**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2024, 13(2), 774-787**
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132076

Hans汉斯

# 具有积分边界条件的非线性耦合分数微分方程组边值问题解的唯一性

**常引弟**

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

## 摘 要

分数阶微分方程模型具有深刻的物理背景和丰富的理论内涵，在诸多领域应用广泛，如血液流动问题、化学工程、热弹性、地下水流动、人口动力学等。目前关于带有积分边界条件的非线性耦合分数微分方程边值问题的求解相对较少，本文就是针对非线性耦合分数微分方程边值问题解的唯一性展开的研究，本文的非线性项中含有未知函数的导数项，使得研究的Banach空间更加复杂。首先，得到非线性系统对应的线性系统的Green函数，其次，分析Green函数的性质，构造积分算子，再次，利用Banach不动点定理得到边值问题解的唯一性结果，最后，给出一个示例。

## 关键词

非线性耦合分数微分方程，积分边值条件，唯一性

# Uniqueness of Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Coupled Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions

**Yindi Chang**

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

文章引用: 常引弟. 具有积分边界条件的非线性耦合分数微分方程组边值问题解的唯一性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 774-787. DOI: 10.12677/aam.2024.132076

## Abstract

**Fractional differential equation models have profound physical backgrounds and rich theoretical connotations, and are widely used in many fields, such as blood flow problems, chemical engineering, thermoelasticity, groundwater flow, population dynamics, etc. At present, there is relatively little research on solving nonlinear coupled fractional differential equation boundary value problems with integral boundary conditions. This paper focuses on the uniqueness of solutions to nonlinear coupled fractional differential equation boundary value problems. The nonlinear term in this paper contains derivative terms of unknown functions, making the Banach studied more complex: Firstly, obtain the Green function of the linear system corresponding to the nonlinear system; secondly, analyze the properties of the Green function and construct an integral operator; thirdly, use Banach's fixed point theorem to obtain the uniqueness result of the solution to the boundary value problem; finally, provide an example.**



## Keywords

**Nonlinear Coupled Fractional Differential Equations, Integral Boundary Value Conditions, Uniqueness**



Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access


## 1. 引言

自21世纪初以来，分数阶微积分建模方法和理论已成功应用于粒子物理，异常扩散，复杂粘弹性材料的力学本构关系，系统控制，流变学，地球物理，生物医学工程，经济学等诸多领域，凸显了其独特的优势和不可替代性，其理论与应用研究已成为国际上研究的热点[1] [2] [3]关于分数阶微分方程边值问题解的存在性，唯一性和性质的理论研究一直是一个热门话题。对于一些研究历史和研究结果，我们可以参考文献[4] [5] [6] [7]。

因为具有积分边界的边值问题具有广泛的应用背景，另一方面，耦合系统的研究涉及分数微分方程也很重要，因为，这种系统出现在应用自然的各种问题中，生物学，化学和物理学可以方程组的形式进行建模[8] [9]。所以本文想要研究一类具有积分边界条件的非线性耦合分数阶微分方程边值问题的解。近年来，分数阶微分方程耦合系统的研究还是较少的，首先给出几个研究的具体例子：

2017年，利用基于具有递增或递减性质的凹型算子的一类不动点定理，Shah [10]等人得到了下面系统

$$\begin{cases} D^q u(t) - f\left(t, u(t), v(t)\right) = 0,\ q \in (2,3],\ t \in J, \\ D^p v(t) - g\left(t, u(t), v(t)\right) = 0,\ p \in (2,3],\ t \in J, \\ I^{3-q} u(t)\big|_{t=0} = D^{q-2} u(t)\big|_{t=0} = 0,\ u(t)\big|_{t=1} = 0, \\ I^{3-p} v(t)\big|_{t=0} = D^{p-2} v(t)\big|_{t=0} = 0,\ v(t)\big|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

解存在的适当条件，其中 $J = [0,1]$， $f, g : J \times R \times R \to R$ 是连续函数，所用到的导数和积分类型为

Riemann-Liouville型导数和积分。

2018年，Chalishajar [11]等人研究了下式

$$\begin{cases} {}^cD^q u(t) = f(t,v(t)),\ q\in(1,2],\ t\in[0,1], \\ {}^cD^p v(t) = g(t,u(t)),\ p\in(1,2],\ t\in[0,1], \\ \alpha u(0)+\beta u'(0)=\int_0^1 a_1(u(s))\mathrm{d}s,\ \alpha u(1)+\beta u'(1)=\int_0^1 a_2(u(s))\mathrm{d}s, \\ \tilde{\alpha} v(0)+\tilde{\beta} v'(0)=\int_0^1 \tilde{a}_1(v(s))\mathrm{d}s,\ \tilde{\alpha} v(1)+\tilde{\beta} v'(1)=\int_0^1 \tilde{a}_2(v(s))\mathrm{d}s, \end{cases}$$

这一类具有积分边界条件的，考虑Caputo导数的耦合系统解的存在性，唯一性以及Ulam型稳定性，其中 $f,g:[0,1]\times R\to R$ 是连续函数，$a_1,a_2,\tilde{a}_1,\tilde{a}_2:R\to R$ 是连续函数，并且 $\alpha,\tilde{\alpha}>0$，$\beta,\tilde{\beta}\ge 0$ 的实数。

受到上述工作的启发，本文想要研究下面具有积分边界条件，非线性项含有导数项的耦合系统

$$\begin{cases} {}^cD^q u(t)+f(t,v(t),{}^cD^\delta v(t),{}^cD^{q-1}u(t))=0,\ t\in[0,1], \\ {}^cD^p v(t)+g(t,u(t),{}^cD^\delta u(t),{}^cD^{p-1}v(t))=0,\ t\in[0,1], \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=\int_0^1 h_1(u(s))\mathrm{d}s,\ \alpha u(1)+\beta u'(1)=\int_0^1 h_2(u(s))\mathrm{d}s,\ u''(0)=0, \\ \alpha v(0)-\beta v'(0)=\int_0^1 \tilde{h}_1(v(s))\mathrm{d}s,\ \alpha v(1)+\beta v'(1)=\int_0^1 \tilde{h}_2(v(s))\mathrm{d}s,\ v''(0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的唯一性。在本文的剩余部分，总是假设其中 $2<q,p<3$，$0<\delta\le 1$，$\alpha,\beta\in R$ 并且有 $\alpha>0$，$\beta\ge 0$。$f,g:[0,1]\times R^3\to R$ 是连续函数，$h_1,h_2,\tilde{h}_1,\tilde{h}_2:R\to R$ 是连续函数，${}^cD^q$，${}^CD^p$，${}^CD^\delta$，${}^CD^{q-1}$，${}^CD^{p-1}$ 都是Caputo型分数阶导数。

## 2. 预备知识

本节给出了 Riemann-Liouville 分数积分，分数导数以及 Caputo 分数导数的一些基本定义和引理，并给出了本文主要运用到的两个不动点定理。

在本节中，总是假设 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，$\eta>0$ 并且 $[\eta]$ 表示 $\eta$ 的整数部分。

### 2.1. 定义 1 [1]

$[0,1]$ 上 $\eta$ 阶的Riemann-Liouville分数积分 $I_{0+}^\eta u$ 的定义如下

$$(I_{0+}^\eta u)(t):=\frac{1}{\Gamma(\eta)}\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\eta}}\mathrm{d}s.$$

### 2.2. 定义 2 [1]

$[0,1]$ 上 $\eta$ 阶的 Riemann-Liouville 分数导数 $D_{0+}^\eta u$ 的定义如下

$$(D_{0+}^\eta u)(t):=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n (I_{0+}^{n-\eta}u)(t)\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\eta-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\eta]+1$。

### 2.3. 定义 3 [1]

$[0,1]$ 上 $\eta$ 阶的 Caputo 分数导数 $D_{0+}^\eta u$ 的定义如下

$$\left({}^{C}D_{0+}^{\eta}u\right)(t):=\left(D_{0+}^{\eta}\left[u(s)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(0)}{k!}s^{k}\right]\right)(t),$$

其中

$$n=\begin{cases}[\eta]+1, & \eta\notin\mathbb{N},\\ \eta, & \eta\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{2}$$

### 2.4. 引理 1 [1]

设 $s>\eta$，当 $t\in[0,1]$ 时，若 $u\in C[0,1]$，则有 $\left({}^{C}D_{0+}^{\eta}I_{0+}^{s}u\right)(t)=\left(I_{0+}^{s-\eta}u\right)(t)$ 成立。

### 2.5. 引理 2 [2]

设 $n$ 由(2)给出，那么有以下关系式成立：

(1) 当 $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 时，${}^{C}D_{0+}^{\eta}t^{k}=0$；

(2) 如果 $v>n$，那么 ${}^{C}D_{0+}^{\eta}t^{v-1}=\dfrac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-\eta)}t^{v-\eta-1}$。

### 2.6. 引理 3 [3]

设 $n$ 由(2)给出，如果 $u\in AC^{n}[0,1]$ 或者 $u\in C^{n}[0,1]$，则有

$$\left(I_{0+}^{\eta}\,{}^{C}D_{0+}^{\eta}u\right)(t)=u(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(0)}{k!}t^{k}.$$

### 2.7. 引理 3 [3]

(Banach 不动点定理)设 $F$ 是从完备度量空间 $F(X,d)$ 到其自身的压缩映射，那么 $F$ 有一个唯一的不动点 $x\in X$。

### 2.8. 引理 4

设 $y,\gamma_1,\gamma_2\in C[0,1]$，则下面的线性微分方程边值问题

$$\begin{cases}{}^{c}D^{q}u(t)+y(t)=0, & t\in[0,1],\\ u''(0)=0,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=\int_0^1\gamma_1(s)\mathrm{d}s,\\ \alpha u(1)+\beta u'(1)=\int_0^1\gamma_2(s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G_q(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_1(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_2(s)\mathrm{d}s,$$

其中，

$$G_q(t,s)=\begin{cases}\dfrac{-(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\dfrac{(\beta+\alpha t)(1-s)^{q-1}}{(2\beta+\alpha)\Gamma(q)}+\dfrac{(\beta+\beta t)(1-s)^{q-2}}{(2\alpha\beta+\alpha^2)\Gamma(q-1)}, & 0\le s\le t\le 1,\\ \dfrac{(\beta+\alpha t)(1-s)^{q-1}}{(2\beta+\alpha)\Gamma(q)}+\dfrac{(\beta+\beta t)(1-s)^{q-2}}{(2\alpha\beta+\alpha^2)\Gamma(q-1)}, & 0\le t\le s\le 1,\end{cases}$$

**证明** 对边值问题方程项的左右两边同时进行积分，得到

$$u(t)=-\left(I^{q}y\right)(t)-c_0-c_1t-c_2t^2,$$

对其进行求导，得到

$$u'(t)=-\left(I^{q-1}y\right)(t)-c_1-2c_2t,$$

接着求二阶导，可以有

$$u''(t)=-\left(I^{q-2}y\right)(t)-2c_2,$$

由 $u''(0)=0$，可得 $c_2=0$，则

$$u(t)=-\left(I^{q}y\right)(t)-c_0-c_1t.$$

根据边值问题的边界条件，代入相应的值之后，可以得到

$$\begin{aligned}c_0=&-\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_1(s)\mathrm{d}s-\frac{\beta}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_2(s)\mathrm{d}s\\&-\frac{\beta}{2\beta+\alpha}\left(I^{q}y\right)(1)-\frac{\beta^2}{2\alpha\beta+\alpha^2}\left(I^{q-1}y\right)(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1=&\frac{1}{2\beta+\alpha}\int_0^1\gamma_1(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2\beta+\alpha}\int_0^1\gamma_2(s)\mathrm{d}s\\&-\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\left(I^{q}y\right)(1)-\frac{\beta}{2\beta+\alpha}\left(I^{q-1}y\right)(1).\end{aligned}$$

因此，代入相应的值之后，可以得到

$$\begin{aligned}u(t)&=-\left(I^{q}y\right)(t)-c_0-c_1t\\&=-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}y(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta+\alpha t}{(2\beta+\alpha)\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}y(s)\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{\beta+\beta t}{\left(2\alpha\beta+\alpha^2\right)\Gamma(q-1)}\int_0^1(1-s)^{q-2}y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_1(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_2(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1G_q(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_1(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\gamma_2(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

证明结束。

## 3. 主要结果

本节主要求解问题(1)唯一解的存在性。下面先给出一些假设：

(A1) 存在三个非负函数 $a_i\in C[0,1]$，$i=1,2,3$，有下面不等式

$$\left|f(t,x,y,z)\right|\le a_1(t)+a_2(t)\left(|x|+|y|\right)+a_3|z|,$$

对于任意的 $t\in[0,1]$，$x,y,z\in R$ 都成立。

类似地，存在三个非负函数 $\tilde{a}_i\in C[0,1]$，$i=1,2,3$，有下面不等式

$$\left|g(t,x,y,z)\right|\le \tilde{a}_1(t)+\tilde{a}_2(t)\left(|x|+|y|\right)+\tilde{a}_3|z|,$$

对于任意的 $t\in[0,1]$， $x,y,z\in R$ 都成立。

(A2) 存在大于 0 的数 $L_{h_1}$， $L_{h_2}$，使得

$$\left|h_1(x(t))\right|\le L_{h_1}\left|x(t)\right|,\quad \left|h_2(x(t))\right|\le L_{h_2}\left|x(t)\right|,$$

对于任意的 $t\in[0,1]$， $x(t)\in C[0,1]$ 都成立。

类似地，存在大于 0 的数 $\tilde{L}_{\tilde{h}_1}$， $\tilde{L}_{\tilde{h}_2}$，使得

$$\left|\tilde{h}_1(x(t))\right|\le \tilde{L}_{\tilde{h}_1}\left|x(t)\right|,\quad \left|h_2(x(t))\right|\le \tilde{L}_{\tilde{h}_2}\left|x(t)\right|,$$

对于任意的 $t\in[0,1]$， $x(t)\in C[0,1]$ 都成立。

(A3)设

$$\eta_{q1}=\int_0^1\left|G_q(t,s)\right|a_1(s)\,\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\theta_{q1}=2\int_0^1\left|G_q(t,s)\right|a_2(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^1\left|G_q(t,s)\right|a_3(s)\,\mathrm{d}s+\left|\frac{(\alpha+\beta)\left(L_{h_1}+L_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|<\frac{1}{2};$$

$$\eta_{q2}=\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)\right|a_1(s)\,\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\theta_{q2}=2\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)\right|a_2(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)\right|a_3(s)\,\mathrm{d}s+\left|\frac{\alpha\left(L_{h_1}+L_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|<\frac{\Gamma(2-\delta)}{2};$$

$$\eta_{q3}=\frac{1}{\Gamma(q-2)}\int_0^t(t-s)^{q-3}a_1(s)\,\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\theta_{q3}=\frac{2}{\Gamma(q-2)}\int_0^t(t-s)^{q-3}a_2(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q-2)}\int_0^t(t-s)^{q-3}a_3(s)\,\mathrm{d}s<\frac{\Gamma(3-q)}{2}.$$

类似地，设

$$\eta_{p1}=\int_0^1\left|G_p(t,s)\right|\tilde{a}_1(s)\,\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\theta_{p1}=2\int_0^1\left|G_p(t,s)\right|\tilde{a}_2(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^1\left|G_p(t,s)\right|\tilde{a}_3(s)\,\mathrm{d}s+\left|\frac{(\alpha+\beta)\left(\tilde{L}_{\tilde{h}_1}+\tilde{L}_{\tilde{h}_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|<\frac{1}{2};$$

$$\eta_{p2}=\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_p(t,s)\right|\tilde{a}_1(s)\,\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\theta_{p2}=2\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_p(t,s)\right|\tilde{a}_2(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_p(t,s)\right|\tilde{a}_3(s)\,\mathrm{d}s+\left|\frac{\alpha\left(\tilde{L}_{\tilde{h}_1}+\tilde{L}_{\tilde{h}_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|<\frac{\Gamma(2-\delta)}{2};$$

$$\eta_{p3}=\frac{1}{\Gamma(p-2)}\int_0^t(t-s)^{p-3}\tilde{a}_1(s)\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\theta_{p3}=\frac{2}{\Gamma(p-2)}\int_0^t(t-s)^{p-3}\tilde{a}_2(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(p-2)}\int_0^t(t-s)^{p-3}\tilde{a}_3(s)\mathrm{d}s<\frac{\Gamma(3-p)}{2}.$$

(A4)存在一个连续函数 $s:[0,1]\to[0,+\infty)$，一个关于每一个变量都非减的函数 $\psi:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 并且对于任意的 $w\in[0,+\infty)$，都有 $\psi(w,w,w)\le w$，则下面不等式

$$|f(t,x,y,z)-f(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})|\le s(t)\psi(|x-\bar{x}|,|y-\bar{y}|,|z-\bar{z}|),$$

对于任意的 $t\in[0,1]$，$x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in R$ 都成立。

类似地，存在一个连续函数 $\tilde{s}:[0,1]\to[0,+\infty)$，一个关于每一个变量都非减的函数 $\tilde{\psi}:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 并且对于任意的 $w\in[0,+\infty)$，都有 $\tilde{\psi}(w,w,w)\le w$，则下面不等式

$$|g(t,x,y,z)-g(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})|\le\tilde{s}(t)\tilde{\psi}(|x-\bar{x}|,|y-\bar{y}|,|z-\bar{z}|),$$

对于任意的 $t\in[0,1]$，$x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in R$ 都成立。

(A5) 存在大于 0 的数 $K_{h_1}$，$K_{h_2}$ 使得

$$|h_1(x)-h_1(\bar{x})|\le K_{h_1}|x-\bar{x}|,\quad |h_2(x)-h_2(\bar{x})|\le K_{h_2}|x-\bar{x}|,$$

对于任意的 $t\in[0,1]$，$x,\bar{x}\in R$ 都成立。

类似地，存在大于 0 的数 $\tilde{K}_{\tilde{h}_1}$，$\tilde{K}_{\tilde{h}_2}$ 使得

$$|\tilde{h}_1(x)-\tilde{h}_1(\bar{x})|\le \tilde{K}_{\tilde{h}_1}|x-\bar{x}|,\quad |\tilde{h}_2(x)-\tilde{h}_2(\bar{x})|\le \tilde{K}_{\tilde{h}_2}|x-\bar{x}|,$$

对于任意的 $t\in[0,1]$，$x,\bar{x}\in R$ 都成立。

(A6)通过 $G_q(t,s)$ 的表达式可以知道 $G_q(t,s)$ 关于 $t$ 和 $s$ 是连续的，经过计算，同样地可以得到 $\frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_q(t,s)$ 关于 $t$ 和 $s$ 是连续的，则可设

$$b_q=\max_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1|G_q(t,s)|\mathrm{d}s,\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)\right|\mathrm{d}s,\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_q(t,s)\right|\mathrm{d}s\right\},$$

类似地，可设

$$b_p=\max_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1|G_p(t,s)|\mathrm{d}s,\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_p(t,s)\right|\mathrm{d}s,\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_p(t,s)\right|\mathrm{d}s\right\},$$

设

$$\rho_1=\max\left\{b_p\cdot\|\tilde{s}\|_\infty+\frac{(\alpha+\beta)(K_{h_1}+K_{h_2})}{2\alpha\beta+\alpha^2},b_q\cdot\|s\|_\infty+\frac{(\alpha+\beta)(\tilde{K}_{\tilde{h}_1}+\tilde{K}_{\tilde{h}_2})}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right\},$$

$$\rho_2=\max\left\{\frac{b_p\cdot\|\tilde{s}\|_\infty+\frac{2\alpha(K_{h_1}+K_{h_2})}{2\alpha\beta+\alpha^2}}{\Gamma(2-\delta)},\frac{b_q\cdot\|s\|_\infty+\frac{2\alpha(\tilde{K}_{\tilde{h}_1}+\tilde{K}_{\tilde{h}_2})}{2\alpha\beta+\alpha^2}}{\Gamma(2-\delta)}\right\},$$

和

$$\rho_3 = \max\left\{\frac{b_p \cdot \|\tilde{s}\|_\infty}{\Gamma(4-p)}, \frac{b_q \cdot \|s\|_\infty}{\Gamma(4-q)}\right\}.$$

为了方便，定义空间 $B=\left\{u \middle| u\in C^1[0,1], {}^C D^{q-1}u\in C[0,1]\right\}$ 和 $\tilde{B}=\left\{v \middle| v\in C^1[0,1], {}^C D^{p-1}v\in C[0,1]\right\}$，两个空间的范数表达式分别为：

$$\|u\|_B = \max\left\{\|u\|_\infty, \left\|{}^C D^\delta u\right\|_\infty, \left\|{}^C D^{q-1}u\right\|_\infty\right\} \text{和} \|v\|_{\tilde{B}} = \max\left\{\|v\|_\infty, \left\|{}^C D^\delta v\right\|_\infty, \left\|{}^C D^{p-1}v\right\|_\infty\right\},$$

则空间 $B$，$\tilde{B}$ 都是 Banach [12]空间。因此乘积空间上的范数定义为 $\|(u,v)\|_{B\times\tilde{B}} = \|u\|_B + \|v\|_{\tilde{B}}$。则空间 $\left(B\times\tilde{B}, \|(\cdot,\cdot)\|_{B\times\tilde{B}}\right)$ 是一个 Banach 空间。

定义算子 $T: B\times\tilde{B} \to B\times\tilde{B}$ 为

$$T(u,v)(t) = \begin{pmatrix} \int_0^1 G_q(t,s) f\left(s, v(s), {}^C D^\delta v(s), {}^C D^{q-1}u(s)\right)\mathrm{d}s + \frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 h_1(u(s))\mathrm{d}s + \frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 h_2(u(s))\mathrm{d}s \\ \int_0^1 G_p(t,s) f\left(s, u(s), {}^C D^\delta u(s), {}^C D^{p-1}v(s)\right)\mathrm{d}s + \frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 \tilde{h}_1(v(s))\mathrm{d}s + \frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 \tilde{h}_2(v(s))\mathrm{d}s \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} T_q(v,u)(t) \\ T_p(u,v)(t) \end{pmatrix}.$$

## 定理 5

如果假设(A1)~(A6)成立，并且当 $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} < 1$ 时，问题有唯一解。

**证明** 关于该定理的证明，本文主要运用的是Banach不动点定理。首先，给出两个非负数

$$\lambda_1 = \max\left\{\frac{2\eta_{q1}}{1-2\theta_{q1}}, \frac{2\eta_{q2}}{\Gamma(2-\delta)-2\theta_{q2}}, \frac{2\eta_{q3}}{\Gamma(3-q)-2\theta_{q3}}\right\},$$

$$\lambda_2 = \max\left\{\frac{2\eta_{p1}}{1-2\theta_{p1}}, \frac{2\eta_{p2}}{\Gamma(2-\delta)-2\theta_{p2}}, \frac{2\eta_{p3}}{\Gamma(3-q)-2\theta_{p3}}\right\},$$

设

$$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\},$$

定义一个集合 $\omega = \left\{(u,v)\in B\times\tilde{B} : \|u\|_B \le \frac{\lambda}{2}, \|v\|_{\tilde{B}} \le \frac{\lambda}{2}, \|(u,v)\|_{B\times\tilde{B}} \le \lambda\right\}$，为了证明由(3)式定义的算子 $T$ 是从 $\omega$ 映射到自身的，可以先得到

$$\begin{aligned} &\left|T_q(v,u)(t)\right| \\ &= \left|\int_0^1 G_q(t,s) f\left(s, v(s), {}^C D^\delta v(s), {}^C D^{q-1}u(s)\right)\mathrm{d}s + \frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 h_1(u(s))\mathrm{d}s + \frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 h_2(u(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\le \int_0^1 \left|G_q(t,s)\right| a_1(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 \left|G_q(t,s)\right| a_2(s)\left(\left|v(s) + {}^C D^\delta v(s)\right|\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^1 \left|G_q(t,s)\right| a_3(s)\left|{}^C D^{q-1}u(s)\right|\mathrm{d}s + \left|\frac{\alpha+\beta}{2\beta+\alpha^2}\right|\left[\int_0^1 \left|h_1(u(s))\right|\mathrm{d}s + \int_0^1 \left|h_2(u(s))\right|\mathrm{d}s\right] \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \left|G_q(t,s)\right| a_1(s)\mathrm{d}s + \lambda\left[2\int_0^1 \left|G_q(t,s)\right| a_2(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 \left|G_q(t,s)\right| a_3(s)\mathrm{d}s + \left|\frac{\alpha+\beta\left(L_{h_1}+L_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|\right]$$

$$\leq \eta_{q_1} + \lambda\theta_{q_1} \leq \frac{\lambda}{2},$$

接着，逐次求导可得

$$\begin{aligned}
&\left|T_q'(v,u)(t)\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s) f\left(s, v(s), {}^C D^{\delta} v(s), {}^C D^{q-1} u(s)\right)\mathrm{d}s + \frac{-\alpha}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 h_1(u(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1 h_2(u(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s)\right| a_1(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s)\right| a_2(s)\left(\left|v(s) + {}^C D^{\delta} v(s)\right|\right)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s)\right| a_3(s)\left|{}^C D^{q-1} u(s)\right|\mathrm{d}s + \left|\frac{\alpha}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|\left[\int_0^1 \left|h_1(u(s))\right|\mathrm{d}s + \int_0^1 \left|h_2(u(s))\right|\mathrm{d}s\right] \\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s)\right| a_1(s)\mathrm{d}s + \lambda\left[2\int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s)\right| a_2(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t} G_q(t,s)\right| a_3(s)\mathrm{d}s + \left|\frac{\alpha\left(L_{h_1}+L_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\right|\right] \\
&\leq \eta_{q_2} + \lambda\theta_{q_2}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left|T_q''(v,u)(t)\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_q(t,s) f\left(s, v(s), {}^C D^{\delta} v(s), {}^C D^{q-1} u(s)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^t \frac{-1}{\Gamma(q-2)}(t-s)^{q-3} f\left(s, v(s), {}^C D^{\delta} v(s), {}^C D^{q-1} u(s)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)}\int_0^t (t-s)^{q-3}\left[a_1(s) + a_2(s)\left(\left|v(s)\right| + \left|{}^C D^{\delta} v(s)\right|\right) + a_3(s)\left|{}^C D^{q-1} u(s)\right|\right]\mathrm{d}s \\
&\leq \eta_{q_3} + \lambda\theta_{q_3}.
\end{aligned}$$

根据定义，可以有

$$\begin{aligned}
&\left|{}^C D^{\delta}\left(T_q(v,u)\right)(t)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t (t-s)^{-\delta} T_q'(v,u)(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t (t-s)^{-\delta}\left|T_q'(v,u)(s)\right|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t (t-s)^{-\delta}\left(\eta_{q_2} + \lambda\theta_{q_2}\right)\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\left(\eta_{q_2} + \lambda\theta_{q_2}\right) \leq \frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{C}D^{q-1}\left(T_q\left(v,u\right)\right)\left(t\right)\right| \\
&=\left|\frac{1}{\Gamma\left(3-q\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{2-q}T_q''\left(v,u\right)\left(s\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\frac{1}{\Gamma\left(3-q\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{2-q}\left|T_q''\left(v,u\right)\left(s\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\le\frac{1}{\Gamma\left(3-q\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{2-q}\left(\eta_{q_3}+\lambda\theta_{q_3}\right)\mathrm{d}s \\
&\le\frac{1}{\Gamma\left(4-q\right)}\left(\eta_{q_3}+\lambda\theta_{q_3}\right)\le\frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}
$$

则由范数的定义，可以得到

$$
\left\|T_q\left(v,u\right)\right\|_B=\max\left\{\left\|T_q\left(v,u\right)\right\|_\infty,\left\|{}^{C}D^{\delta}\left(T_q\left(v,u\right)\right)\right\|_\infty,\left\|{}^{C}D^{q-1}\left(T_q\left(v,u\right)\right)\right\|_\infty\right\}\le\frac{\lambda}{2}
$$

类似地，可以有

$$
\left\|T_p\left(u,v\right)\right\|_{\tilde{B}}=\max\left\{\left\|T_p\left(u,v\right)\right\|_\infty,\left\|{}^{C}D^{\delta}\left(T_p\left(u,v\right)\right)\right\|_\infty,\left\|{}^{C}D^{p-1}\left(T_p\left(u,v\right)\right)\right\|_\infty\right\}\le\frac{\lambda}{2}
$$

根据乘积空间上范数的定义，可得到$\left\|T\left(u,v\right)\right\|_{B\times\tilde{B}}=\left\|T_q\left(v,u\right)\right\|_B+\left\|T_p\left(u,v\right)\right\|_{\tilde{B}}\le\lambda$这就说明是自身$T$到自身的映射。

接下来，需要证明映射$T$是一个压缩映射。根据$T$的定义，相应范数的定义，假设(A4)~(A6)，可以有

$$
\begin{aligned}
&\left|T_q\left(v,u\right)\left(t\right)-T_q\left(\overline{v},\overline{u}\right)\left(t\right)\right| \\
&=\left|\int_0^1G_q\left(t,s\right)\left(f\left(s,v\left(s\right),{}^{C}D^{\delta}v\left(s\right),{}^{C}D^{q-1}u\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),{}^{C}D^{\delta}\overline{v}\left(s\right),{}^{C}D^{q-1}\overline{u}\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad\left.+\frac{\alpha+\beta-\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\left(h_1\left(u\left(s\right)\right)-h_1\left(\overline{u}\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s+\frac{\beta+\alpha t}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\left(h_2\left(u\left(s\right)\right)-h_2\left(\overline{u}\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\int_0^1\left|G_q\left(t,s\right)\right|s\left(t\right)\psi\left(\left|v\left(s\right)-\overline{v}\left(s\right)\right|,\left|{}^{C}D^{\delta}v\left(s\right)-{}^{C}D^{\delta}\overline{v}\left(s\right)\right|,\left|{}^{C}D^{q-1}v\left(s\right)-{}^{C}D^{q-1}\overline{v}\left(s\right)\right|\right)\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\left|u\left(s\right)-\overline{u}\left(s\right)\right| \\
&\le\left\|s\right\|_\infty\cdot\max\left\{\left\|v-\overline{v}\right\|_{\tilde{B}},\left\|u-\overline{u}\right\|_B\right\}\int_0^1\left|G_q\left(t,s\right)\right|\mathrm{d}s+\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\left\|u-\overline{u}\right\|_B \\
&\le\left\|s\right\|_\infty\cdot\left(\left\|v-\overline{v}\right\|_{\tilde{B}}+\left\|u-\overline{u}\right\|_B\right)\int_0^1\left|G_q\left(t,s\right)\right|\mathrm{d}s+\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\left\|u-\overline{u}\right\|_B \\
&\le b_q\cdot\left\|s\right\|_\infty\cdot\left(\left\|v-\overline{v}\right\|_{\tilde{B}}+\left\|u-\overline{u}\right\|_B\right)+\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\left\|u-\overline{u}\right\|_B,
\end{aligned}
$$

相应地，逐次求导之后可得

$$
\begin{aligned}
&\left|T_q'(v,u)(t)-T_q'(\bar{v},\bar{u})(t)\right| \\
&=\left|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)\Big(f\big(s,v(s),{}^{C}D^{\delta}v(s),{}^{C}D^{q-1}u(s)\big)-f\big(s,\bar{v}(s),{}^{C}D^{\delta}\bar{v}(s),{}^{C}D^{q-1}\bar{u}(s)\big)\Big)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad\left.+\frac{-\alpha}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\Big(h_1\big(u(s)\big)-h_1\big(\bar{u}(s)\big)\Big)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{2\alpha\beta+\alpha^2}\int_0^1\Big(h_2\big(u(s)\big)-h_2\big(\bar{u}(s)\big)\Big)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G_q(t,s)\right|s(t)\psi\Big(\left|v(s)-\bar{v}(s)\right|,\left|{}^{C}D^{\delta}v(s)-{}^{C}D^{\delta}\bar{v}(s)\right|,\left|{}^{C}D^{q-1}v(s)-{}^{C}D^{q-1}\bar{v}(s)\right|\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{2\alpha\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\left|u(s)-\bar{u}(s)\right| \\
&\le b_q\cdot\|s\|_\infty\cdot\left(\|v-\bar{v}\|_{\tilde{B}}+\|u-\bar{u}\|_B\right)+\frac{2\alpha\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\|u-\bar{u}\|_B
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\left|T_q''(v,u)(t)-T_q''(\bar{v},\bar{u})(t)\right| \\
&=\left|\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}G_q(t,s)\Big(f\big(s,v(s),{}^{C}D^{\delta}v(s),{}^{C}D^{q-1}u(s)\big)-f\big(s,\bar{v}(s),{}^{C}D^{\delta}\bar{v}(s),{}^{C}D^{q-1}\bar{u}(s)\big)\Big)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_q(t,s)\right|s(t)\psi\Big(\left|v(s)-\bar{v}(s)\right|,\left|{}^{C}D^{\delta}v(s)-{}^{C}D^{\delta}\bar{v}(s)\right|,\left|{}^{C}D^{q-1}v(s)-{}^{C}D^{q-1}\bar{v}(s)\right|\Big)\mathrm{d}s \\
&\le b_q\cdot\|s\|_\infty\cdot\left(\|v-\bar{v}\|_{\tilde{B}}+\|u-\bar{u}\|_B\right).
\end{aligned}
$$

根据定义，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{C}D^{\delta}T_q(v,u)(t)-{}^{C}D^{\delta}T_q(\bar{v},\bar{u})(t)\right| \\
&=\left|\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t(t-s)^{-\delta}\left(T_q'(v,u)(t)-T_q'(\bar{v},\bar{u})(t)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\left[b_q\cdot\|s\|_\infty\cdot\left(\|v-\bar{v}\|_{\tilde{B}}+\|u-\bar{u}\|_B\right)+\frac{2\alpha\left(K_{h_1}+K_{h_2}\right)}{2\alpha\beta+\alpha^2}\|u-\bar{u}\|_B\right]
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{C}D^{q-1}T_q(v,u)(t)-{}^{C}D^{q-1}T_q(\bar{v},\bar{u})(t)\right| \\
&=\left|\frac{1}{\Gamma(3-q)}\int_0^t(t-s)^{2-q}\left(T_q''(v,u)(t)-T_q''(\bar{v},\bar{u})(t)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\frac{1}{\Gamma(4-q)}b_q\cdot\|s\|_\infty\cdot\left(\|v-\bar{v}\|_{\tilde{B}}+\|u-\bar{u}\|_B\right).
\end{aligned}
$$

由范数的定义，可以得到 $T_q(v,u)(t)-T_q(\bar{v},\bar{u})(t)$ 在空间 $B$ 中的范数为

$$
\begin{aligned}
&\left\|T_q(v,u)-T_q(\bar{v},\bar{u})\right\|_B \\
&=\max\left\{\left\|T_q(v,u)-T_q(\bar{v},\bar{u})\right\|_\infty,\left\|{}^{C}D^{\delta}T_q(v,u)-{}^{C}D^{\delta}T_q(\bar{v},\bar{u})\right\|_\infty,\left\|{}^{C}D^{q-1}T_q(v,u)-{}^{C}D^{q-1}T_q(\bar{v},\bar{u})\right\|_\infty\right\},
\end{aligned}
$$

类似地，可以有

$$\|T_p(u,v)-T_p(\bar{u},\bar{v})\|_{\tilde{B}}$$
$$=\max\left\{\|T_p(u,v)-T_p(\bar{u},\bar{v})\|_\infty,\left\|{}^CD^\delta T_p(u,v)-{}^CD^\delta T_p(\bar{u},\bar{v})\right\|_\infty,\left\|{}^CD^{p-1}T_p(u,v)-{}^CD^{p-1}T_p(\bar{u},\bar{v})\right\|_\infty\right\}.$$

根据乘积空间范数的定义及 $\rho=\max\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}<1$，可以得到

$$\begin{aligned}\|T(v,u)-T(\bar{v},\bar{u})\|_{B\times\tilde{B}}&=\|T_q(v,u)-T_q(\bar{v},\bar{u})\|_B+\|T_p(u,v)-T_p(\bar{u},\bar{v})\|_{\tilde{B}}\\&\le\rho\|T(v,u)-T(\bar{v},\bar{u})\|_{B\times\tilde{B}},\end{aligned}$$

这就证明得到$T$是一个压缩映射，根据Banach不动点定理，可以证明问题(1)有唯一解。

## 4. 实例分析

### 考虑边值问题

$$\begin{cases}{}^CD^{\frac{5}{2}}u(t)+\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{10}\cdot\dfrac{|v(t)|+|v'(t)|+\left|{}^CD^{\frac{5}{2}}u(t)\right|}{4+|v(t)|+|v'(t)|+\left|{}^CD^{\frac{5}{2}}u(t)\right|}=0,\quad t\in[0,1],\\ {}^CD^{\frac{8}{3}}v(t)+\dfrac{\mathrm{e}^{-t}+t^2+3}{40}\dfrac{|u(t)|+|u'(t)|+\left|{}^CD^{\frac{5}{2}}v(t)\right|}{4+|u(t)|+|u'(t)|+\left|{}^CD^{\frac{5}{2}}v(t)\right|}=0,\quad t\in[0,1],\\ u(0)-u'(0)=\int_0^1\dfrac{|u(s)|}{17+|u(s)|}\mathrm{d}s,\ u(1)+u'(1)=\int_0^1\dfrac{|u(s)|}{19+|u(s)|}\mathrm{d}s,\ u''(0)=0,\\ v(0)-v'(0)=\int_0^1\dfrac{1}{34}[\cos v(s)+\sin v(s)]\mathrm{d}s,\ v(1)+v'(1)=\int_0^1\dfrac{1}{38}[\cos v(s)+\sin v(s)]\mathrm{d}s,\ v''(0)=0.\end{cases}$$

设 $h_1(u(s))=\dfrac{|u(s)|}{17+|u(s)|}$，$h_2(u(s))=\dfrac{|u(s)|}{19+|u(s)|}$，$\tilde{h}_1(u(s))=\dfrac{1}{34}[\cos v(s)+\sin v(s)]$，$\tilde{h}_2(u(s))=\dfrac{1}{38}[\cos v(s)+\sin v(s)]$，则 $h_1,h_2,\tilde{h}_1,\tilde{h}_2:R\to R$ 是连续函数。则可以得到

$$|h_1(x)-h_1(\bar{x})|=\frac{|x|}{17+|x|}-\frac{|\bar{x}|}{17+|\bar{x}|}\le\frac{1}{17}|x-\bar{x}|,$$

同理，可得

$$|h_2(x)-h_2(\bar{x})|=\frac{1}{19}|x-\bar{x}|,$$

由

$$\left|\tilde{h}_1(x)-\tilde{h}_1(\bar{x})\right|=\left|\frac{1}{34}[\cos x+\sin x]-\frac{1}{34}[\cos\bar{x}+\sin\bar{x}]\right|\le\frac{1}{17}|x-\bar{x}|,$$

同理，可得

$$\left|\tilde{h}_2(x)-\tilde{h}_2(\bar{x})\right|\le\frac{1}{19}|x-\bar{x}|.$$

因此，可知 $K_{h_1}=\tilde{K}_{\tilde{h}_1}=\dfrac{1}{17}$， $K_{h_2}=\tilde{K}_{\tilde{h}_2}=\dfrac{1}{19}$。

设 $f(t,x,y,z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{10}\cdot\dfrac{|x|+|y|+|z|}{4+|x|+|y|+|z|}$， $g(t,x,y,z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}+t^2+3}{40}\cdot\dfrac{|x|+|y|+|z|}{4+|x|+|y|+|z|}$，$(t,x,y,z)\in[0,1]\times R\times R\times R$，那么 $f,g:[0,1]\times R^3\to R$ 是连续的。

由于

$$
\begin{aligned}
&\left|f(t,x,y,z)-f(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right| \\
&=\frac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{10}\left|\frac{|x|+|y|+|z|}{4+|x|+|y|+|z|}-\frac{|\bar{x}|+|\bar{y}|+|\bar{z}|}{4+|\bar{x}|+|\bar{y}|+|\bar{z}|}\right| \\
&\le\frac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{10}\frac{4\left(|x-\bar{x}|,|y-\bar{y}|,|z-\bar{z}|\right)}{\left(4+|x|+|y|+|z|\right)\left(4+|x|+|y|+|z|\right)} \\
&\le\frac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{40}\left(|x-\bar{x}|,|y-\bar{y}|,|z-\bar{z}|\right)
\end{aligned}
$$

同理，可得

$$
\left|g(t,x,y,z)-g(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right|\le\frac{\mathrm{e}^{-t}+t^2+3}{160}\left(|x-\bar{x}|,|y-\bar{y}|,|z-\bar{z}|\right)
$$

因此选择 $s(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{10}$， $\tilde{s}(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}+t^2+3}{40}$， $\psi(x,y,z)=\tilde{\psi}(x,y,z)=\dfrac{|x|+|y|+|z|}{4}$，则可以得到 $\|s\|_\infty=\dfrac{1}{10}$，$\|\tilde{s}\|_\infty=\dfrac{1}{8}$。

又因为 $q=\dfrac{5}{2}$， $p=\dfrac{8}{3}$， $\alpha=\beta=1$，根据假设得到 $b_q=1.1284$， $b_p=1.1077$。通过计算，可以得到 $\rho=\max\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}<1$ 成立，即说明边值问题有唯一解。

## 5. 结论与展望

本文主要研究的是一类具有积分边界条件的非线性耦合分数微分方程组边值问题解的唯一性，全文的研究主要基于 Banach 压缩映射原理得到唯一解的存在性。

首先，针对耦合微分方程组中的单个非线性方程及相关的边界条件求解出非线性系统对应线性系统的 Green 函数，通过简单的观察和计算得到 Green 函数及其偏导函数的连续性，基于连续性以及使用 Banach 压缩映射原理的基本条件，本文给出了一些比较合理的假设，在这些假设成立的条件下运用 Banach 不动点定理得到问题(1)唯一解的存在性。

同参考文献[10] [11]相比，本文研究的非线性项里面含有未知函数的 Caputo 型分数阶导数项，这就使得所研究的问题所在的 Banach 空间特别复杂，相应地，耦合系统所在的乘积空间也更加复杂，使得研究的问题不仅仅在计算方面难度增大，而且在构造 Banach 空间和定义范数上具有更大的难度。

关于该耦合系统的求解，今后的研究方向为解的存在性定理和 Ulam 型稳定性，由于本文涉及的空间相对复杂，所以关于该方面的研究也是本文之后研究的重点和难点，非线性耦合分数阶微分方程边值问题是一个非常有意义的研究方向，以后我们将继续利用泛函分析的相关理论和知识研究这一类问题。

## 参考文献

[1] Kilbas, A.A., Srinastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations.

Vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands.

[2] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993) Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Science, Switzerland.

[3] Granas, A. and Dugundj, J. (2003) Fixed Point Theory. In: *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8

[4] Guezane-Lakoud, A. and Khaldi, R. (2015) Existence Results for a Fractional Boundary Value Problem with Fractional Lidstone Conditions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **49**, 261-268. https://doi.org/10.1007/s12190-014-0837-7

[5] Kirane, M. and Malik, S.A. (2010) The Profile of Blowing-Up Solutions to a Nonlinear System of Fractional Differential Equations. *Non-Linear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **73**, 3723-3736. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.06.088

[6] Gafiychuk, V., Datsko, B. and Meleshko, V. (2008) Mathematical Modeling of Time Fractional Reaction Diffusion Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **220**, 215-225. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.08.011

[7] Bai, Z. and Qiu, T. (2009) Existence of Positive Solution for Singular Fractional Differential Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 2761-2767. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.09.017

[8] Ahmad, B. and Nieto, J.J. (2009) Existence Results for a Coupled System of Nonlinear Fractional Differential Equations with Three-Point Boundary Conditions. *Computers & Mathmatics with Applications*, **58**, 1838-1843. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.07.091

[9] Shah, K. and Khan, R.A. (2015) Existence and Uniqueness of Positive Solutions to a Coupled System of Nonlinear-fractional Order Differential Equations with Anti Periodic Boundary Conditions. *Journal of Difference Equations and Applications*, **7**, 245-262. https://doi.org/10.7153/dea-07-14

[10] Shah, K. and Tunc, C. (2017) Existence Theory and Stability Analysis to a System of Boundary Value Problem. *Journal of Taibah University for Science*, **11**, 1330-1342. https://doi.org/10.1016/j.jtusci.2017.06.002

[11] Chalishajar, D. and Kumar, A. (2018) Existence, Uniqueness and Ulam's Stability of Solutions for a Coupled System of Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions. *Mathematics*, **6**, 96. https://doi.org/10.3390/math6060096

[12] Souahi, A., Guezane-Lakoud, A. and Khaldi, R. (2016) On a Fractional Higher Order Initial Value Problem. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **56**, 289-300. https://doi.org/10.1007/s12190-016-1074-z