Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 744-749
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132073

Caputo-Katugampola时间分数阶扩散方程的数值求解方法

张洁晶

长沙理工大学，数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

本文研究带Caputo–Katugampola分数导数时间分数阶扩散方程的数值解法：使用中心差分格式离散空间扩散项，采用L_1差分格式离散时间分数阶导数。实验结果表明该方法在空间和时间上的收敛速度分别为2阶和$2-\alpha$阶。

关键词

Caputo-Katugampola时间分数阶导数，时间分数阶扩散方程，有限差分

Numerical Solution Method for Caputo-Katugampola Time-Fractional Diffusion Equation

Jiejing Zhang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jan. 28^{th}, 2024; accepted: Feb. 22^{nd}, 2024; published: Feb. 29^{th}, 2024

文章引用: 张洁晶. Caputo-Katugampola时间分数阶扩散方程的数值求解方法[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 744-749. DOI: 10.12677/aam.2024.132073

Abstract

We study a numerical solution of the time-fractional diffusion equation with Caputo-Katugampola fractional derivative. We discretize the spatial diffusion term using central-difference and the time-fractional derivative using L_1 difference scheme. The numerical test shows that the convergence rate of the method is 2th order in space and $(2-\alpha)th$ order in time, respectively.

Keywords

Caputo-Katugampola Time-Fractional Derivative, Time-Fractional Diffusion Equation, Finite Difference

1. 前言

本文研究下述Caputo–Katugampola时间分数阶扩散方程(TFDE)

$$D_t^{\rho,\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t),\quad 0\le t\le T,\quad 0\le x\le L, \tag{1.1}$$

初始条件和边界条件为

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le L, \tag{1.2}$$
$$u(0,t)=\phi(t),\quad u(L,t)=\nu(t),\quad 0\le t\le T, \tag{1.3}$$

其中$0<\alpha<1$, $0<\rho\le 1$, f, u_0, ϕ, ν是给定的光滑函数, $D_t^{\rho,\alpha}u(x,t)$是关于时间t 的Caputo–Katugampola分数阶导数 [1,2]:

$$D_t^{\rho,\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\left(\frac{t^\rho}{\rho}-\frac{s^\rho}{\rho}\right)^{-\alpha}\frac{\partial u(x,s)}{\partial s}ds. \tag{1.4}$$

这类TFDE可用于模拟石油污染和生物种群中的扩散现象 [3,4], 文献 [5]对此类方程进行了数值

求解, 但所得到数值解的误差为$O(\tau^{1-\alpha}+h^2)$；本文研究一种新的数值求解方法，误差可以达到$O(\tau^{2-\alpha}+h^2)$.

本文剩余部分组织如下: 在第2节, 为Caputo–Katugampola时间分数阶扩散方程设计数值解法; 在第3节, 通过数值示例验证数值解法的有效性; 在第4节, 给出结论.

2. 数值离散格式

定义时间和空间网格节点$t_n = n\tau$ $(n = 0,1,2,\cdots,N)$和$x_i = ih$ $(i = 0,1,2,\cdots,M)$, 其中$\tau = T/N$和$h = L/M$, M和N为给定的正整数. 记$u_i^n = u(x_i,t_n)$.

在(1.1)中取$x = x_i$, $t = t_n$, 得到

$$D_t^{\rho,\alpha}u\left(x_i,t_n\right) - \frac{\partial^2 u\left(x_i,t_n\right)}{\partial x^2} = f\left(x_i,t_n\right). \tag{2.1}$$

时间分数阶导数项可以表示为

$$\begin{aligned} D_t^{\rho,\alpha}u\left(x_i,t_n\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int_0^{t_n}\left(\frac{t^\rho}{\rho}-\frac{s^\rho}{\rho}\right)^{-\alpha}\frac{\partial u\left(x_i,s\right)}{\partial s}ds \\ &\approx \frac{\rho^\alpha}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(t_n^\rho - s^\rho\right)^{-\alpha}\frac{u\left(x_i,t_k\right)-u\left(x_i,t_{k-1}\right)}{\tau}ds \\ &= \frac{\rho^\alpha}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_k^{(n)}\frac{\left(u_i^k - u_i^{k-1}\right)}{\tau}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中

$$\tilde{b}_k^{(n)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(t_n^\rho - s^\rho\right)^{-\alpha}ds,\ k = 1,2,\cdots,n,\ n = 1,2,\cdots,N. \tag{2.3}$$

因为无法获得$\tilde{b}_k^{(n)}$的精确值, 本文将尝试设计有效的数值积分方法对其进行近似计算. 取$N^{(n)} = n\left(1+\left[\frac{N}{n}\right]\right)$, 定义时间网格节点$t_j^{(n)} = j\tau^{(n)}(j = 0,1,2,\cdots,N^{(n)})$, 其中$\tau^{(n)} = t_n/N^{(n)}$, 且令$t_{j-\frac{1}{2}}^{(n)} = \frac{t_{j-1}^{(n)}+t_j^{(n)}}{2}$. 则有

$$\tilde{b}_k^{(n)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(t_n^\rho - s^\rho\right)^{-\alpha}ds = \sum_{j=\frac{N^{(n)}(k-1)}{n}+1}^{\frac{N^{(n)}k}{n}}\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}}\left(t_n^\rho - s^\rho\right)^{-\alpha}ds. \tag{2.4}$$

记

$$\tilde{I}_j = \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}}\left(t_n^\rho - s^\rho\right)^{-\alpha}ds,\ j = 1,2,\cdots,N^{(n)}. \tag{2.5}$$

因为被积函数$(t_n^\rho - s^\rho)^{-\alpha}$ 在$s = 0$和$s = t_n$处具有奇异性, 本文采取两种方法来近似计算$\tilde{I}_j$. 当$k \le \frac{n}{2}$(n为偶数)时或$k \le \frac{n+1}{2}$(n为奇数)时, 使用梯形公式来近似积分

$$\tilde{I}_j \approx I_j = \frac{\tau^{(n)}}{2}\left[\left(t_n^\rho - \left(t_{j-1}^{(n)}\right)^\rho\right)^{-\alpha} + \left(t_n^\rho - \left(t_j^{(n)}\right)^\rho\right)^{-\alpha}\right]. \tag{2.6}$$

当$k > \frac{n}{2}$(n为偶数)时或$k > \frac{n+1}{2}$(n为奇数)时, 使用下面中点型积分公式来近似积分

$$\begin{aligned}\tilde{I}_j \approx I_j &= \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \left(t_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}\right)^{1-\rho} s^{\rho-1}\left(t_n^\rho - s^\rho\right)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\rho(1-\alpha)}\left(t_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}\right)^{1-\rho}\left[\left(t_n^\rho - \left(t_{j-1}^{(n)}\right)^\rho\right)^{1-\alpha} - \left(t_n^\rho - \left(t_j^{(n)}\right)^\rho\right)^{1-\alpha}\right].\end{aligned} \tag{2.7}$$

Remark 1. 特别地, 当$n = 1$时, 使用中点型积分公式(2.7)来近似计算积分$\tilde{I}_j$.

用$b_k^{(n)}$表示$\tilde{b}_k^{(n)}$的近似, 则时间分数阶导数项(2.2)近似为

$$\begin{aligned}D_t^{\rho,\alpha}u(x_i,t_n) &\approx \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)}\frac{\left(u_i^k - u_i^{k-1}\right)}{\tau} \\ &= \frac{\rho^\alpha}{\tau\Gamma(1-\alpha)}\left(b_n^{(n)}u_i^n - \sum_{k=2}^{n}\left(b_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}\right)u_i^{k-1} - b_1^{(n)}u_i^0\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

在(2.1)中, 空间方向上在点(x_i, t_n)用二阶中心差分来近似空间二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \tag{2.9}$$

将(2.8)和(2.9) 代入(2.1) , 得

$$\frac{\rho^\alpha}{\tau\Gamma(1-\alpha)}\left(b_n^{(n)}u_i^n - \sum_{k=2}^{n}\left(b_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}\right)u_i^{k-1} - b_1^{(n)}u_i^0\right) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n + O(\tau^{2-\alpha} + h^2). \tag{2.10}$$

令$\mu = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$, $\lambda = \frac{h^2\mu}{\tau}$, (2.10) 可以得到以下离散格式

$$-U_{i-1}^n + \left(2 + \lambda b_n^{(n)}\right)u_i^n - U_{i+1}^n = \lambda\sum_{k=2}^{n}\left(b_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}\right)U_i^{k-1} + \lambda b_1^{(n)}U_i^0 + h^2 f_m^n, \tag{2.11}$$

其中$i = 1, 2, \cdots, M-1$和$n = 1, 2, \cdots, N$.

3. 数值实验

在这部分, 本文提供了一个例子$(0 < \rho < 1)$来测试数值算法的收敛性.

Example 3.1.

$$D_t^{\rho,\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0,\quad 0\le t\le 1,\quad 0\le x\le 1, \tag{3.1}$$

初始条件和边界条件为:

$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{3.2}$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=t^2 sin1,\quad 0\le t\le 1. \tag{3.3}$$

由于该例子的精确解是未知的, 定义近似的最大误差为(参见 [6])

$$E_{space}^{p,q}=\max_{1\le i\le p-1,1\le n\le q}|U_i^n-\tilde{U}_{2i}^n|,\quad E_{time}^{p,q}=\max_{1\le i\le p-1,1\le n\le q}\left|U_i^n-\hat{U}_i^{2n}\right|,$$

其中U, $\tilde{U}$和$\hat{U}$分别为当$\{M=p,N=q\}$, $\{M=2p,N=q\}$和$\{M=p,N=2q\}$时的数值解. 收敛速率相应为

$$r_{space}^{M,N}=log_2\left(\frac{E_{space}^{M,N}}{E_{space}^{M/2,N}}\right),\quad r_{time}^{M,N}=log_2\left(\frac{E_{time}^{M,N}}{E_{time}^{M,N/2}}\right).$$

Table 1. Errors and convergence rates for space when $N=1000$ and $\rho=0.5$

表 1. 当$N=1000$ 和$\rho=0.5$时, 空间上的误差和收敛速度

		$M=10$	$M=20$	$M=40$	$M=80$	$M=160$
$\alpha=0.2$	$E_{space}^{M,N}$	3.6847×10^{-5}	9.2242×10^{-6}	2.3068×10^{-6}	5.7684×10^{-7}	1.4423×10^{-7}
	$r_{space}^{M,N}$		1.9981	1.9995	1.9997	1.9998
$\alpha=0.5$	$E_{space}^{M,N}$	5.2863×10^{-5}	1.3236×10^{-5}	3.3102×10^{-6}	8.2763×10^{-7}	2.0694×10^{-7}
	$r_{space}^{M,N}$		1.9978	1.9995	1.9999	1.9998
$\alpha=0.8$	$E_{space}^{M,N}$	7.0709×10^{-5}	1.7704×10^{-5}	4.4276×10^{-6}	1.1070×10^{-6}	2.7680×10^{-7}
	$r_{space}^{M,N}$		1.9978	1.9995	1.9999	1.9997

Table 2. Errors and convergence rates for time when $M=1000$ and $\rho=0.5$

表 2. 当$M=1000$ 和$\rho=0.5$时, 时间上的误差和收敛速度

		$N=10$	$N=20$	$N=40$	$N=80$	$N=160$
$\alpha=0.2$	$E_{time}^{M,N}$	9.8591×10^{-5}	3.0383×10^{-5}	9.2366×10^{-6}	2.7797×10^{-6}	8.2995×10^{-7}
	$r_{time}^{M,N}$		1.6982	1.7178	1.7324	1.7438
$\alpha=0.5$	$E_{time}^{M,N}$	4.7626×10^{-4}	1.7297×10^{-4}	6.2247×10^{-5}	2.2273×10^{-5}	7.9396×10^{-6}
	$r_{time}^{M,N}$		1.4612	1.4744	1.4827	1.4882
$\alpha=0.8$	$E_{time}^{M,N}$	1.4903×10^{-3}	6.5691×10^{-4}	2.8781×10^{-4}	1.2571×10^{-4}	5.4822×10^{-5}
	$r_{time}^{M,N}$		1.1818	1.1906	1.1950	1.1973

从表 1和表 2可以看出：空间上的收敛速度为2阶, 时间上的收敛速度为$2-\alpha$阶.

4. 结论

本文研究了Caputo-Katugampola时间分数扩散方程的数值求解方法, 实验结果表明数值解法在空间和时间上的收敛速度分别为2阶和$2-\alpha$阶.

参考文献

[1] Katugampola, U.N. (2011) New Approach to a Generalized Fractional Integral. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 860-865. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.062

[2] Zeng, S., Baleanu, D., Bai, Y., *et al.* (2017) Fractional Differential Equations of Caputo-Katugampola Type and Numerical Solutions. *Applied Mathematics and Computation*, **315**, 549-554. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.07.003

[3] Bhangale, N., Kachhia, K.B. and Gmez-Aguilar, J.F. (2022) A New Iterative Method with Laplace Transform for Solving Fractional Differential Equations with Caputo Generalized Fractional Derivative. *Engineering with Computers*, **38**, 2125-2138. https://doi.org/10.1007/s00366-020-01202-9

[4] Singh, J., Alshehri, A.M., Momani, S., *et al.* (2022) Computational Analysis of Fractional Diffusion Equations Occurring in Oil Pollution. *Mathematics*, **10**, Article 3827. https://doi.org/10.3390/math10203827

[5] Sene, N. (2019) Analytical Solutions and Numerical Schemes of Certain Generalized Fractional Diffusion Models. *The European Physical Journal Plus*, **134**, Article No. 199. https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12531-4

[6] Stynes, M., O'Riordan, E. and Gracia, J.L. (2017) Error Analysis of a Finite Difference Method on Graded Meshes for A Time-Fractional Diffusion Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **55**, 1057-1079. https://doi.org/10.1137/16M1082329