Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 531-538
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132052

Hans汉斯

一类图和偶圈的直积的超边连通度

郭思佳，赵　爽*，王　健

太原理工大学数学学院，山西　晋中

收稿日期：2024年1月21日；录用日期：2024年2月19日；发布日期：2024年2月26日

摘　要

连通图G的超边连通度是指使得图G不连通且每个连通分支没有孤立点要删除的最少的边数，用$\lambda'(G)$表示。图G和H的直积，定义为$G\times H$，是顶点集为$V(G\times H)=V(G)\times V(H)$的图，其中两个顶点$(u_1,v_1)$和$(u_2,v_2)$在$G\times H$相邻当且仅当$u_1u_2\in E(G)$且$v_1v_2\in E(H)$。马天龙等人证明了$G$和完全图$K_n$的直积的超边连通度。本文证明了当$n\geq 4$且$n$为偶数时，一类图$G$和圈$C_n$的直积的超边连通度为$\lambda'(G\times C_n)=\min\left\{2n\lambda'(G),\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}\right\}$。

关键词

边连通度，超边连通度，直积

The Super Edge-Connectivity of Direct Product of a Family of Graph and an Even Cycle

Sijia Guo, Shuang Zhao*, Jian Wang

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Jan. 21st, 2024; accepted: Feb. 19th, 2024; published: Feb. 26th, 2024

Abstract

The super edge-connectivity of a connected graph G, denoted by $\lambda'(G)$, is the minimum number

*通讯作者。

文章引用: 郭思佳, 赵爽, 王健. 一类图和偶圈的直积的超边连通度[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 531-538.
DOI: 10.12677/aam.2024.132052

of edges whose deletion disconnects the graph such that each connected component has no isolated vertices. The direct product of graphs *G* and *H*, denoted by $G\times H$, is the graph with vertex set $V(G\times H)=V(G)\times V(H)$, where two vertices (u_1,v_1) and (u_2,v_2) are adjacent in $G\times H$ if and only if $u_1u_2\in E(G)$ and $v_1v_2\in E(H)$. Tianlong Ma *et al.* proved the super edge-connectivity of the direct product of *G* and complete graph. In this paper, it is proved that $\lambda'(G\times C_n)=\min\left\{2n\lambda'(G),\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}\right\}$ for a family of a graph *G*, where $n\geq 4$ and *n* is even.

Keywords

Edge-Connectivity, Super Edge-Connectivity, Direct Product

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

圈 C_n 的点集为 $V(C_n)=\mathbb{Z}_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，其中点 i 与点 $i+1$ 相邻。$G=(V,E)$ 是无向，有限阶的简单图。$|G|$ 表示 G 的顶点数。对于 G 的任意一点 u，$N_G(u)$ 是指 G 中与 u 相邻的点集，$\deg_G(u)$ 是指 G 中与 u 关联的边的数目。对于 G 中的任意一条边 $e=uv$，e 的边度定义为 $\xi_G(e)=\deg_G(u)+\deg_G(v)-2$。$G$ 的最小边度 $\xi(G)$ 定义为 $\min\{\xi(e):e\in E(G)\}$。G 的最小度 $\delta(G)$ 定义为 $\min\{\deg_G(u):u\in V(G)\}$。$G$ 的两个不交的非空集合 A 和 B，$[A,B]$ 表示一个端点在 A 且另一个端点在 B 的边的集合。对于任意集合 $S\subseteq E(G)$，$G-S$ 表示从 G 中删掉 S 中所有边得到的图。对于任意的连通图 G，如果 $G-S$ 是不连通的，则 S 是 G 的一个边割。如果 $G-S$ 没有孤立点，则边割 S 是一个超边割。

定义 1.1：设 G 是一个连通图，其超边连通度 $\lambda'(G)$ 的定义为：

$\lambda'(G)=\min\{|S|:S\subseteq E(G)\}$，其中 S 是 G 的超边割；

如果超边连通度不存在，则 $\lambda'(G)=+\infty$。

Esfahanian 和 Hakimi [1]在 1988 年引入了超边连通度的概念，并证明出如果 G 不是 K_3 也不是 $K_{1,n-1}$ 时，则 $\lambda(G)\leq\lambda'(G)\leq\xi(G)$。

定义 1.2：设 G 和 H 是两个无向图，图 G 和 H 的直积 $G\times H$，是顶点集为 $V(G\times H)=V(G)\times V(H)$ 的图，其中两个顶点 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 在 $G\times H$ 相邻当且仅当 $u_1u_2\in E(G)$ 且 $v_1v_2\in E(H)$。

Weichsel [2]证明了两个非平凡图的直积图是连通的当且仅当这两个图都是连通的，且至少有一个不是二部图。Brešar 和 Špacapan [3]得到了图 $G\times H$ 的边连通度的上界和下界。Cao，Brglez，Špacapan 和 Vumar 在[4]中确定了非平凡图与完全图的直积的边连通度。Špacapan [5]不仅得到了两个图的直积的边连通度，而且刻画了这个直积图中最小边割的结构。王伟和严志丹[6]确定了 G 与 K_2 的直积的点连通度。杨超[7]得到了非平凡图 G 与 K_2 的直积的边连通度。马天龙，王金玲和张明祖[8]得到了当 $n\geq 3$ 时，非平凡图与完全图 K_n 的直积的超边连通度。Sonawane 和 Borse [9]得到了当 G 是二部图或 C 是偶圈时，$G\times C$ 的点连通度。

定义 1.3：对于 G 中的任意一点 u_i，$G\times C_n$ 中关于 u_i 的 C_n 层的定义如下：

$$C_n^{u_i}=\{(u_i,j)\in V(G)\times V(C_n):j\in V(C_n)\}。$$

本文主要研究当 $n\ge 4$ 且 n 为偶数时，满足以下条件的非平凡图 G 与偶圈 C_n 的直积的超边连通度：1) $|G|=n$；2) G 的任意两点间都存在长度为 2 的路。

2. 主要结论及其证明

我们首先给出主要结论的证明中所需要的引理。

引理 2.1 [10]：若 G 是一个连通图，则

$\lambda'(G\times C_n)\le \min\left\{2n\lambda'(G),\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}\right\}$，其中 $n\ge 3$。

引理 2.2 [10]：对于任意的连通图 G，设 $S\subset E(G\times C_n)$ 是 $G\times C_n$ 的一个超边割，设 $C_1,C_2,\cdots,C_r\ (r\ge 2)$ 为 $G\times C_n-S$ 的若干个连通分支。对于 G 中的任意一点 u_i，如果都存在一个连通分支 C_f，使得 $C_n^{u_i}\subseteq C_f$，那么 $|S|\ge 2n\lambda'(G)$。

引理 2.3 [10]：对于阶为 n 的连通图 G，设 $S\subset E(G\times C_n)$ 是 $G\times C_n$ 的一个最小超边割且 $|S|<2n\lambda'(G)$，设 C_1 和 C_2 为 $G\times C_n-S$ 的两个连通分支，则在 G 中存在一点 u_i，使得 $C_n^{u_i}\cap C_1\ne\varnothing$ 且 $C_n^{u_i}\cap C_2\ne\varnothing$。此外，若 u_i 在 G 中的每一个邻点 u_j 都满足 $C_n^{u_j}\subset C_1$ 或 $C_n^{u_j}\subset C_2$，则 $|S|>\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}$。

引理 2.4 [11]：设 F 和 H 为图 G 中两个不交的子图，使得 F 和 H 不连通所要删掉的最少边数等于 F 和 H 间边不交路的最大条数。

设 $S\subset E(G\times C_n)$ 是 $G\times C_n$ 的一个最小超边割，设 C_1 和 C_2 为 $G\times C_n-S$ 的两个连通分支，由上述引理可知，$|S|$ 不小于连接 C_1 和 C_2 中的点的边不交路的最大条数。接下来的证明我们使用该方法。

定理 2.5：设 G 是阶为 n 的非二部连通图，若 G 中任意两点都有长为 2 的路，则

$\lambda'(G\times C_n)=\min\left\{2n\lambda'(G),\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}\right\}$，其中 $n\ge 4$ 且 n 是偶数。

证明：由引理 2.1 可知，只需证 $\lambda'(G\times C_n)\ge\min\left\{2n\lambda'(G),\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}\right\}$。

设 $S\subset E(G\times C_n)$ 是 $G\times C_n$ 的一个最小超边割，设 C_1 和 C_2 为 $G\times C_n-S$ 的两个连通分支，使用反证法，假设 $|S|<2n\lambda'(G)$ 且 $|S|<\min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}$，由引理 2.3 可知，在 G 中存在一点 u_i，使得 $C_n^{u_i}\cap C_1\ne\varnothing$ 且 $C_n^{u_i}\cap C_2\ne\varnothing$。接下来我们分两种情况进行讨论：

情况 1. 在 G 中存在一个 u_i 的邻居 u_j，使得 $C_n^{u_j}\cap C_1\ne\varnothing$ 且 $C_n^{u_j}\cap C_2\ne\varnothing$。

由于 G 中的任意两点都有长为 2 的路，则 u_i 和 u_j 至少有一个公共的邻点，不妨设该点为 u_a。假设 $N_G(u_i)=\left\{u_j\left(=u_{h_1}\right),u_a\left(=u_{h_2}\right),\cdots,u_{h_k}\right\}$ 且 $N_G(u_j)=\left\{u_i\left(=u_{g_1}\right),u_a\left(=u_{g_2}\right),\cdots,u_{g_l}\right\}$，其中 $k=\deg_G(u_i)$ 且 $l=\deg_G(u_j)$。

当 n 为偶数时，C_n 是一个二部图，则 C_n 是 2-点可着色的。对于 G 中的任意一点 u_i，$C_n^{u_i}$ 层中点的颜色保留 C_n 中点的颜色。

子情况 1.1. $C_n^{u_i}\cap C_1$ 或 $C_n^{u_i}\cap C_2$ 中点的颜色不同，不妨设 $C_n^{u_i}\cap C_1$ 中点的颜色不同，则在 $C_n^{u_i}\cap C_1$ 中存在一点与 $C_n^{u_i}\cap C_2$ 中某一点的颜色相同，设这两点分别为 (u_i,x_1) 和 (u_i,y_1)。考虑以下路径：

$$P_1:=(u_i,x_1)\to\left(u_{h_t},x_1-1\right)\to\cdots\to\left(u_{h_t},y_1+1\right)\to(u_i,y_1),\quad t\in\{1,\cdots,k\}$$

$$P_2:=(u_i,x_1)\to\left(u_{h_t},x_1+1\right)\to\cdots\to\left(u_{h_t},y_1-1\right)\to(u_i,y_1),\quad t\in\{1,\cdots,k\}$$

P_1 和 P_2 这种结构的路都有 k 条。

子情况 1.1.1. $C_n^{u_j}\cap C_1$ 或 $C_n^{u_j}\cap C_2$ 中点的颜色不同，不妨设 $C_n^{u_j}\cap C_1$ 中点的颜色不同，则在 $C_n^{u_j}\cap C_1$ 中存在一点与 $C_n^{u_j}\cap C_2$ 中某一点的颜色相同，设这两点分别为 (u_j,x_2) 和 (u_j,y_2)。考虑以下路径：

DOI: 10.12677/aam.2024.132052

$$P_3 := (u_j, x_2) \to (u_{g_t}, x_2 - 1) \to \cdots \to (u_{g_t}, y_2 + 1) \to (u_j, y_2), \quad t \in \{2, \cdots, l\}$$

$$P_4 := (u_j, x_2) \to (u_{g_t}, x_2 + 1) \to \cdots \to (u_{g_t}, y_2 - 1) \to (u_j, y_2), \quad t \in \{2, \cdots, l\}$$

P_3 和 P_4 这种结构的路都有 $(l-1)$ 条。

P_1-P_4 为边不交的路，于是

$$\begin{aligned} |S| &\ge k + k + l - 1 + l - 1 = 2(k+l) - 2 \\ &= 2\left(\deg_G(u_i) + \deg_G(u_j)\right) - 2 \\ &\ge \min_{xy \in E(G)} \left\{\left(\deg_G(x) + \deg_G(y)\right) \times 2 - 2\right\} \end{aligned},$$

产生矛盾。

子情况 1.1.2. $C_n^{u_j} \cap C_1$ 中点的颜色相同且 $C_n^{u_j} \cap C_2$ 中点的颜色相同，则 $C_n^{u_j}$ 中的点被平均分配到两个连通分支中，每个连通分支都有 $n/2$ 个点。考虑以下路径：

$$P_5 := (u_j, d) \to (u_i, d+1) \to (u_a, d) \to (u_j, d+1), \quad d \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

$$P_6 := (u_j, d) \to (u_i, d-1) \to (u_a, d) \to (u_j, d-1), \quad d \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

P_5 和 P_6 这种结构的路都有 n 条。

删除 P_1 和 P_2 中 $u_{h_t} = u_j$ 和 $u_{h_t} = u_a$ 的路，剩下的 P_1、P_2、P_5 和 P_6 均为内部边不交的路，于是

$$\begin{aligned} |S| &\ge k - 2 + k - 2 + n + n = 2(k+n-1) - 2 \\ &\ge 2\left(\deg_G(u_i) + \deg_G(u_j)\right) - 2 \\ &\ge \min_{xy \in E(G)} \left\{\left(\deg_G(x) + \deg_G(y)\right) \times 2 - 2\right\} \end{aligned},$$

产生矛盾。

子情况 1.2. $C_n^{u_i} \cap C_1$ 中点的颜色相同且 $C_n^{u_i} \cap C_2$ 中点的颜色相同，则 $C_n^{u_i}$ 中的点被平均分配到两个连通分支中，每个连通分支都有 $n/2$ 个点。

子情况 1.2.1. $C_n^{u_j} \cap C_1$ 或 $C_n^{u_j} \cap C_2$ 中点的颜色不同。

该情况与子情况 1.1.2 类似，故也会产生矛盾。

子情况 1.2.2. $C_n^{u_j} \cap C_1$ 中点的颜色相同且 $C_n^{u_j} \cap C_2$ 中点的颜色相同，则 $C_n^{u_i}$ 中的点被平均分配到两个连通分支中，每个连通分支都有 $n/2$ 个点。考虑以下路径：

$$P_1 := (u_j, d) \to (u_i, d+1) \to (u_a, d) \to (u_j, d+1), \quad d \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

$$P_2 := (u_j, d) \to (u_i, d-1) \to (u_a, d) \to (u_j, d-1), \quad d \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

P_1 和 P_2 这种结构的路都有 n 条。

当 $\delta(G) = 1$ 时，不妨设 $\deg(u_d) = 1$，设 u_d 的一个邻居为 u_h。P_1-P_2 为边不交的路，于是

$$\begin{aligned} |S| &\ge n + 1 + n + 1 - 2 = 2(n+1) - 2 \\ &> 2\left(\deg(u_h) + \deg(u_d)\right) - 2 \\ &\ge \min_{xy \in E(G)} \left\{\left(\deg_G(x) + \deg_G(y)\right) \times 2 - 2\right\} \end{aligned},$$

产生矛盾。

当 $\delta(G) = 2$ 时，不妨设 $\deg(u_d) = 2$，设 u_d 的一个邻居为 u_h。P_1-P_2 为边不交的路，于是

$$\begin{aligned}|S| &\geq n-1+2+n-1+2-2=2(n-1+2)-2 \\ &\geq 2\left(\deg(u_h)+\deg(u_d)\right)-2 \\ &\geq \min_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}\end{aligned},$$

产生矛盾。

当$\delta(G)\geq 3$且$C_n^{u_i}\cap C_1$与$C_n^{u_j}\cap C_1$中点的颜色不同时，不妨设u_b和u_c分别为u_i和u_j的邻点，接下来的证明分两种情况讨论：

1) 若u_i和u_j至少存在两个公共邻点，不妨设$u_b=u_c$，如图1所示，考虑以下路径：

$$P_3:=(u_i,d)\to(u_b,d+1)\to(u_j,d)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_4:=(u_i,d)\to(u_b,d-1)\to(u_j,d)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

P_3和P_4这种结构的路都有n条。

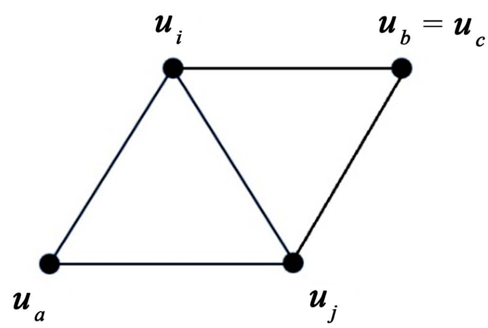

Figure 1. $u_b=u_c$

图 1. $u_b=u_c$

2) 若u_i和u_j只存在一个公共邻点，则$u_b\neq u_c$。由于G中任意两点都有长为2的路，设u_b到u_c的一条长为2的路为(u_b,u_d,u_c)，其中$u_d\neq u_j$且$u_d\neq u_i$，否则与u_i和u_j只存在一个公共邻点矛盾，如图2所示。考虑以下路径：

$$P_5:=(u_i,d)\to(u_b,d+1)\to(u_d,d)\to(u_c,d+1)\to(u_j,d)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_6:=(u_i,d)\to(u_b,d-1)\to(u_d,d)\to(u_c,d-1)\to(u_j,d)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

P_5和P_6这种结构的路都有n条。

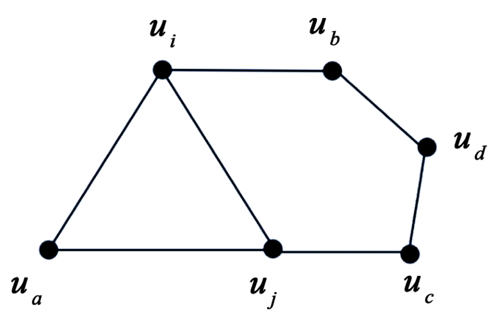

Figure 2. $u_b\neq u_c$

图 2. $u_b\neq u_c$

上述两种情况出现的路与 P_1、P_2 均为边不交的路。因此这两种情况，都有
$\left|S\right| \geq n+n+n+n > \min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}$，产生矛盾。

当 $\delta(G)\geq 3$ 且 $C_n^{u_i}\cap C_1$ 与 $C_n^{u_j}\cap C_1$ 中点的颜色相同时，考虑以下路径：

$$P_1 := (u_i,d)\rightarrow(u_j,d+1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_2 := (u_i,d)\rightarrow(u_j,d-1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

设 u_a 的另一邻点为 u_f，u_f、u_b 和 u_c 三者之间的关系主要分以下两种情况讨论：
1) 当 $u_b\neq u_f$ 且 $u_f\neq u_c$ 时。设 u_b 到 u_f 的一条 2 长的路为 (u_b,u_h,u_f)。
当 $u_h=u_a$ 时，如图 3 所示，考虑以下路径：

$$P_3 := (u_i,d)\rightarrow(u_b,d+1)\rightarrow(u_a,d)\rightarrow(u_j,d+1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_4 := (u_i,d)\rightarrow(u_b,d-1)\rightarrow(u_a,d)\rightarrow(u_j,d-1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

P_3 和 P_4 这种结构的路都有 n 条。

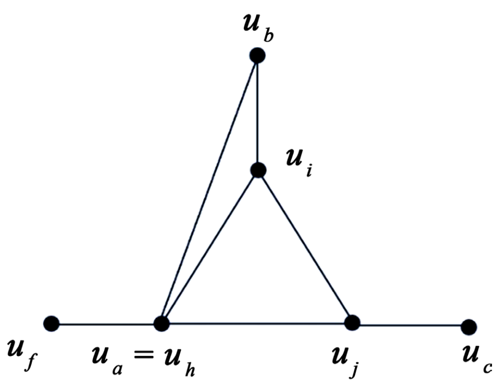

Figure 3. $u_h=u_a$

图 3. $u_h=u_a$

当 $u_h=u_j$ 时，如图 4 所示，考虑以下路径：

$$P_5 := (u_i,d)\rightarrow(u_a,d+1)\rightarrow(u_f,d)\rightarrow(u_j,d+1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_6 := (u_i,d)\rightarrow(u_a,d-1)\rightarrow(u_f,d)\rightarrow(u_j,d-1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

P_5 和 P_6 这种结构的路都有 n 条。
当 $u_h=u_i$ 时，如图 5 所示，考虑以下路径：

$$P_7 := (u_i,d)\rightarrow(u_f,d+1)\rightarrow(u_a,d)\rightarrow(u_j,d+1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_8 := (u_i,d)\rightarrow(u_f,d-1)\rightarrow(u_a,d)\rightarrow(u_j,d-1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

P_7 和 P_8 这种结构的路都有 n 条。
否则，如图 6 所示，考虑以下路径：

$$P_9 := (u_i,d)\rightarrow(u_b,d+1)\rightarrow(u_h,d)\rightarrow(u_f,d+1)\rightarrow(u_a,d)\rightarrow(u_j,d+1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

$$P_{10} := (u_i,d)\rightarrow(u_b,d-1)\rightarrow(u_h,d)\rightarrow(u_f,d-1)\rightarrow(u_a,d)\rightarrow(u_j,d-1)，\quad d\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

P_9 和 P_{10} 这种结构的路都有 n 条。

P_1、P_2 与 P_3、P_4 或 P_5、P_6 或 P_7、P_8 或 P_9、P_{10} 为边不交的路，因此上述的所有情况，都有 $|S| \geq n+n+n+n > \min\limits_{xy\in E(G)}\left\{\left(\deg_G(x)+\deg_G(y)\right)\times 2-2\right\}$，产生矛盾。

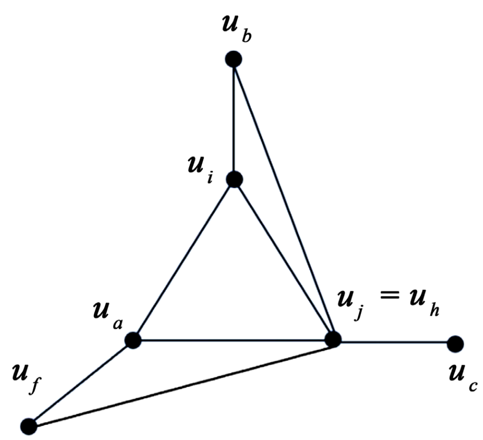

Figure 4. $u_h = u_j$

图 4. $u_h = u_j$

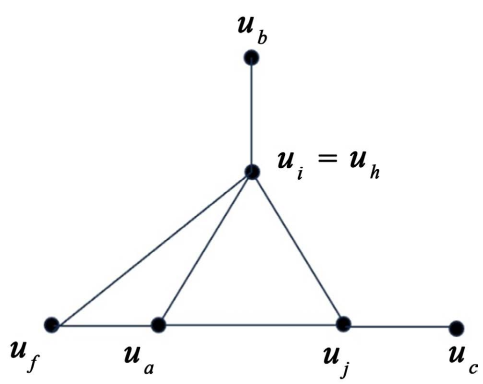

Figure 5. $u_h = u_i$

图 5. $u_h = u_i$

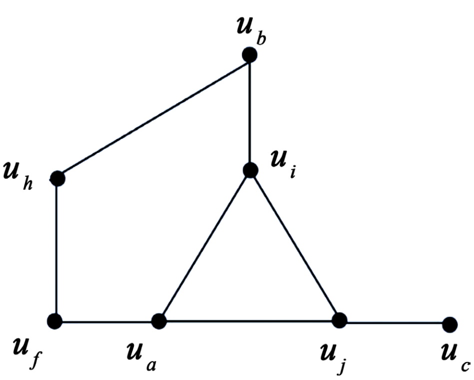

Figure 6. $u_h \notin \{u_a, u_i, u_j\}$

图 6. $u_h \notin \{u_a, u_i, u_j\}$

2) 当 $u_b = u_f$ 或 $u_f = u_c$ 时，若前者成立考虑 P_3 和 P_4，否则，考虑 P_5 和 P_6，故都会产生矛盾。

情况 2. 对于 u_i 的每一个邻居 u_j，都有 $C_n^{u_j} \subset C_1$ 或 $C_n^{u_j} \subset C_2$。

由引理 2.3，可知 $|S| > \min_{xy \in E(G)} \{(\deg_G(x) + \deg_G(y)) \times 2 - 2\}$，产生矛盾。

3. 结论

本文主要通过寻找位于两个连通分支顶点间边不交路的方法，得到了同时满足(i) $|G| = n$，(ii) G 的任意两点间都存在长度为 2 的路，这两种条件下的非二部连通图 G 与偶圈直积的超边连通度，即 $\lambda'(G \times C_n) = \min\left\{2n\lambda'(G), \min_{xy \in E(G)} \{(\deg_G(x) + \deg_G(y)) \times 2 - 2\}\right\}$。新问题的解决往往伴随着很强的创新性。目前，一个图和圈直积的超边连通度这一问题并未完全解决，后续可以进一步研究。

基金项目

山西省青年科学研究项目(202103021223110)，太原理工大学青年科学基金项目(2022QN097)。

参考文献

[1] Esfahanian, A.H. and Hakimi S.L. (1988) On Computing a Conditional Edge-Connectivity of a Graph. *Information Processing Letters*, **27**, 195-199. https://doi.org/10.1016/0020-0190(88)90025-7

[2] Weichsel, P.M. (1962) The Kronecker Product of Graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **13**, 47-52. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1962-0133816-6

[3] Brešar, B. and Špacapan, S. (2008) On the Connectivity of the Direct Product of Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **41**, 45-56.

[4] Cao, X., Brglez, Š., Špacapan, S. and Vumar, S. (2011) On Edge Connectivity of Direct Products of Graphs. *Information Processing Letters*, **111**, 899-902. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2011.06.007

[5] Špacapan, S. (2013) A Characterization of the Edge Connectivity of Direct Products of Graphs. *Discrete Mathematics*, **313**, 1385-1393. https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.02.011

[6] Wang, W. and Yan, Z. (2012) Connectivity of Kronecker Products by k_2. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 172-174. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.08.009

[7] Yang, C. (2007) Connectivity and Fault-Diameter of Product Graphs. Ph.D. Thesis, University of Science and Technology of China, Hefei.

[8] Ma, T.L., Wang, J.L. and Zhang, M.Z. (2019) The Restricted Edge-Connectivity of Kronecker Product Graphs. *Parallel Processing Letters*, **29**, 1950012:1-1950012:7. https://doi.org/10.1142/S0129626419500129

[9] Sonawane, A.V. and Borse, Y.M. (2021) Connectivity of the Tensor Product of a Graph and a Cycle. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, **36**, 325-330.

[10] Guo, S.J. and Zhao, S. The Super Edge-Connectivity of Direct Product of a Graph and a Cycle. (Submitted)

[11] Dirac, G. (1960) Généralisations du théoréme de menger. *C.R. Acad. Sci*, **250**, 4252-4253.