Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 599-605
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132058

不可压MHD方程组中的全局正则性的一些探索

苏士懿

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

本文证明了不可压缩磁流体(MHD)方程组在下述空间全局正则性，当

$$\partial_3 u \in L^{p_0}\left(0,T;L^{q_0}\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p_0}+\frac{3}{q_0}=1+\frac{1}{q_0}, 2<q_0<\infty$$

$$\partial_3 b \in L^{q_1}\left(0,T;L^{q_1}\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p_1}+\frac{3}{q_1}=1+\frac{1}{q_1}, 2<q_1<\infty,$$

初值满足 $u_0,b_0 \in H^1\left(R^3\right)$ 的MHD方程在 $[0,T]$ 上有唯一解。

关键词

MHD方程，Serrin-Prodi情形，全局正则性

Global Regularity for the Incompressible MHD Equations

Shiyi Su

College of Mathematics Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

In this paper, we investigate the global regularity in space for the incompressible magneto hydrodynamic (MHD) system under the following conditions:

文章引用: 苏士懿. 不可压 MHD 方程组中的全局正则性的一些探索[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 599-605.
DOI: 10.12677/aam.2024.132058

$\partial_3 u \in L^{p_0}\left(0,T;L^{q_0}\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p_0}+\frac{3}{q_0}=1+\frac{1}{q_0}, 2<q_0<\infty$
$\partial_3 b \in L^{q_1}\left(0,T;L^{q_1}\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p_1}+\frac{3}{q_1}=1+\frac{1}{q_1}, 2<q_1<\infty$. **The MHD equation with initial data satisfying $u_0,b_0 \in H^1\left(R^3\right)$ has a unique solution on $[0,T]$.**

Keywords

MHD Equation, Serrin-Prodi Condition, Global Regularity

1. 引言

我们考虑如下在 $\mathbb{R}^d$ 中的常系数不可压缩磁流体(MHD)系统的全局正则性问题：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla\Pi = b\cdot\nabla b \\ \partial_t b + u\cdot\nabla b - \nu\Delta b = b\cdot\nabla u \\ div\, u = 0, div\, b = 0 \\ (u,b)\big|_{t=0} = (u_0,b_0) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 u 表示速度场，b 表示磁场，$\Pi(x,t)$ 表示压强。正常数 μ,ν 分别表示粘性系数和磁扩散系数。

如果磁场 $b=0$，系统(1.1)会简化为不可压缩 Navier-Stokes 方程。三维 Navier-Stokes 方程的全局弱解由 Leray [1]给出。然而，该弱解的唯一性和正则性仍然是数学流体动力学中最具挑战性的开放问题。对于不可压缩 Navier-Stokes 方程的 Leray-Hopf 弱解，如果它满足所谓的“Prodi-Serrin 正则性准则”，即如果弱解 u 属于以下类别 $u\in L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$，$\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1$，$3<q\le\infty$，那么该弱解将变得正则。特别是，Chae 和 Wolf [2]取得了重要的进展，并在 u_3 的条件下获得了解的正则性，其表达为

$$u_3 \in L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p}+\frac{3}{q}<1, 3<q\le+\infty,$$

然后 Wang、Wu 和 Zhang [3]在 Lorentz 空间中得到了尺度不变的 Serrin 准则

$$u_3 \in L^{p,1}\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1, 3<q\le+\infty.$$

至于基于 $\partial_3 u$ 的弱解正则性假设，Chen、Le 和 Qian [4]得到了 Prodi-Serrin 正则性准则

$$\partial_3 u \in L^{p,1}\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right), \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=2, \frac{3}{2}\le q\le\infty.$$

关于磁流体力学方程的解，已经有广泛的数学研究。Duvaut 和 Lions [5]提出了初始边界值问题的全局弱解和局部强解，而这些解的性质则由 Sermange 和 Temam 在[6]中进行了详细研究。然而，与 Navier-Stokes 方程类似，弱解在三个空间维度上的全局正则性仍然是一个未解之谜。因此，人们对确保

弱解光滑性的附加条件产生了浓厚兴趣。

受到[3]关于 Navier-Stokes 方程的工作的启发，已经通过对速度和磁场其中一个分量进行充分的假设来建立了全局正则性准则。基于速度和磁场的单一分量的正则性准则在[7]中得到，即，如果方程(1.1)的弱解(u,b)满足$\mu=\nu$，并且满足以下条件

$$u_3\in L^{t_0,1}\left(0,T;L^{s_0}\left(R^3\right)\right),\frac{2}{t_0}+\frac{3}{s_0}=1,3<s_0\le\infty$$

$$b_3\in L^{t_1,1}\left(0,T;L^{s_1}\left(R^3\right)\right),\frac{2}{t_1}+\frac{3}{s_1}=1,3<s_1\le\infty.$$

那么解在$(0,T]$上是正则的。

受到 Navier-Stokes 方程在一个方向导数上的正则性结论的启动，我们选择∂_3u,∂_3b来作为本文的确保弱解光滑性的附加条件。另一个方面，在研究过程中，发现∂_3u,∂_3b相较于u_3,b_3有着更加优越的条件以便于我们可以让粘性系数μ和磁扩散系数ν做到不相等。

对于$\mu\ne\nu$的情况，一个困难在于在没有限制$\mu=\nu$的情况下得到局部的正则性结果。与之前一样，我们定义变量$Z^+=u+b$，$Z^-=u-b$，满足

$$\partial_tZ^+-\Delta Z^++Z^-\cdot\nabla Z^++\nabla\pi=0,$$

$$\partial_tZ^--\Delta Z^-+Z^+\cdot\nabla Z^-+\nabla\pi=0$$

其中$\mu=\nu=1$。但是当失去齐次性条件时，这种方法会失败。

受到 K. Igor，R. Walter，Z. Mohammed 在(J. Math. Fluid Mech. (2017))工作的启发，我们对∂_3u和∂_3b加上了额外的条件，并得到定理 2.1 的证明。

2. 主要定理

定理 2.1 令$u_0,b_0\in H_1\left(R^3\right)$，且$divu=divb=0$，并且$(u,b)$是 MHD 方程的弱解。假设$u$和$b$满足以下条件：

$$\partial_3u\in L^{p_0}\left(0,T;L^{q_0}\left(R^3\right)\right),\frac{2}{p_0}+\frac{3}{q_0}=1+\frac{1}{q_0},2<q_0<\infty.$$

$$\partial_3b\in L^{p_1}\left(0,T;L^{q_1}\left(R^3\right)\right),\frac{2}{p_1}+\frac{3}{q_1}=1+\frac{1}{q_1},2<q_1<\infty.\qquad(2.1)$$

则(u,b)在$(0,T]$上是正则的。

3. 预备知识

在给出主要定理之前，我们首先给出一些空间基本定义。我们定义

$$\Omega=\left\{\phi:\phi\in C_0^\infty,div\phi=0\right\}$$

是一个三维向量函数空间，这将成为之后的测试函数所在的空间。令H是Ω在L^2拓扑下的闭包和V是H^1在H^1拓扑下的闭包。

下面给出 MHD 方程弱解的定义。

定义 3.1 (u,b)是 MHD 方程(1.1)在初值条件$u_0,b_0\in H^1$下的弱解，若满足

(1) $(u,b)\in C\left([0,T];H\right)\cap L^2\left(0,T;V\right)$以及$\left(\partial_tu,\partial_tb\right)\in L^1\left([0,T];V'\right)$，$V'$是$V$的对偶空间。

(2) 对于任意测试函数 $\phi\in C^{\infty}\left(\left[0,T\right);\Omega\right)$ 以及几乎所有的 $t_0,t\in\left[0,T\right)$，有

$$\begin{aligned}&\int_{R^3}u\left(x,t\right)\cdot\phi\left(x,t\right)\mathrm{d}x-\int_{R^3}u\left(x,t_0\right)\cdot\phi\left(x,t_0\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{t_0}^{t}\int_{R^3}u\left(x,s\right)\left(\phi_t\left(x,s\right)+\mu\Delta\phi\left(x,s\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\int_{R^3}\left(u\left(x,s\right)\cdot\nabla\right)\phi\left(x,s\right)\cdot u\left(x,s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\int_{R^3}\left(b\left(x,s\right)\cdot\nabla\right)\phi\left(x,s\right)\cdot b\left(x,s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_{R^3}b\left(x,t\right)\cdot\phi\left(x,t\right)\mathrm{d}x-\int_{R^3}b\left(x,t_0\right)\cdot\phi\left(x,t_0\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{t_0}^{t}\int_{R^3}b\left(x,s\right)\left(\phi_t\left(x,s\right)+\nu\Delta\phi\left(x,s\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\int_{R^3}\left(u\left(x,s\right)\cdot\nabla\right)\phi\left(x,s\right)\cdot b\left(x,s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\int_{R^3}\left(b\left(x,s\right)\cdot\nabla\right)\phi\left(x,s\right)\cdot u\left(x,s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned}$$

(3) 满足能量不等式

$$\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+2\int_0^t\left(\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(s)\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}s\le C\left(u_0,b_0\right)$$

引理 3.2 对于 $f,g,h\in C_c^{\infty}\left(R^3\right)$ 以及 i,j,k 从 $\{1,2,3\}$ 中任意选择，有

$$\left|\int_{R^3}fgh\mathrm{d}x\right|\le\|f\|_{L^2}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\|\partial_i f\|_{L^{\frac{2}{3-\alpha}}}^{\frac{1}{\alpha}}\|g\|_{L^2}^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\|\partial_j g\|_{L^2}^{\frac{1}{\alpha}}\|\partial_k g\|_{L^2}^{\frac{1}{\alpha}}\|h\|_{L^2},\ 2\le\alpha<3.$$

引理 3.3 Gronwall 不等式：设 I 是一个实数区间，记为：$\left[a,\infty\right)$ 或 $\left[a,b\right]$ 或 $\left[a,b\right)$，其中 $a<b$。又设 β 和 u 为定义在 I 上的实数值的连续函数。假设 u 是一个在 I 的内部(也就是不包括端点)可微的函数，并且满足如下的微分不等式：

$$u'\left(t\right)\le\beta\left(t\right)u\left(t\right),t\in I$$

那么对于所有的 $t\in I$，函数 u 都小于等于以下微分方程 $y'\left(t\right)\le\beta\left(t\right)y\left(t\right),t\in I$ 的解：

$$u\left(t\right)\le u\left(a\right)\mathrm{e}^{\int_a^t\beta(s)\mathrm{d}s}$$

引理 3.4 杨氏不等式：

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

4. 主要定理证明

对 MHD 方程(1.1)的第一个方程作用上测试函数 $-\Delta u$ 并作 L^2 内积，类似的，对第二个方程作用上测试函数 $-\Delta b$ 并作 L^2 内积，这样之后得到了

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\partial_t\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(t)\|_{L^2}^2\right)+\mu\|\Delta u\|_{L^2}^2+\nu\|\Delta b\|_{L^2}^2\\&=\int_{R^3}\left(u\cdot\nabla\right)u\cdot\Delta u-\left(b\cdot\nabla\right)b\cdot\Delta u+\left(u\cdot\nabla\right)b\cdot\Delta b-\left(b\cdot\nabla\right)u\cdot\Delta b\,\mathrm{d}x\\&=I+II+III+IV.\end{aligned}$$

接下来，我们将使用引理 3.2 估计等式的右侧。取 $f=u$， $g=\nabla u$， $h=\Delta u$， $i=3$， $j=1$， $k=2$，

$\alpha = 3 - \dfrac{2}{q_0}$， $q_0 \in (2,\infty)$，我们得到：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{R^3} (u\cdot\nabla) u \cdot \Delta u \,\mathrm{d}x \\
&\le \|u\|_{L^2}^{\frac{2q_0-2}{3q_0-2}} \|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_0-2}{3q_0-2}} \|\partial_1 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\partial_2 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le \|u\|_{L^2}^{\frac{2q_0-2}{3q_0-2}} \|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le C \|u\|_{L^2}^{\frac{2(2q_0-2)}{q_0-2}} \|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{2q_0}{q_0-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{6}\|\Delta u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

类似的，我们有

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{R^3} (b\cdot\nabla) b \cdot \Delta u \,\mathrm{d}x \\
&\le \|b\|_{L^2}^{\frac{2q_1-2}{3q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_1-2}{3q_1-2}} \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\partial_2 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le \|b\|_{L^2}^{\frac{2q_1-2}{3q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le C \|b\|_{L^2}^{\frac{2(2q_1-2)}{q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{2q_1}{q_1-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \epsilon \left(\|\Delta u\|_{L^2} \|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{2q_1}{3q_1-2}} \right)^{\frac{6q_1-4}{5q_1-2}} \\
&\le C \|b\|_{L^2}^{\frac{2(2q_1-2)}{q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{2q_1}{q_1-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{6}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{6}\|\Delta b\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
III &= \int_{R^3} (u\cdot\nabla) b \cdot \Delta b \,\mathrm{d}x \\
&\le \|u\|_{L^2}^{\frac{2q_0-2}{3q_0-2}} \|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_0-2}{3q_0-2}} \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\partial_2 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta b\|_{L^2} \\
&\le \|u\|_{L^2}^{\frac{2q_0-2}{3q_0-2}} \|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{q_0}{3q_0-2}} \|\Delta b\|_{L^2} \\
&\le C \|u\|_{L^2}^{\frac{2(2q_0-2)}{q_0-2}} \|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{2q_0}{q_0-2}} \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{6}\|\Delta u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV &= \int_{R^3} (b\cdot\nabla) u \cdot \Delta b \,\mathrm{d}x \\
&\le \|b\|_{L^2}^{\frac{2q_1-2}{3q_1}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_1-2}{3q_1-2}} \|\partial_1 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\partial_2 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le \|b\|_{L^2}^{\frac{2q_1-2}{3q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{q_1}{3q_1-2}} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\le C \|b\|_{L^2}^{\frac{2(2q_1-2)}{q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{2q_1}{q_1-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \epsilon \left(\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{2q_1}{3q_1-2}} \|\Delta b\|_{L^2} \right)^{\frac{6q_1-4}{5q_1-2}} \\
&\le C \|b\|_{L^2}^{\frac{2(2q_1-2)}{q_1-2}} \|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{2q_1}{q_1-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{6}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{6}\|\Delta b\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

将上述所有的估计累加起来，我们可以得到，

$$\partial_t\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|(t)_{L^2}^2\right)+\mu\|\Delta u\|_{L^2}^2+\nu\|\Delta b\|_{L^2}^2$$
$$\le\left(\|u\|_{L^2}^{\frac{2(2q_0-2)}{q_0-2}}+\|b\|_{L^2}^{\frac{2(2q_1-2)}{q_1-2}}\right)\left(\|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{2q_0}{q_0-2}}+\|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{2q_1}{q_1-2}}\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right).$$

由于能量不等式

$$\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+2\int_0^t\left(\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(s)\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}s\le C(u_0,b_0)$$

以及(2.1)，

通过 Gronwall 不等式，我们有

$$\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(t)\|_{L^2}^2\right)+\int_0^t\left(\mu\|\Delta u(s)\|_{L^2}^2+\nu\|\Delta b(s)\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\le\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)\exp\int_0^t\left(\|u\|_{L^2}^{\frac{2(2q_0-2)}{q_0-2}}+\|b\|_{L^2}^{\frac{2(2q_1-2)}{q_1-2}}\right)\left(\|\partial_3 u\|_{L^{q_0}}^{\frac{2q_0}{q_0-2}}+\|\partial_3 b\|_{L^{q_1}}^{\frac{2q_1}{q_1-2}}\right)(s)\mathrm{d}s$$
$$\le C$$

对于所有 $t\in(0,T^*)$ 成立，其中 T^* 是唯一强解存在的最大时间。

众所周知，如果初始条件 $u_0,b_0\in V$，则存在一个短时间内的唯一强解 (u,b) (具体见参考文献[8])。此外，这个强解 $(u,b)\in C([0,T^*);V)\cap L^2(0,T^*;H^2(R^3))$ 是具有初始数据 u_0 的唯一弱解，其中 $(0,T^*)$ 是唯一强解存在的最大时间区间。如果 $T^*\ge T$，则无需证明任何内容。另一方面，如果 $T^*\le T$，那么我们的策略是证明在区间 $(0,T^*)$ 内，假设定理中的附加条件成立，该强解的 H^1 范数在时间上是一致有界的。结果是，区间 $(0,T^*)$ 不能是存在的最大时间区间，因此 $T^*\ge T$，从而完成了我们的证明。因此，我们有 $(u,b)\in L^\infty(0,T;H^1)\cap L^2(0,T;H^2)$，并且在存在的最大时间区间 $(0,T^*)$ 上，(u,b) 是有界的。这定理的证明完成。

5. 总结

本文针对方程(1.1)，采用传统能量方法，由于 MHD 方程良好的对称性及其在物理学上的重要性，我们认为对 MHD 系统的解的性质的研究是非常重要的。基于对 Navier-Stokes 方程组的学习，我们对 MHD 中的线性系统以及非线性的处理，可以从 Navier-Stokes 方程组运用到的一些方法中借鉴或汲取灵感，提高研究的可行性。之后我们可以进一步研究临界齐次空间解的全局正则性。

参考文献

[1] Chemin, J.Y., Gallagher, I. and Zhang, P. (2019) Some Remarks about the Possible Blow-Up for the Navier-Stokes Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **44**, 1387-1405. https://doi.org/10.1080/03605302.2019.1641725

[2] Leray, J. (1934) Sur le mouvement d'um liquide visqieuxemlissant l'space. *Acta Mathematica*, **63**, 193-248. https://doi.org/10.1007/BF02547354

[3] Chae, D. and Wolf, J. (2021) On the Serrin-Type Condition on One Velocity Component for the Navier-Stokes Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **240**, 1323-1347. https://doi.org/10.1007/s00205-021-01636-5

[4] Wang, W., Wu, D. and Zhang, Z. (2023) Scaling Invariant Serrin Criterion via One Velocity Component for the Navier-Stokes Equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, **41**, 159-185. https://doi.org/10.4171/aihpc/77

[5] Chen, H., Le, W. and Qian, C. (2021) Prodi-Serrin Condition for 3D Navier-Stokes Equations via One Directional Derivative of Velocity. *Journal of Differential Equations*, **298**, 500-527. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.07.015

[6] Duvaut, G. and Lions, J.L. (1972) Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **46**, 241-279. https://doi.org/10.1007/BF00250512

[7] Chen, H., Qian, C. and Zhang, T. (2022) Serrin-Type Regularity Criteria for the 3D MHD Equations via One Velocity Component and One Magnetic Component. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, 89-111. https://doi.org/10.1007/s00526-022-02208-5

[8] Sermange, M. and Temam, R. (1983) Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 635-664. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360506