

一些关于 C_4 对星的Set Ramsey 数

熊慧芸

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2024年1月28日; 录用日期: 2024年2月22日; 发布日期: 2024年2月29日

摘要

运用参数坐标构造出一个有限射影平面, 由射影平面与射影平面上一个极性映射导出极性图. 根据极性图, 对于一些 n , 能够构造出 C_4 对星 $K_{1,n}$ 的 set Ramsey 数 $M_s(C_4, K_{1,n})$ 的极值图. 由此得到了关于这部分 n 的 $M_s(C_4, K_{1,n})$ 的下界并确定了一些新的精确值.

关键词

有限射影平面, 极性图, 多部图, Set Ramsey数

Some Values of Set Ramsey Numbers for C_4 versus Stars

Huiyun Xiong

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

A finite projective plane is constructed using parametric coordinates, and a polarity graph is derived from a polarity mapping and the projective plane. For some n , we can

construct the extreme graph of set Ramsey numbers for C_4 versus stars $K_{1,n}$ according to the polarity graph. The lower bound of $M_s(C_4, K_{1,n})$ is obtained and some new exact values are determined.

Keywords

Finite Projective Plane, Polarity Graph, Multipartite Diagram, Set Ramsey Number

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文所讨论的图都是简单图. 对于图 $G = (V(G), E(G))$, 其中 $V(G)$ 与 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集与边集. 相应地, 符号 $|V(G)|$ 与 $|E(G)|$ 分别表示图 G 的顶点数(或称为阶数)和边数. 同时, 对于图 G 上的一点 v , 将点 v 在图 G 上的邻域与度分别记作 $N_G(v)$ 与 $d_G(v)$. 若 V' 是 V 的一个非空真子集, 则用 $G[V']$ 表示以 V' 为顶点集形成的图 G 的诱导子图.

给定简单图 G_1, G_2 , 用 Ramsey 数 $R(G_1, G_2)$ 来表示最小的正整数 N , 使得对于完全图 K_N 的任意生成子图 H , 要么 H 包含 G_1 , 要么 \bar{H} 包含 G_2 , 其中 \bar{H} 为 H 关于 K_N 的补图. 众多学者在研究 Ramsey 数的过程中, 引入了 Ramsey 数的推广形式与一些变体. 其中, Ramsey 数的一种变体 set Ramsey 数的定义由 Burger 和 Vuuren [1] 给出.

一个每个分部有 s 个顶点的完全 c 部图用 $K_{c \times s}$ 表示. 给定简单图 G_1, G_2 , 用 set Ramsey 数 $M_s(G_1, G_2)$ 来表示一个最小的正整数 c , 使得 $K_{c \times s}$ 的任意生成子图 G , 要么 G 包含 G_1 , 要么 \bar{G} 包含 G_2 , 其中 \bar{G} 为 G 关于 $K_{c \times s}$ 的补图.

近年来, 一些学者研究了关于 C_4 的 set Ramsey 数的一些情况: G_1 与 G_2 都是 C_4 的 $M_s(C_4, C_4)$ [2]; G_1 是 C_4 且 G_2 是星 $K_{1,n}$ 的 $M_s(C_4, K_{1,n})$ [3].

同时, Goncalves 和 Carmelo [3] 也确定了 set Ramsey 数 $M_s(C_4, K_{1,n})$ 的一般上界.

定理1. ([3]) 对于整数 $s \geq 1, n \geq 2$, 令 $t = n + s - 1$, 有

$$M_s(C_4, K_{1,n}) \leq \begin{cases} \frac{n+\sqrt{t}}{s} + 2, & \text{若 } s \mid (n + \sqrt{t}) \\ \left\lceil \frac{n+\sqrt{t}}{s} \right\rceil + 1, & \text{若 } s \nmid (n + \sqrt{t}). \end{cases}$$

根据定理 1 中的给出的一般上界, 通过构造一个分部数为 $c - 1$ 的图 H , 使得图 H 中不包含 C_4

同时图 H 关于 $K_{(c-1) \times s}$ 的补图中不包含 $K_{1,n}$, 由此可以得到对应的 set Ramsey 数 $M_s(C_4, K_{1,n})$ 的下界, 且能够达到一般上界. 因而得到以下主要结果.

定理2. 对素数幂 $q \geq 3$, $1 \leq k \leq q-2$ 且 $1 \leq j \leq k$, 则

(1) 当 $q < j+k$ 时, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,(j-1)k+q}) = j+2$;

(2) 当 $q \geq j+k$ 时, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,j(k+1)}) = j+2$.

推论1. 对素数幂 $q \geq 3$, $1 \leq j, k \leq q-2$, 则

(1) 当 $q < j+k$ 时, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,(j-1)k+q}) \geq j+2$;

(2) 当 $q \geq j+k$ 时, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,j(k+1)}) \geq j+2$.

定理3. 对素数幂 $q \geq 4$, 且 $\lceil \frac{q}{4} \rceil + 1 \leq k \leq q-2$, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,(k+1)q-k+1}) = q+2$.

2. 预备定义与引理

根据 Parsons [4] 对于射影平面 $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 的描述, 可得到如下定义.

定义1. 给定射影平面 $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, 其中 \mathcal{P} 为一个非空集合, 之中的元素称为点, 而集合 \mathcal{L} 为 \mathcal{P} 中子集族, 将 \mathcal{L} 中元素称为线, 且满足性质:

公理1. 任意两个不同的点位于一条线上;

公理2. 任意两条不同的线相交于唯一一点;

公理3. 存在四点, 不存在一条线, 使得这四点中超过两点在这条线上.

通过射影平面 Π , 我们可以由射影平面与射影平面上一个极性映射 σ 导出一个极性图 G .

定义2. 给定一个由 (Π, σ) 导出的图 G , 顶点集为 \mathcal{P} , 边集为 $\{\{P, Q\} : P \neq Q \text{ 且 } P \in \sigma(Q)\}$, 其中 Π 为阶为 q 的射影平面 $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, σ 为射影平面 Π 上一个极性映射(必为双射) $\sigma : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, 且满足: (i) $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}$ (同样有 $\sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{P}$); (ii) $\sigma^2 = \varepsilon$ 为恒等映射; (iii) 对任意点 P 与任意边 l_Q , $P \in l_Q$ 当且仅当 $\sigma(l_Q) \in \sigma(P)$. 我们称图 G 为极性图.

Goncalves 和 Carmelo 在 [3] 中, 用参数坐标构造出了一种射影平面如下.

定义3. 给定一个有限域 \mathbb{F}_q , 其中素数幂 $q \geq 3$. 令顶点集

$$\mathcal{P} = (\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q) \cup (\{q\} \times \mathbb{F}_q) \cup (\{q\} \times \{q\}), \quad (1)$$

其中 $q \notin \mathbb{F}_q$. 对于每个 $(x, y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q, z \in \mathbb{F}_q$, 规定线集合 \mathcal{L} 为:

$$l_{(x,y)} = \{(k, kx - y) : k \in \mathbb{F}_q\}, \quad (2)$$

$$l_{(q,z)} = \{z\} \times \mathbb{F}_q \cup \{(q, q)\}, \quad (3)$$

$$l_{(q,q)} = \{q\} \times \mathbb{F}_q \cup \{(q, q)\}. \quad (4)$$

由此构造出一个射影平面 $\Pi_q = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

因此通过射影平面 Π_q , 按照定义 2, 构造出一个极性图 G_q .

定义4. 对于有限域 $\mathbb{F}_q = \{0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-1}\}$ (α 为基本元), 通过有限射影平面 $\Pi_q = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 与极性

映射(必为双射) $\sigma : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, 可以导出极性图 G_q , 其中 $V(G_q \setminus \{(q, q)\}) = (V_0, V_1, \dots, V_q)$, 且有

$$V_0 = \{0\} \times \mathbb{F}_q, V_i = \{\alpha^i\} \times \mathbb{F}_q, \text{ 其中 } 1 \leq i \leq q-1, V_q = \{q\} \times \mathbb{F}_q.$$

我们了解到, 通过 (Π_q, σ) 导出的极性图 G_q 有 $q^2 + q + 1$ 个顶点, 并可将其顶点集 \mathcal{P} 划分为: $V_0, V_1, \dots, V_q, \{(q, q)\}$, 同时对于 \mathcal{P} 中任意一点 v , 有 $q \leq d_G(v) \leq q + 1$. 因此, 我们可以得到 G_q 的一个有 $q + 1$ 个分部划分且每个分部划分中顶点数相同的子图如下.

定义5. 通过删去 G_q 中的顶点 (q, q) 以及所有的同一个顶点集 V_j 中的边, 其中 $j \in \{0, 1, \dots, q\}$. 我们称得到的子图为 $G_q(q+1, q)$. 可知 $V(G_q(q+1, q)) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_q, E(G_q(q+1, q)) = \{\{P, Q\} : \text{对于 } 0 \leq j < l \leq q, P \in V_j, Q \in V_l \text{ 且 } P \in V_l\}$.

同时 Goncalves 和 Carmelo 在 [3] 中给出了图 $G_q(q+1, q)$ 的一些性质如下.

引理1. ([3]) 图 $G = G_q(q+1, q)$ 满足以下一些性质:

(i) $G \subseteq K_{(q+1) \times q}$ 且 G 中不包含 C_4 ;

(ii) 给定 $P \in V_j$, 其中 $j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. 对 $l \neq j$, 其中 $l \in \{0, 1, \dots, q\}$, P 在 V_j 中恰有一个邻点;

(iii) 给定 $P = (q, y) \in V_q$. 对于某个 j ($1 \leq j \leq q-1$), 有 $y = \alpha^j$ (或者 $y = 0$), 则与 P 相邻的 q 个点都在 V_j (或者 V_0) 中;

(iv) 对所有 $P \in V(G)$, 有 $d_G(v) = q$ 且 $d_{\bar{G}}(v) = q^2 - q$, 其中 \bar{G} 为 G 关于 $K_{(q+1) \times q}$ 的补图.

在这里, 我们给出当 $q = 3$ 时图 G_q 与图 $G_q(q+1, q)$ 的例子: 令 $\alpha = 2 \in \mathbb{Z}_3$, 可以得到图 G_3 与图 $G_3(4, 3)$ 的结构(如图 1). 详细介绍可以参考 [3].

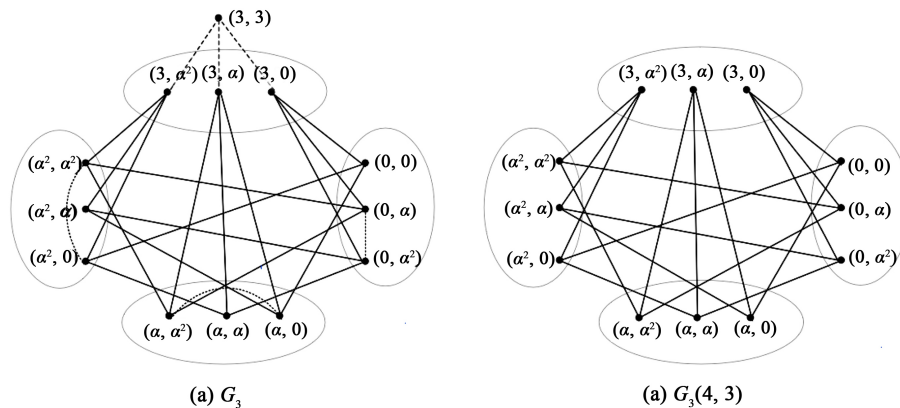


Figure 1. Polarity graph G_3 and q -regular graph $G_3(4, 3)$

图 1. 极性图 G_3 与 q -正则图 $G_3(4, 3)$

3. 定理 2 与定理 3 的证明

根据极性图 G_q 与其子图 $G_q(q+1, q)$ 的结构, 我们可以引入以下结构.

结构1. 对于素数幂 $q \geq 3$, 给定 $1 \leq j, k \leq q-2$, 令图 $G = G_q(q+1, q)$, 在 G 中取 $V(G)$ 的子集

$$N = N(k) = N_G[(0, 0)] \cup N_G[(0, \alpha)] \cup \dots \cup N_G[(0, \alpha^k)],$$

其中 $N_G[P] = N_G(P) \cup \{P\}$. 再取出图 G 关于顶点集 $(V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_j) \cap N$ 的诱导子图, 我们称之为

$$G_q(j+1, k+1) = G[(V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_j) \cap N].$$

同图 1 中设定, 对于 $q = 3, j = k = 1$, 我们给出一个结构 1 的例子, 即图 $G_3(2, 2)$ (如图 2).

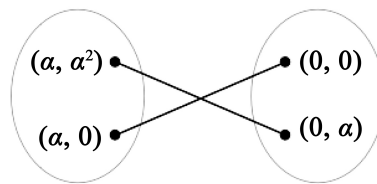


Figure 2. Configuration 1 $G_3(2, 2)$

图 2. 结构1 $G_3(2, 2)$

对于结构 1 进行分析, 得到以下引理.

引理2. 令 $H = G_q(j+1, k+1)$, 有 $H \subseteq K_{(j+1) \times (k+1)}$ 且 H 中不包含 C_4 .

证明. 由于 $H \subseteq G$ 与引理 1, 可知 H 中不包含 C_4 . 再由图 H 的定义, 可知图 H 的顶点集 $(V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_j) \cap N$ 可分为 $j+1$ 个分部划分. 之后我们可证图 H 的每个分部划分中有 $k+1$ 个顶点, 即对任意 $0 \leq i \leq j$, 有 $|V_i \cap N| = k+1$.

任意选出 $1 \leq i \leq j$, 任一 $Q \in \{(0, 0), (0, \alpha), \dots, (0, \alpha^k)\}$, 根据引理 1, V_i 中仅有 1 点与之相邻, 即有 $|V_i \cap N| \leq k+1$. 再取任意不同的两点 $Q, Q' \in \{(0, 0), (0, \alpha), \dots, (0, \alpha^k)\}$, 可知 $Q, Q' \in V_0$. 由于 G 中不包含 C_4 , 有 $N_G(Q) \cap N_G(Q') = \{(q, 0)\}$, 即可知 $N_G(Q) \cap N_G(Q') \cap V_i = \emptyset$, 则 $|V_i \cap N| = |V_i \cap N_G[(0, 0)]| + \sum_{t=1}^k |V_i \cap N_G[(0, \alpha^t)]| = k+1$. 再由 $V_0 \cap N_G[Q] = \{Q\}$, 可知 $V_0 \cap N = \{(0, 0), (0, \alpha), \dots, (0, \alpha^k)\}$.

综上, 我们可知, 对于 $0 \leq i \leq j \leq q-2$, 在图 H 的每个分部划分 $V_i \cap N$ 中恰有 $k+1$ 个顶点, 则有 $H \subseteq K_{(j+1) \times (k+1)}$. ■

通过结构 1, 能够构造出相应的 set Ramsey 数 $M_s(C_4, K_{1,n})$ 的极值图. 因此, 我们给出如下定理 2 的证明.

定理 2. 对素数幂 $q \geq 3, 1 \leq k \leq q-2$ 且 $1 \leq j \leq k$, 则

(1) 当 $q < j+k$ 时, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,(j-1)k+q}) = j+2$;

(2) 当 $q \geq j+k$ 时, 有 $M_{k+1}(C_4, K_{1,j(k+1)}) = j+2$.

证明. 我们先给出下界的证明. 给定图 $H = G_q(j+1, k+1)$, 图 $G = G_q(q+1, q)$, 图 $F = G[V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_j]$, 点集 $N = N_G[(0, 0)] \cup N_G[(0, \alpha)] \cup \dots \cup N_G[(0, \alpha^k)]$, $M = \bigcup_{i=k+1}^{q-1} N_G[(0, \alpha^i)]$.

根据引理 1, 可知图 G 为 q -正则的, 图 F 为 j -正则的. 由于图 H 的定义与引理 2, 可知 $H \subseteq F \subseteq G$, 则我们能够通过删除图 F 中的一些顶点得到图 H . 对于 $V(H)$ 中任一点 P , 我们通过删除在图 F 中删去点集 $M \cap N_G(P)$ 得到 $N_H(P)$. 若 $P \in V(H) \cap V_0 = N \cap V_0$, 由引理 1, 有 $M \cap N_G(P) = \{(q, 0)\}$, 即 $|M \cap N_G(P)| = 1$, 可知 $d_H(P) = j$. 若 $P \in V(H) \setminus V_0$, 我们通过两个方法分别给出 $|M \cap N_G(P)|$ 的范围.

首先, 由于引理 1, 可知 G 中不包含 C_4 , 即有 F 中不包含 C_4 . 对于每一 $k+1 \leq i \leq q-1$, 至多存在一个点 $Q_i \in N_G((0, \alpha^i)) \cap N_G(P)$, 则有 $|M \cap N_G(P)| \leq q-1-(k+1)+1 = q-k-1$. 其次, 由于 $P \in V(H) \setminus V_0$, 即 $V_0 \cap N_G(P) \subseteq N$, 有 $V_0 \cap M \cap N_G(P) = \emptyset$. 根据引理 1, 顶点 P 在任意分部划分中(除去点 P 所在的分部划分)恰有一个邻点, 图 F 中有 $j+1$ 个分部划分. 则有 $|M \cap N_G(P)| = \sum_{i=0}^j |V_i \cap M \cap N_G(P)| \leq j+1-2 = j-1$. 我们分情况讨论如下:

(i) 若 $q-k-1 < j-1$, 即 $q-k < j$, 有 $d_H(P) \geq j-(q-k-1) = j-q+k+1$ 且 $d_{\overline{H}}(P) \leq (j-1)k+q-1$. 由此可知, $M_{k+1}(C_4, K_{1,(j-1)k+q}) \geq j+2$.

(ii) 若 $q-k-1 \geq j-1$, 即 $q-k \geq j$, 有 $d_H(P) \geq j-(j-1) = 1$ 且 $d_{\overline{H}}(P) \leq j(k+1)-1$. 由此可知, $M_{k+1}(C_4, K_{1,j(k+1)}) \geq j+2$.

再给出上界的证明, 同样可以分成以下两种情况证明:

(i) 取每个分部划分顶点数为 $s = k+1$, 给定 $n = (j-1)k+q = (j-1)(k+1) + q-j+1$, 则 $t = n+s-1 = jk+q = j(k+1)+q-j$. 再由 $k \leq q-2$ 且 $q < j+k$, 满足 $j^2 < t = j(k+1)+q-j < j(k+1)+k \leq k^2+2k < (k+1)^2$, 即有 $s \nmid (n+\sqrt{t})$. 由定理 1, 同理可知

$$M_s(C_4, K_{1,n}) \leq \left\lceil \frac{(j-1)k+q+\sqrt{t}}{k+1} \right\rceil + 1 \leq j-1+1 + \left\lceil \frac{q-j+1+\sqrt{t}}{k+1} \right\rceil \leq j + \left\lceil \frac{k+1+\sqrt{t}}{k+1} \right\rceil = j+2.$$

由此得证.

(ii) 取每个分部划分顶点数为 $s = k+1$, 给定 $n = j(k+1)$, 则 $t = n+s-1 = j(k+1)+k$. 再由 $j \leq k$, 满足 $0 < t \leq k^2+2k < (k+1)^2$, 即有 $s \nmid (n+\sqrt{t})$. 由定理 1, 可知

$$M_s(C_4, K_{1,n}) \leq \left\lceil \frac{n+\sqrt{t}}{s} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{j(k+1)+\sqrt{t}}{k+1} \right\rceil + 1 \leq j+1 + \left\lceil \frac{\sqrt{t}}{k+1} \right\rceil = j+2.$$

由此得证. ■

显然由上面的证明可得推论 1.

同样地, 为了证明定理 3, 构造相应的极值图, 我们给出下面的结构.

结构 2. 对于素数幂 $q \geq 3$, 给定 $1 \leq k \leq q-2$, 令图 $G = G_q(q+1, q)$, 在 G 中取 $V(G)$ 的子集

$$(N \cup \{(q, \alpha^{q-1}), \dots, (q, \alpha^{q-k-1})\}) \setminus \{(q, 0)\},$$

再取出图 G 关于顶点集 $(N \cup \{(q, \alpha^{q-1}), \dots, (q, \alpha^{q-k-1})\}) \setminus \{(q, 0)\}$ 的诱导子图, 我们称之为

$$G_q(q+1, k+1) = G[(N \cup \{(q, \alpha^{q-1}), \dots, (q, \alpha^{q-k-1})\}) \setminus \{(q, 0)\}].$$

同样地, 根据与图 1, 图 2 相同的设定, 对于 $q = 3, k = 1$, 我们给出一个结构 2 的例子, 即图 $G_3(4, 2)$ (图 3).

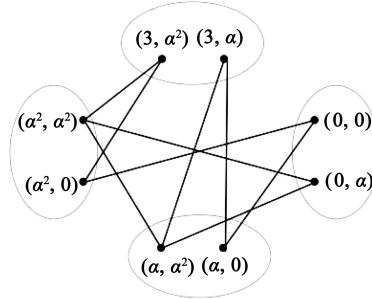


Figure 3. Configuration 2 $G_3(4, 2)$

图 3. 结构 2 $G_3(4, 2)$

对于结构 2 进行分析, 得到引理 3.

引理 3. 令 $H = G_q(q + 1, k + 1)$, 有 $H \subseteq K_{(q+1) \times (k+1)}$ 且 H 中不包含 C_4 .

证明. 由于 $H \subseteq G$ 与引理 1, 可知 H 中不包含 C_4 . 再由图 H 的定义, 可知图 H 的顶点集 $V(H)$ 可分为 $q + 1$ 个分部划分. 与引理 2 中同理, 再由 $V(H) \cap V_q = \{(q, \alpha^{q-1}), \dots, (q, \alpha^{q-k-1})\}$, 可知图 H 的每个分部划分中有 $k + 1$ 个顶点, 即对任意 $0 \leq i \leq q$, 有 $|V_i \cap N| = k + 1$.

由此可知, 对于 $0 \leq i \leq q$, 在图 H 的每个分部划分 $V_i \cap N$ 中恰有 $k + 1$ 个顶点, 则有 $H \subseteq K_{(q+1) \times (k+1)}$. ■

进一步, 通过结构 2, 我们给出如下定理 3 的证明.

定理 3. 对素数幂 $q \geq 4$, 且 $\lceil \frac{q}{4} \rceil + 1 \leq k \leq q - 2$, 有 $M_s(C_4, K_{1, (k+1)q-k+1}) = q + 2$.

证明. 我们先给出下界的证明. 给定图 $H = G_q(q + 1, k + 1)$, 图 $G = G_q(q + 1, q)$, 点集 $N = N_G[(0, 0)] \cup N_G[(0, \alpha)] \cup \dots \cup N_G[(0, \alpha^k)]$, $M = \bigcup_{i=k+1}^{q-1} N_G[(0, \alpha^i)]$. 与定理 2 的证明同理, 能够通过删除图 G 中的一些顶点得到图 H , 且对于 $V(H)$ 中任一点 P , 可以在图 G 中删去点集 $M \cap N_G(P)$ 得到 $N_H(P)$. 若 $P \in V(H) \cap V_0$, 同理有 $M \cap N_G(P) = \{(q, 0)\}$, 即 $|M \cap N_G(P)| = 1$. 同样地, 若 $P \in V(H) \setminus V_0$, 对于每一 $k + 1 \leq i \leq q - 1$, 至多存在一个点 $Q_i \in N_G[(0, \alpha^i)] \cap N_G(P)$, 则有 $|M \cap N_G(P)| \leq q - 1 - (k + 1) + 1 = q - k - 1$. 由此可知, 对 $V(H)$ 中任一点 P , 有 $|M \cap N_G(P)| \leq q - k - 1$.

同时, 若 $P \in \bigcup_{i=1}^{q-k-2} V_i$, 有 $|V(H) \cap N_G(P) \cap V_q| = 0$, 即 $|(N_G(P) \cap V_q) \setminus V(H)| = 1$. 由于 G 为 q -正则的, 对 $V(H)$ 中任一点 P , 有 $d_H(P) = d_G(P) - |M \cap N_G(P)| - |(N_G(P) \cap V_q) \setminus V(H)| \geq q - (q - k - 1) - 1 = k$ 且 $d_{\overline{H}}(P) \leq (k + 1)q - k$. 可知 $M_{k+1}(C_4, K_{1, (k+1)q-k+1}) \geq q + 2$.

之后给出上界的证明, 取每个分部划分顶点数为 $s = k + 1$, 给定 $n = (k + 1)q - k + 1$, 则 $t = n + s - 1 = (k + 1)q + 1$. 再由 $\lceil \frac{q}{4} \rceil + 1 \leq k \leq q - 2$, 可知 $k + 2 \leq q \leq 4(k - 1)$, 即

$(k+1)^2 < (k+1)(k+2) + 1 \leq t \leq 4k^2 - 3 < (2k)^2$, 因此 $s \nmid (n + \sqrt{t})$. 根据定理 1, 可知

$$M_s(C_4, K_{1,n}) \leq \left\lceil \frac{(k+1)q - k + 1 + \sqrt{t}}{k+1} \right\rceil + 1 \leq q + 1 + \left\lceil \frac{-k + 1 + \sqrt{t}}{k+1} \right\rceil = q + 2.$$

由此得证. ■

4. 结语

通过构造极性图得到了 C_4 对星 $K_{1,n}$ 的 set Ramsey 数 $M_s(C_4, K_{1,n})$ 的极值图, 因而根据已有的上界, 确定了一些新的精确值. 在未来的研究中, 可以尝试使用这个方法解决更多的 C_4 对星 $K_{1,n}$ 的 set Ramsey 数问题. 进一步地, 可以考虑将此方法推广至 C_4 对其他的二部图的 set Ramsey 数问题中.

参考文献

- [1] Burger, A.P. and Vuuren, J.H.V. (2004) Ramsey Numbers in Complete Balanced Multipartite Graphs. Part I: Set Numbers. *Discrete Mathematics*, **283**, 37-43.
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.02.004>
- [2] Magnant, C. and Yusko, A. (2011) Ramsey Set Numbers in Balanced Complete Multipartite Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **77**, 187.
- [3] Goncalves, C.J.F., Carmelo, E.L.M. and Nakaoka, I.N. (2021) Polarity Graphs and C_4 -Free Multipartite Graphs. *Procedia Computer Science*, **195**, 437-444.
<https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.11.053>
- [4] Parsons, T.D. (1976) Graphs from Projective Planes. *Aequationes Mathematicae*, **14**, 167-189.
<https://doi.org/10.1007/BF01836217>