 0.4808 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 时, 大豆的氮素吸收积累量能够达到最大值, 此时的施氮量即为影响单作大豆氮素吸收积累量的最佳施氮量。

2.3. 数值模拟结论

拟合效果: 根据文献[13]的相关数据, 我们整理得到了不同供氮水平下, 单作大豆的氮素吸收积累量的相关数据见表 3。

Table 3. Nitrogen uptake and accumulation of monocropping soybean at different nitrogen levels (unit: $\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)

表 3. 不同氮水平下单作大豆的氮素吸收积累量(单位: $\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)

时间 day	40	48	54	76	93	109	128	132
施氮量								
$0 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0.05	0.08	0.12	0.38	0.74	1.07	1.31	1.34
$0.2 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0.08	0.12	0.16	0.47	0.85	1.20	1.46	1.49

续表

0.4 g·plant ⁻¹	0.08	0.13	0.18	0.53	0.96	1.34	1.62	1.66
0.61 g·plant ⁻¹	0.08	0.13	0.17	0.48	0.86	1.23	1.53	1.57

借助上述表 3 中的数据, 通过 MATLAB 编程计算分别得到不同氮水平下单作大豆的实验数据与模拟数据之间的拟合程度见表 4。

Table 4. Table of fitting effects under different nitrogen application rates
表 4. 不同施氮量下的拟合效果表

施氮量(x/g·plant ⁻¹)	0	0.2	0.4	0.61
相关系数(R ²)	0.9998	0.9994	0.9974	0.9960

数值计算模拟: 利用 MATLAB 编程对模型(2)进行数值计算模拟, 得到在不同氮水平下单作大豆氮素吸收动态变化的曲线图, 见图 2。

由图 2 我们可得如下的结论:

- 1) 不同施氮量下, 大豆整株的氮素吸收积累量均符合 S 型曲线生长特征, 且其氮素吸收积累依然主要集中在结荚鼓粒期。
- 2) 当施氮量为 0.4808 g·plant⁻¹ 时, 大豆的氮素吸收积累速度比施氮量为 0 g·plant⁻¹, 0.2 g·plant⁻¹, 0.4 g·plant⁻¹ 和 0.61 g·plant⁻¹ 时快, 说明此时的施氮量即为影响单作大豆氮素吸收积累量的最佳施氮量, 与前面的理论推导是一致的。
- 3) 单作大豆在生长到 200 天时的氮素吸收积累量已接近各不同施氮量下的最大值, 见表 5。

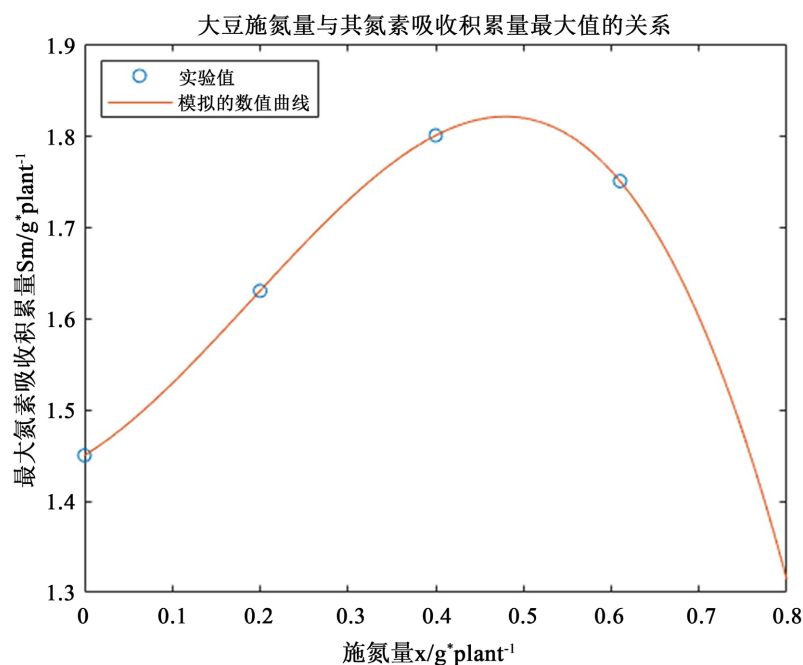


Figure 1. Relationship between nitrogen fertilization rate and maximum nitrogen uptake accumulation in soybean

图 1. 大豆施氮量与其氮素吸收积累量最大值的关系

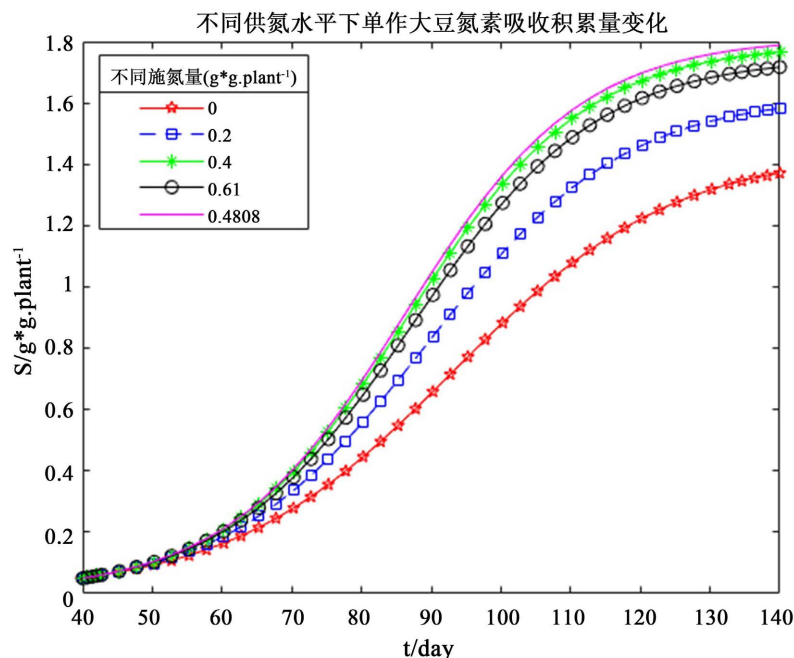


Figure 2. Changes in nitrogen uptake and accumulation of monoculture soybean under different nitrogen levels

图 2. 不同氮水平下单作大豆氮素吸收积累量变化

Table 5. Nitrogen uptake and accumulation in 200 days of soybean with different nitrogen application rates and monoculture
表 5. 不同施氮量与单作大豆 200 天时氮素吸收积累量

施氮量(x/g.plant ⁻¹)	0	0.2	0.4	0.4808	0.61
200 天时氮素吸收积累量(S _m /g.plant ⁻¹)	1.45	1.63	1.80	1.8155	1.75

3. 不同氮水平下玉米单作氮素吸收的非自治 Logistic 微分方程模型

玉米作为我国的第一大粮食作物, 保证其产量是我国粮食安全问题的重中之重问题[15]。氮元素作为植物生长过程中的第一元素, 对玉米的产量有着举足轻重的意义。在本节中, 将类似于前面第 2 节, 基于一些农学实验数据, 结合施氮量对玉米氮素吸收积累量的影响, 把玉米每个阶段的氮素吸收积累量与其生长的时间节点联系起来, 建立玉米在不同氮水平下的非自治 Logistic 微分方程模型, 分析单作玉米在不同氮水平下的氮素吸收机制, 揭示玉米的需肥规律, 为实现玉米的合理施肥、提高其氮素吸收积累量及氮肥利用率提供理论依据。

3.1. 模型的建立

通过分析玉米在整个生育期内的氮素吸收积累量[13], 我们总结出有关玉米的一些基本事实与大豆的大致相同, 而其在种植 64~84 天内积累能力达到最快。

基于上述事实, 我们作出如下合理假设:

(H1) 单株玉米氮素吸收积累量的饱和值为一个常数;

(H2) 玉米的氮素吸收积累受自身条件以及土壤肥力水平、土壤 PH 值、灌溉条件等多种因素的综合影响, 由此可设其内禀增长率是一个随时间呈“先增后减”变化趋势的二次函数;

(H3) 在整个生育期内玉米的氮素吸收积累速度与环境中所剩的资源成正比。

根据上述基本事实和合理假设, 现设 t 时刻单株玉米的氮素吸收积累量为 $M(t)$, 单位为 g/plant , 最大值为 M_m , 大豆氮素吸收的内禀增长率为 $r_M(t) = -\alpha_2(t-74)^2 + \beta_2$, 其中 α_2, β_2 为待定参数且 $\alpha_2 > 0$, 于是, 我们建立单株玉米在自然条件下氮素吸收积累的非自治 Logistic 模型的如下初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = r_M(t)M \left(1 - \frac{M}{M_m}\right) = [-\alpha_2(t-74)^2 + \beta_2]M \left(1 - \frac{M}{M_m}\right) \\ M(t_0) = M_0 \end{cases} \quad (4)$$

在不同施氮量处理下, 玉米氮素吸收积累量的 Logistic 微分方程模型为:

$$\frac{dM}{dt} = h_M r_M(t)M \left(1 - \frac{M}{\bar{M}_m}\right) \quad (5)$$

其中 h_M 为有关施氮量的影响因子, 最大值为 $\bar{M}_m = h_M M_m$, 其他参数同模型(4)。

3.2. 参数拟合值

王雪蓉在文献[13]中给出了试验研究得到的玉米氮素吸收积累量的实验数据。现将玉米在各生育期时氮素吸收的特点和实验数据进行比对, 选取苗期、拔节期、抽雄期、灌浆期、成熟期等各个阶段相应的数据, 见表 6:

Table 6. Nitrogen uptake accumulation of maize monoculture under natural conditions

表 6. 自然条件下单作玉米氮素吸收积累量数据

t/day	34	48	70	85	99	109	126	140
$M/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0.06	0.20	0.89	1.60	2.01	2.15	2.23	2.25

从表 6 中得到模型(4)的初值条件为 $M(34) = 0.06$, 再利用 OpenLu 软件编程拟合得到了各个参数的最佳值为: $\alpha_2 = 0.000001615$, $\beta_2 = 0.0873$, $M_m = 2.26$ 。

根据文献[13]整理得到不同施氮量下玉米最大氮素吸收积累量的数据见表 7。

Table 7. Data of nitrogen application rate and maximum nitrogen uptake accumulation of maize

表 7. 玉米施氮量与其最大氮素吸收积累量数据

施氮量($x/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)	0	1.84	2.45	3.06
最大氮素吸收积累量($\bar{M}_m/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)	2.26	2.97	3.5	3.26

由表 7 得: 在一定施氮量范围内, 玉米的氮素吸收积累量随着施氮量的增加而增大; 而当施氮量超过一定的范围后, 玉米的氮素吸收积累量随着施氮量的增加而减少。

利用 MATLAB 编程对表 7 中的数据进行拟合, 得到三次拟合函数为:

$$\bar{M}_m = -0.4026x^3 + 1.9241x^2 - 1.7916x + 2.26 \quad (6)$$

拟合函数的曲线见图 3。对(6)求导得, 当取施氮量为 $x = 2.6199 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 时, 玉米的氮素吸收积累量达到最大值, 此时的施氮量即为影响单作玉米氮素吸收积累量的最佳施氮量。

3.3. 数值模拟结论

拟合效果: 根据文献内容, 整理得到了不同供氮水平下, 单作玉米的氮素吸收积累量的相关数据, 见表 8。

Table 8. Nitrogen uptake and accumulation of monocropping soybean under different nitrogen levels (unit: g·plant⁻¹)
表 8. 不同氮水平下单作大豆的氮素吸收积累量(单位: g·plant⁻¹)

施氮量 \ 时间 day	34	48	70	85	99	109	126	140
0 g·plant ⁻¹	0.06	0.20	0.89	1.60	2.01	2.15	2.23	2.25
1.84 g·plant ⁻¹	0.11	0.30	1.17	2.02	2.57	2.78	2.92	2.95
2.45 g·plant ⁻¹	0.14	0.38	1.40	2.37	3.01	3.26	3.43	3.48
3.06 g·plant ⁻¹	0.11	0.31	1.22	2.17	2.79	3.02	3.17	3.21

利用上述表 8 数据, 通过 MATLAB 编程计算, 分别得到不同氮水平下单作玉米的实验数据与模拟数据之间的拟合程度见表 9。

Table 9. Table of fitting effects under different nitrogen application rates
表 9. 不同施氮量下的拟合效果表

施氮量(x/g·plant ⁻¹)	0	0.2	0.4	0.61
相关系数(R ²)	0.9999	0.9821	0.9571	0.9665

数值计算模拟: 利用 MATLAB 编程对模型(5)进行数值计算模拟, 我们得到在不同氮水平下, 单作玉米氮素吸收积累的曲线图, 见图 4。

由图 4 我们可得如下的结论:

- 1) 不同施氮量下, 玉米整株的氮素吸收积累量均符合 S 型曲线生长特征; 抽雄期灌浆期依然是玉米氮素吸收积累的主要集中区。
- 2) 当施氮量为 2.6199 g·plant⁻¹时, 玉米的氮素吸收积累速度比施氮量为 0 g·plant⁻¹, 1.84 g·plant⁻¹, 2.45 g·plant⁻¹ 和 3.06 g·plant⁻¹ 时快, 说明此时的施氮量为影响单作玉米氮素吸收积累量的最佳施氮量, 与前面的理论推导是一致的。单作玉米 140 天时的氮素吸收积累量已接近各不同施氮量下的最大值, 见表 10。

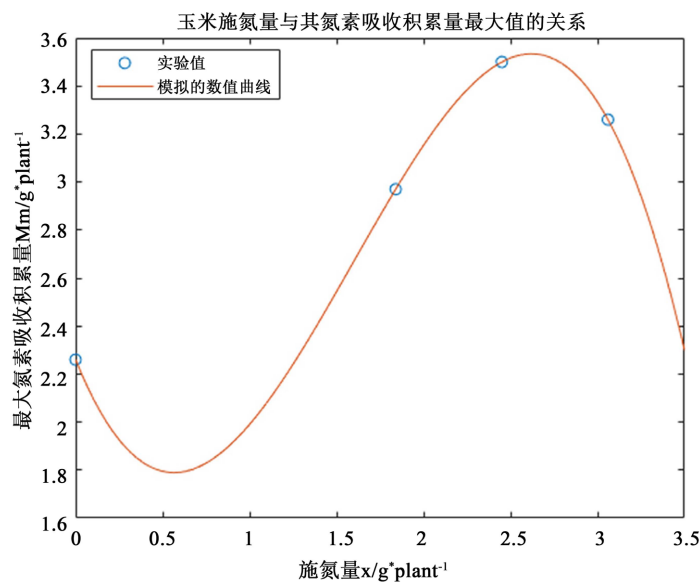


Figure 3. Relationship between nitrogen fertilization rate and maximum nitrogen uptake accumulation in maize

图 3. 玉米施氮量与其氮素吸收积累最大值的关系

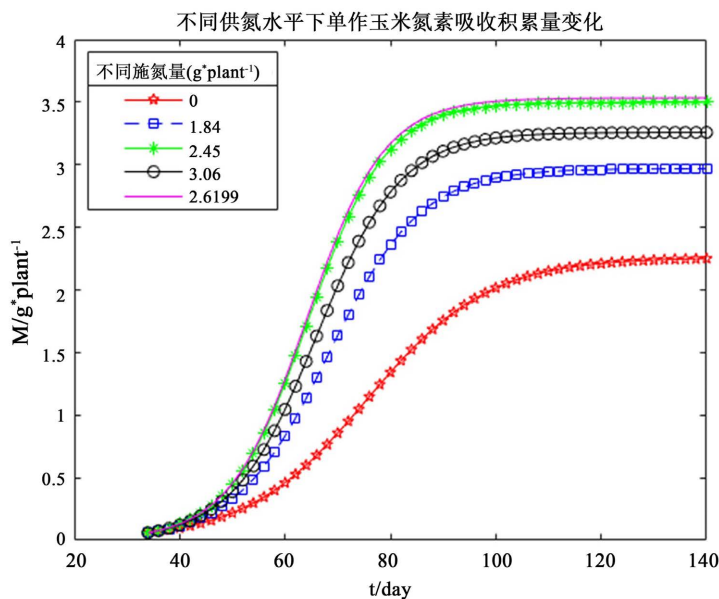


Figure 4. Changes in nitrogen uptake and accumulation of monoculture maize under different nitrogen levels

图 4. 不同氮水平下单作玉米氮素吸收积累量变化

Table 10. Nitrogen uptake and accumulation of 140 days of maize with different nitrogen application rates and monoculture

表 10. 不同施氮量与单作玉米 140 天时氮素吸收积累量

施氮量 $x/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0	1.84	2.45	2.6199	3.06
140 天时氮素吸收积累量 ($M_m/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)	2.25	2.97	3.50	3.5330	3.26

4. 不同氮水平下大豆与玉米间作氮素吸收的非自治微分方程模型

研究表明, 豆科与非豆科作物间作已成为一种农业可持续发展模式, 而与豆科作物根系共生的根瘤菌可固定大气中的氮, 在满足自身需求的前提下, 还可以通过各种途径为伴生的非豆科植物提供氮源[16][17]。但是, 无论在何种施氮量下, 大豆和玉米间作时的氮素各自主体吸收积累量仍然具有 Logistic 微分方程中的项, 再加上间作时共享土壤中营养的相互作用项。因此, 我们可以建立在不同氮水平下的大豆与玉米间作时氮素吸收的非自治微分方程模型。讨论在不同氮水平下, 间作对于大豆和玉米各自的氮素吸收积累量的影响, 以及最佳供氮量相比单作时是否减少, 氮素利用率是否提升等相关问题。

4.1. 模型的建立

从参考文献[13]中, 我们分析提取如下重要事实信息:

(F1) 在不同氮水平下, 间作玉米和大豆各自的氮素吸收积累过程依然符合“S”型增长规律。相比于单作, 大豆与玉米间作能够有效的发挥大豆的固氮作用, 为间作系统提供除了土壤氮和肥料氮以外的第三氮源, 由此不仅能使玉米氮素吸收量增加, 而且还能有效地抑制大豆自身的“氮遏制”作用;

(F2) 由于不同株型的作物占据不同的生态位, 玉米的根系分布较浅, 大豆根系较深且为直根系, 因此, 间作模式充分利用了空间生态位的差异, 进而提高了整个系统的养分利用率;

(F3) 玉米的种间竞争能力要强于大豆, 说明了玉米更具有间作优势;

为此, 我们可以作出如下合理假设:

(H1) 在间作系统下, 可将大豆和玉米从根部吸收到氮素的土壤空间分为两个: 自主空间和共享空间;

(H2) 在自主土壤空间里, 大豆和玉米各自主体对氮素的吸收都符合“S”型的 Logistic 增长模式;

(H3) 在共享土壤空间, 与大豆共生的固氮根瘤菌释放了一定量的氮养分, 以供给系统中的其他伴生植物, 故而使得大豆的氮素吸收速率减缓, 处于弱劣势; 同时, 玉米则获得更多的氮养分供给, 处于竞争优势; 因此, 可设大豆的氮素吸收积累速率相对于玉米的成反比, 而玉米的氮素吸收积累速率相对于大豆的则成正比;

(H4) 只考虑交错行单株大豆和单株玉米的氮素吸收积累量情况;

(H5) 忽略间作对于大豆和玉米这两种作物的内禀增长率的微弱影响, 内禀增长率依旧取单作时的关系式。

根据以上事实和假设, 并参考[11]的建模思想, 我们基于单作自主吸氮模型(2)和(5), 建立间作共享吸氮空间模型。设单株大豆与玉米间作时在 t 时刻的氮素吸收积累量分别为 $S(t)$ 、 $M(t)$ 初值分别为 $S(34)=0.03$, $M(34)=0.06$, 氮素吸收的增长率分别为 $h_S r_S(t)$ 、 $h_M r_M(t)$, 最大氮素吸收积累量分别为 $h_S S_0$ 、 $h_M M_0$, 抑制作用影响因子为 η , 促进作用影响因子为 γ , 且 $0 < \eta < 1$, $\gamma > 0$ 。于是, 建立在不同氮水平下大豆与玉米间作氮素吸收积累的二维非自治微分方程模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = h_S r_S(t) S \left(1 - \frac{S}{\bar{S}_m} - \eta \frac{M}{\bar{M}_m} \right) \\ \frac{dM}{dt} = h_M r_M(t) M \left(1 - \frac{M}{\bar{M}_m} + \gamma \frac{S}{\bar{S}_m} \right) \end{cases} \quad (7)$$

其中 h_S 、 h_M 分别为间作大豆和玉米有关施氮量的影响因子, 最大值分别为 $\bar{S}_m = h_S S_m$, $\bar{M}_m = h_M M_m$, 其他参数同模型(1)、(4)。

4.2. 数值模拟及结论

根据文献[11]中的结论, 可选定微分方程组模型(7)的参数为 $\eta=0.1994$, $\gamma=0.3804$, 满足条件 $0 < \eta < 1/2$, $\gamma > \eta/1-2\eta \approx 0.3317$ 。

拟合效果: 根据文献[13]内容, 我们整理得到不同供氮水平下, 间作大豆及玉米的氮素吸收积累量的相关数据见表 11 及表 12。

Table 11. Nitrogen uptake accumulation of intercropping soybean under different nitrogen levels

表 11. 不同氮水平下间作大豆的氮素吸收积累量

施氮量 \ 时间 day	40	48	54	76	93	109	128	132
0 g·plant ⁻¹	0.06	0.09	0.12	0.30	0.53	0.76	0.95	0.98
0.2 g·plant ⁻¹	0.07	0.11	0.14	0.34	0.59	0.85	1.11	1.14
0.4 g·plant ⁻¹	0.09	0.13	0.18	0.46	0.77	1.04	1.24	1.26
0.61 g·plant ⁻¹	0.08	0.12	0.16	0.40	0.68	0.93	1.12	1.15

借助于上述数据, 通过 matlab 编程计算分别得到不同氮水平下间作大豆及玉米的实验数据与模拟数据之间的拟合程度见表 13 及表 14。

Table 12. Nitrogen uptake accumulation of intercropping maize at different nitrogen levels
表 12. 不同氮水平下间作玉米的氮素吸收积累量

时间 day	34	48	70	85	99	109	126	140
施氮量								
0 g·plant ⁻¹	0.09	0.21	1.19	2.10	2.50	2.60	2.65	2.65
1.84 g·plant ⁻¹	0.07	0.28	1.53	2.73	3.28	3.42	3.50	3.51
2.45 g·plant ⁻¹	0.18	0.50	1.81	3.01	3.76	4.03	4.23	4.28
3.06 g·plant ⁻¹	0.12	0.37	1.60	2.77	3.43	3.64	3.77	3.80

Table 13. Table of fitting effect of intercropping soybean under different nitrogen application rates

表 13. 不同施氮量下间作大豆的拟合效果表

施氮量(x/g·plant ⁻¹)	0	0.2	0.4	0.61
相关系数(R ²)	0.9984	0.9932	0.9985	0.9978

Table 14. Table of fitting effect of intercropping maize under different nitrogen application rates

表 14. 不同施氮量下间作玉米的拟合效果表

施氮量(x/g·plant ⁻¹)	0	1.84	2.45	3.06
相关系数(R ²)	0.9878	0.9986	0.9846	0.9926

结论一: 表 13 及表 14 中的相关系数均在 98% 以上说明, 我们的模型拟合效果很好, 误差相对较小, 可以较精确地预测不同氮水平下间作大豆及玉米在各生育期内的氮素吸收积累量。

数值模拟: 对模型(7)进行数值模拟, 得到在不同氮水平下间作大豆和玉米氮素吸收积累量变化的相关曲线图, 见图 5 及图 6。

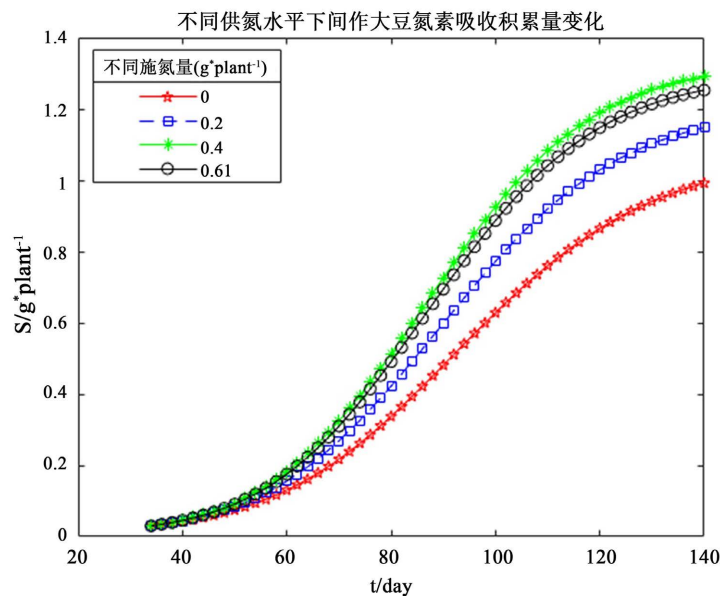


Figure 5. Changes in nitrogen uptake in intercropping soybean under different nitrogen levels

图 5. 不同氮水平下间作大豆氮素吸收变化

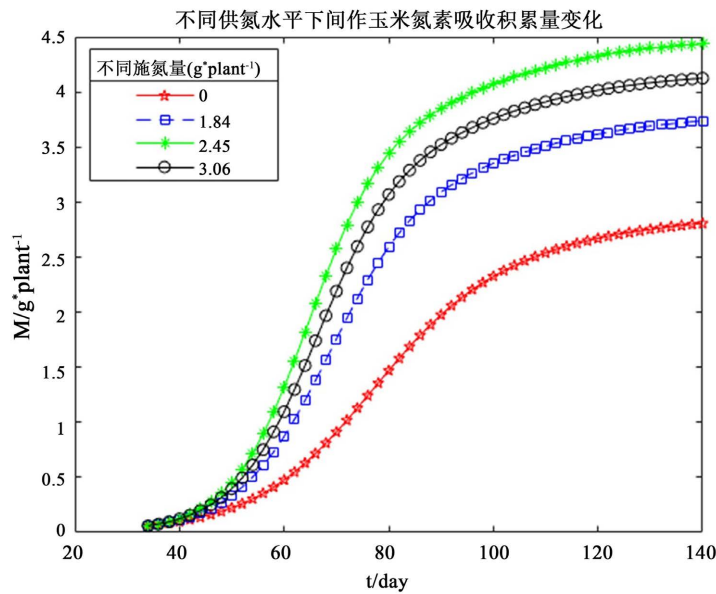


Figure 6. Changes in nitrogen uptake in intercropping maize under different nitrogen levels
图 6. 不同氮水平下间作玉米氮素吸收变化

结论二：从图 5 和图 6 中可得知，不同氮水平下间作大豆和玉米的氮素吸收积累量都符合 S 型曲线生长特征，且间作大豆的氮素吸收积累主要集中在结荚 - 鼓粒期，间作玉米的则是抽雄期 - 灌浆期，与单作时保持一致。

最大氮素吸收积累量模拟：根据模型(5)，我们分别模拟得到了对应不同施氮量时，间作大豆及玉米的最大氮素吸收积累量，见表 15。

对表 15 中的数据进行拟合，得到不同施氮量与大豆和玉米的最大氮素吸收积累量之间的关系式分别为：

$$\begin{aligned} \bar{S}_m &= -2.5604x^3 + 1.2862x^2 + 0.5452x + 1.07 \\ \bar{M}_m &= -0.5167x^3 + 2.4677x^2 - 2.2911x + 2.89 \end{aligned} \tag{8}$$

Table 15. Intercropping soybean/maize nitrogen application rate and its maximum nitrogen uptake accumulation

表 15. 间作大豆/玉米施氮量与其最大氮素吸收积累量

大豆施氮量 $x/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0	0.2	0.4	0.61
大豆最大氮素吸收积累量: $\bar{S}_m/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	1.07	1.21	1.33	1.30
玉米施氮量 $x/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0	1.84	2.45	3.06
玉米最大氮素吸收积累量: $\bar{M}_m/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	2.89	3.81	4.49	4.18

对(8)中各式求导，有 $0.4821 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 为间作大豆的最佳氮水平； $2.6201 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 为间作玉米的最佳氮水平。下面，我们将这两种氮水平分别加入到图 5 及图 6 中，见图 7 及图 8。

结论三：由图 9 可知，最佳间作玉米在 140 天时的氮素吸收积累量达到了 $4.48 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ ，与最佳单作时的 $3.53 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 相比，提高了 26.91%，而自然间作对比自然单作时仅提高了 24.89%，说明施以合适的氮肥对间作玉米来说能够更显著地提升玉米的氮素吸收优势。最佳间作大豆 140 天时的氮素吸收积累量

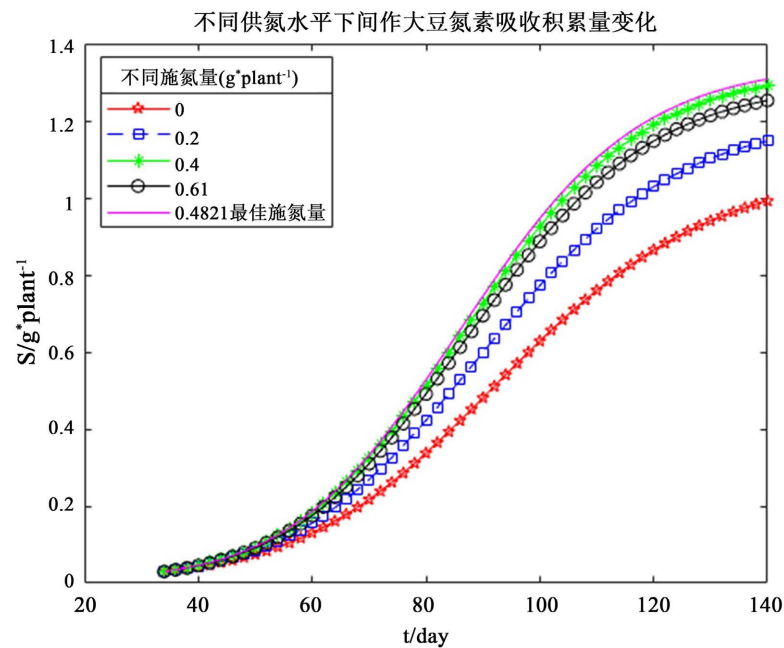


Figure 7. Changes in nitrogen uptake in intercropping soybean under different nitrogen levels
图 7. 不同氮水平下间作大豆氮素吸收变化

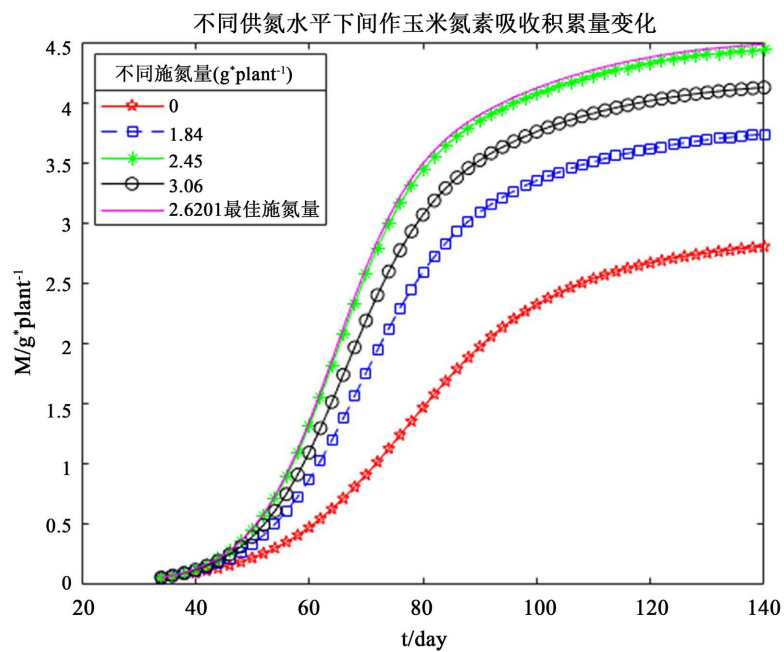


Figure 8. Changes in nitrogen uptake in intercropping maize under different nitrogen levels
图 8. 不同氮水平下间作玉米氮素吸收变化

为 $1.31 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$, 与最佳单作时的 $1.79 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 相比, 降低了 26.82%, 但是自然间作对比自然单作时却降低了 27.74%, 这说明对间作大豆施以合适的氮肥, 能够有效缓解间作对大豆氮养分吸收的负面影响。对于 140 天时两作物的总氮素吸收积累量来说, 最佳间作比起最佳单作时的总氮素吸收积累量增加了 8.83%, 而自然间作对比自然单作时仅增加了 4.97%。见表 16 和图 10。

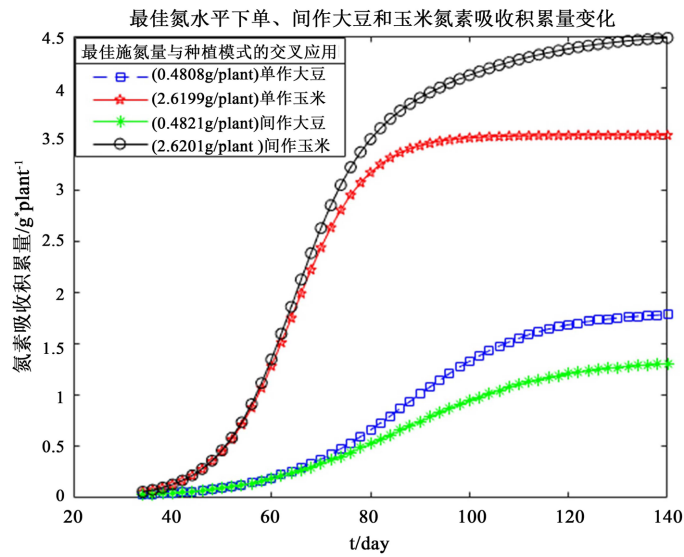


Figure 9. Optimal changes in nitrogen uptake in single and intercropped soybean and maize

图 9. 最佳单、间作大豆和玉米氮素吸收变化

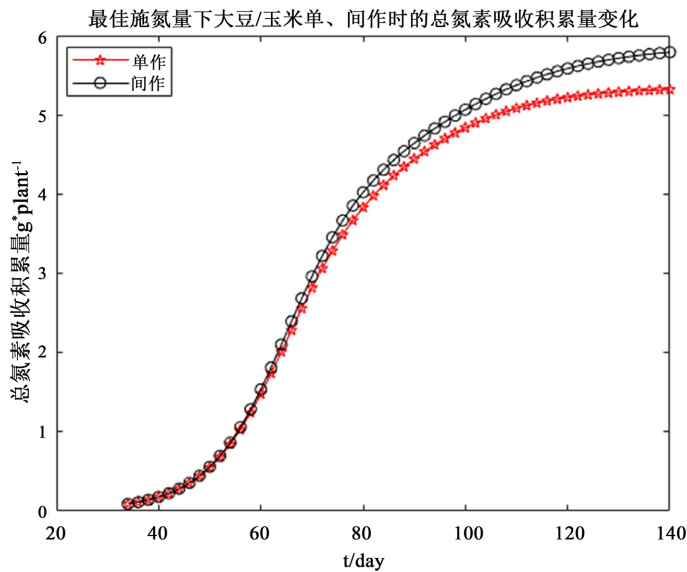


Figure 10. Changes in total nitrogen uptake in optimal mono- and intercropping soybean and maize

图 10. 最佳单、间作大豆和玉米的总氮素吸收变化

Table 16. Changes in nitrogen uptake at 140 days at the optimal nitrogen application rate under single and intercropping soybean/maize and system

种植模式	作物种类		
	大豆	玉米	两种作物
单作($\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)	1.79	3.53	5.32
间作($\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$)	1.31	4.48	5.79
间作相对于单作增长率	26.82% ↓	26.91% ↑	8.83% ↑

在同一种植模式下, 各种农作物的氮肥利用率在不同氮水平之间是不同的。下面, 计算大豆、玉米在自然条件与最佳氮水平下 140 天时的氮素吸收差比, 以及氮肥利用率的变化情况, 结果见表 17、表 18 及图 11、图 12。

Table 17. Changes in nitrogen uptake difference ratio and utilization efficiency of single and intercropping soybean under different nitrogen levels for 140 days

表 17. 不同氮水平下单、间作大豆 140 天时氮素吸收差比及其利用率的变化

吸收及利用率	种植类型	自然单作 (0 g/plant)	最佳单作 (0.4808 g/plant)	自然间作 (0 g/plant)	最佳间作 (0.4821 g/plant)
氮素吸收积累量(g/plant)		1.37	1.79	0.99	1.31
吸收差比%		—	30.66†	—	32.32†
氮肥利用率%		—	87.35	—	66.38

补充说明: 吸收差比及氮肥利用率为同等种植模式下的相同作物, 由自然条件到最佳氮水平下的氮素吸收积累量的计算结果, 下同。

结论四:

- 1) 单作大豆与间作大豆的最佳施氮量相差不大;
- 2) 最佳单、间作大豆的氮素吸收积累量比自然条件时的分别提高了 30.66%、32.32%, 这说明对间作大豆施以合适的氮肥, 可以缓解间作对大豆带来的氮养分危机, 使得间作大豆的氮素吸收积累回归单作时的水平。
- 3) 最佳单作大豆的氮肥利用率高达 87.35%, 而最佳间作大豆的氮肥利用率仅为 66.38%; 究其原因虽然是单作大豆与间作大豆的最佳施氮量相差不大, 但是间作模式下玉米的氮养分竞争能力强于大豆, 使得大豆的氮素吸收积累量有所下降, 从而导致最佳间作大豆的氮肥利用率小于最佳单作。

Table 18. Changes in nitrogen uptake difference ratio and utilization efficiency of single and intercropping maize under different nitrogen levels for 140 days

表 18. 不同氮水平下单、间作玉米 140 天时氮素吸收差比及其利用率的变化

吸收及利用率	种植类型	自然单作 (0 g/plant)	最佳单作 (2.6199 g/plant)	自然间作 (0 g/plant)	最佳间作 (2.6201 g/plant)
氮素吸收积累量(g/plant)		2.25	3.53	2.81	4.48
吸收差比%		—	56.89†	—	59.43†
氮肥利用率%		—	48.86	—	63.74

结论五:

- 1) 单作玉米与间作玉米的最佳施氮量相差也不大;
- 2) 最佳单、间作玉米的氮素吸收积累量比在自然条件时分别提高了 56.89%、59.43%, 这说明对间作玉米施以合适的氮肥, 可以在最佳单作的基础上, 使最佳间作的氮素吸收积累量得到进一步的提升。
- 3) 最佳单作玉米的氮肥利用率仅为 48.86%, 而最佳间作玉米的氮肥利用率达到了 66.38%; 由于单作大豆与间作大豆的最佳施氮量相差不大, 故在间作模式下, 玉米的氮养分竞争能力强于大豆, 且大豆的固氮能力会为间作系统提供额外的氮肥, 这就使得间作玉米的氮素吸收积累量有所提升, 从而导致最佳间作玉米的氮肥利用率大于最佳单作。

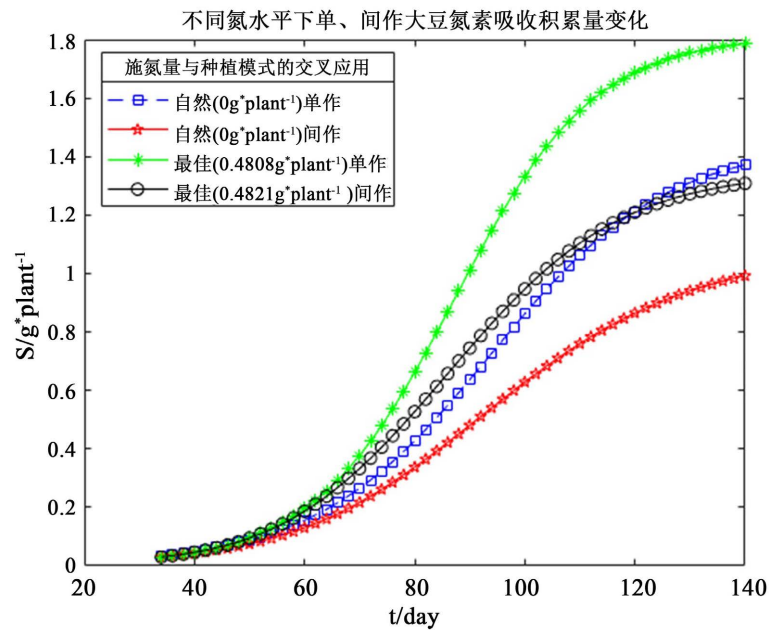


Figure 11. Changes in nitrogen uptake of single and intercropped soybean under different nitrogen levels

图 11. 不同氮水平下单、间作大豆氮素吸收变化

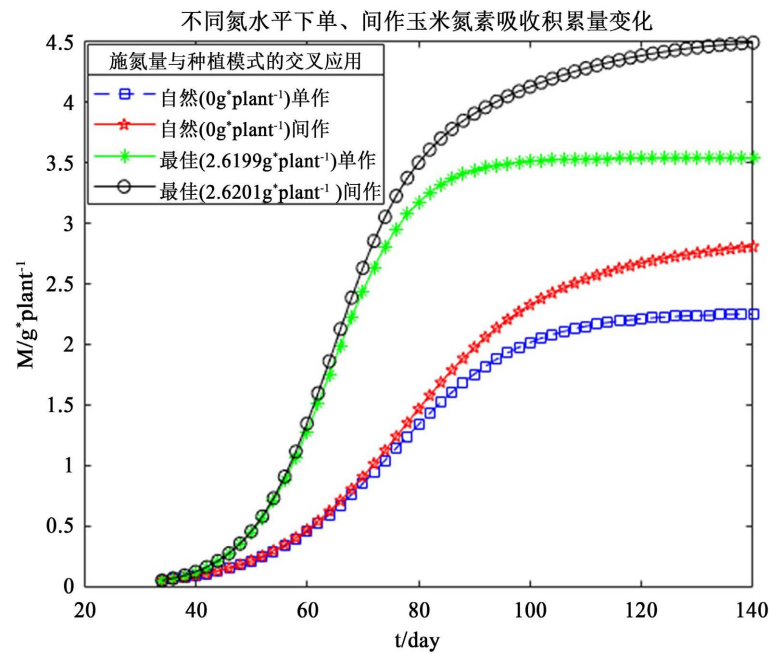


Figure 12. Changes in nitrogen uptake of single and intercropped maize under different nitrogen levels

图 12. 不同氮水平下单、间作玉米氮素吸收变化

结论六:

由图 11 知, 140 天时大豆氮素吸收积累量在不同交叉种植模式下的大小排序为: 最佳(0.4808 g/plant)单作 > 自然(0 g/plant)单作 > 最佳(0.4821 g/plant)间作 > 自然(0 g/plant)间作;

由图 12 知, 140 天时玉米氮素吸收积累量在不同交叉种植模式下的排序为: 最佳(2.6201 g/plant)间作 > 最佳(2.6199 g/plant)单作 > 自然(0 g/plant)间作 > 自然(0 g/plant)单作。

5. 结论

在本文中, 首先依据农学上的研究, 分别对大豆与玉米的氮素吸收机制进行归纳总结, 作出相应的合理假设, 通过改进 Logistic 模型中的增长率, 建立自然条件下大豆与玉米单作生长时关于氮素吸收的一维非自治 Logistic 微分方程模型(1)、(4), 数值模拟得出相应的未知参数。又进一步加入施氮量这一影响因子而建立了模型(2)、(5)。经数值模拟发现, 模拟值分别与表 3、表 8 中的实验数据高度吻合, 由此验证了这两种模型都能够合理有效地模拟并解释大豆与玉米在生长发育过程中, 施氮量是如何影响它们的氮素吸收积累过程的。从图 2 和图 4 中, 我们发现, 不同施氮量下单作大豆和玉米整株的氮素吸收积累量均符合 S 型曲线生长特征, 且单作大豆的氮素吸收积累时间较玉米长。因为大豆的氮素吸收积累依然主要集中在结荚鼓粒期, 玉米则依然集中在抽雄灌浆期, 所以, 我们应保证在这两个时段内分别对大豆和玉米进行合理的氮养分供给, 以保证它们的健康生长。

然后, 考虑到大豆和玉米在间作时对彼此的氮养分吸收情况存在促进或抑制的作用, 在模型(2)、(5)的基础上加入了合理反映间作共享土壤空间中氮素的双线性耦合项, 建立了不同氮水平下大豆与玉米间作生长时关于氮素吸收的二维非自治微分方程模型(7)。模型(7)的模拟值同样与表 11、表 12 中的实验数据高度吻合, 相关系数均在 98% 以上。接着, 拟合得到不同施氮量与大豆和玉米的最大氮素吸收积累量之间的关系式, 进而求出两作物在间作模式下的最佳施氮量。由图 9 和图 10 可知, 在最佳氮水平下, 间作玉米在 140 天时氮素吸收积累量达到了 $4.48 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$, 与单作时的 $3.53 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 相比, 提高了 26.91%, 而在自然条件下仅提高了 24.89%, 这说明施以合适的氮肥对间作玉米来说能够更显著地提升玉米的氮素吸收优势。而就间作大豆而言, 最佳氮水平下 140 天时的氮素吸收积累量为 $1.31 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$, 与单作时的 $1.79 \text{ g}\cdot\text{plant}^{-1}$ 相比, 降低了 26.82%, 而在自然条件下降低了 27.74%, 这说明对于间作大豆施以合适的氮肥, 能够缓解间作模式对大豆氮养分吸收的负面影响。对于最佳氮水平下玉米和大豆 140 天时两者的总氮素吸收积累量来说, 比起两者单作时的总氮素吸收积累量增加了 8.83%。而就氮肥的利用率而言, 最佳间作大豆相比最佳单作大豆下降了 24.01%, 而最佳间作玉米相比最佳单作玉米则提高了 30.45%。

总之, 依据本文的模型和数值模拟结果分析, 在选择大豆和玉米这一种植模式时, 可以在间作的基础上合理合时地施加氮肥, 以得到更好地氮素吸收积累效果及更高的氮肥利用率。

参考文献

- [1] 王天亮, 程皓. 农业生产中的氮肥施用现状及其环境效应研究进展[J]. 黑龙江环境通报, 2020, 33(3): 58-59.
- [2] 陈光荣, 王立明, 杨如萍, 等. 甘肃不同生态区豆科与非豆科间套作高效栽培技术及其应用前景[J]. 中国农业科技导报, 2017, 19(3): 63-71.
- [3] 朱树秀, 季良, 阿米娜. 玉米单作及与大豆混作中氮来源的研究[J]. 西北农业学报, 1994(1): 59-61.
- [4] 张晓娜, 陈平, 杜青, 等. 玉米/大豆、玉米/花生间作对作物氮素吸收及结瘤固氮的影响[J]. 中国生态农业学报(中英文), 2019, 27(8): 1183-1194.
- [5] 王林, 王琦, 李强, 等. 覆盖和粮草间作对作物氮素吸收利用和土壤硝态氮累积的影响[J]. 草原与草坪, 2014, 34(6): 1-9.
- [6] 褚贵新, 沈其荣, 李奕林, 等. 用 ^{15}N 叶片标记法研究旱作水稻与花生间作系统中氮素的双向转移[J]. 生态学报, 2004(2): 278-284.
- [7] 王雪蓉, 张润芝, 李淑敏, 等. 不同供氮水平下玉米/大豆间作体系干物质积累和氮素吸收动态模拟[J]. 中国生态农业学报(中英文), 2019, 27(9): 1354-1363.
- [8] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2011.

- [9] 张林, 化存才, 强继业. 降低 UV-B 辐射对烤烟株高影响的非自治 Logistic 模型[J]. 生物数学学报, 2012, 27(4): 689-694.
- [10] 梁仕军. 三种不同环境下花生生长发育的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2021.
- [11] 段国梅. 大豆和玉米单、间作的氮养分吸收的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2023.
- [12] 冯丽娟. 大豆需肥规律及科学施肥技术[J]. 现代化农业, 2019(1): 23-24.
- [13] 王雪蓉. 施氮水平对玉米/大豆间作干物质累积和养分吸收的影响[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 东北农业大学, 2019.
- [14] 李文斌. 声频控制对水稻分蘖期生长影响的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2019.
- [15] 程雪琦, 陈宁远, 魏杰. 我国玉米进出口贸易的现状问题及对策[J]. 河北农业科学, 2023, 27(2): 100-103.
- [16] 谢开云, 王玉祥, 万江春, 等. 混播草地中豆科/禾本科牧草氮转移机理及其影响因素[J]. 草业学报, 2020, 29(3): 157-170.
- [17] Nourbakhsh, F., Koocheki, A. and Mahallati, M.N. (2019) Investigation of Biodiversity and Some of the Ecosystem Services in the Intercropping of Corn, Soybean and Marshmallow. *International Journal of Plant Production*, **13**, 35-46. <https://doi.org/10.1007/s42106-018-0032-0>