Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(3), 912-927
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133086

狭窄框架下保险模型的Stackelberg博弈问题

孙少迪

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2024年2月13日；录用日期：2024年3月8日；发布日期：2024年3月14日

摘 要

考虑狭窄框架和均值-方差准则下的 **Stackelberg** 博弈再保险问题。狭窄框架意味着，购买保险的动机除了对冲财富风险，还有可能将购买保险本身看作一项风险投资。因此，使用二次效用函数来度量保险净收益的局部得失效用，即，狭窄框架。在 **Stackelberg** 博弈中，再保险公司首先向保险公司提供合理的赔偿来换取适当的保费。然后，保险公司根据这个保费原则选择最优的赔偿。首先，假设再保险公司选定期望值保费原则，保险公司通过选择最优赔偿策略来最大化终端财富的均值-方差函数和保险净收益的二次函数。然后给定这个最优赔偿，再保险公司通过选择最优保费参数最大化终端财富的均值-方差函数。此外，考虑另外一个 **Stackelberg** 博弈的问题。对于保险公司来说，考虑与前者相同的目标函数，给定 $\Pi(I) = \mathbb{E}(PI)$ 保费原则，得到了最优保险赔偿的表达式。之后，给定这个最优的保险赔偿，最大化再保险公司终端财富的期望效用准则，计算得到了保费的最优价格强度。进一步，通过 **Taylor** 展开，得到了这对最优解的近似表达式。

关键词

Stackelberg 博弈，均值-方差准则，狭窄框架，再保险，期望效用准则

A Stackelberg Game Problem in Insurance Models with Narrow Framing

Shaodi Sun

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

文章引用: 孙少迪. 狭窄框架下保险模型的Stackelberg博弈问题[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 912-927.
DOI: 10.12677/aam.2024.133086

Received: Feb. 13^{th}, 2024; accepted: Mar. 8^{th}, 2024; published: Mar. 14^{th}, 2024

Abstract

In this paper, we consider the Stackelberg game reinsurance problem under mean-variance criterion with narrow framing. The motivation for purchasing insurance might not only be hedging wealth risk, but also to consider the purchase of insurance itself as a risky investment, which is called narrow framing. Inspired by this, we use a quadratic utility function to measure the local gain-loss utility of the net benefits of insurance, namely, narrow framing. As the Stackelberg game in insurance models, the reinsurer first offers the insurer a reasonable indemnity in exchange for the appropriate premium. Then, the insurer selects an indemnity based on the premium principle. In this paper, suppose that the reinsurer chooses the expected value premium principle, we compute the optimal insurance indemnity to maximize the mean-variance functional of the insurer's terminal wealth and the quadratic function of net insurance returns. Then, given the optimal indemnity of the insurer, we compute the parameter of the expected value premium principle to maximize the mean-variance function of the reinsurer's terminal wealth. In addition, we consider another Stackelberg game. For the insurer, by considering the same objective function as the former and giving the premium principle $\Pi(I) = \mathbb{E}(PI)$, we obtain an expression of the optimal indemnity. Afterwards, given the optimal indemnity, we maximize the expected utility for the terminal wealth of the reinsurer and compute the optimal price intensity of the premium. Furthermore, by applying Taylor expansion, we find the approximation expression of the optimal solution.

Keywords

Stackelberg Game, Mean-Variance Criterion, Narrow Framing, Reinsurance, Expected Utility Criterion

1. 引言

关于再保险设计的开创性工作可以追溯到 Borch [1]，通过研究最小化保险公司的总风险暴露方差，表明在期望保费原则下，止损再保险是最优的。已知保费原则并且仅关注最优保险设计的文献很多。Kaluszka [2]用均值-方差保费原则替代期望保费原则，对 Borch [1]的结果进行了推广。Young [3]和 Kaluszka [4]分别使用 Wang's 保费原则和凸保费原则研究了最优再保险。然而，Borch [5] 指出，对保险公司有益的再保险合同可能不被再保险公司所接受。因此在研究最优保险的问题上，同时考虑保险双方的利益是重要的。当保险费定价过高时，保险公司会自留更多的保险业务来减少再保费的支出。另一方面，如果保险费价格很低，再保险公司不会再开展业务。Cai 等 [6]从保险双方的角度研究了最优再保险设计，并在再保险合同设计中同时考虑了两者的目标。

近几年，一些学者采用 Stackelberg 博弈模型来研究最优再保险的问题。文献 [7, 8]介绍了有关 Stackelberg 博弈的相关内容。Chan 和 Gerber [9]通过最大化保险公司和再保险公司终端财富的期望效用函数，推导出了一对 Bowley 解。在效用函数为指数型，二次型和线性函数时，分别得到了再保险价格和留存损失金额的近似解。在之后几十年，他们所倡导的均衡 Bowley 解方案在风险管理框架中并未得到重视。Cheung 等 [10]在一般保费原则和扭曲风险度量下扩展了 Chan 和 Gerber [9]的工作，采用两步分层优化过程，首先确定了保险公司的最优赔付，之后确定了再保险公司的最优定价函数，Chi 等 [11] 利用 Bowley 解来解决保险公司和再保险公司之间的最优风险转移问题。模型的第一步是根据给定的保费得到最优的再保险保单，同时反映了再保险公司的风险偏好，第二步确定了使再保险公司预期利润最大化的保费。Boonen 等 [12]研究了不对称信息下的 Bowley 解，假设再保险公司不了解保险公司的信息。Li 和 Young [13]在终端财富效用最大化标准下研究了一个单期的 Stackelberg 博弈的 Bowley 解。首先给定均值-方差的保费原则，来最大化保险买方的效用函数，之后根据推导得到的最优赔偿来计算保费的最优参数，得到一对均衡解。

保险中存在的一个主要难题是，人们在一些保险上投保较少，比如灾害保险和健康保险。传统经济学假设投资者有无限的认知能力，可以完全理性的做出决策，但现实远非如此完美。一些研究提出了偏离完全理性行为在保险购买中的作用，对这一发现的合理解释是，人们购买保险的动机，除了对冲财富以外还有其他动机。

在 Heaton 和 Lucas [14]中，即使股票风险和其他家庭风险相对不相关，许多家庭也没有将他们的财富分配给股市。Curcuru 等 [15]指出，一些家庭将大部分财富分配给了少数股票。这些情况意味着人们忽视了一些投资多样化的机会。关心整体财富风险的投资者通常热衷于利用多元化的机会，Barberis 和 Huang [16]认为孤立地评估风险的投资者会错过这些机会。狭窄框架意味着，代理人使用的效用函数直接取决于赌博的结果，而不仅仅是间接地通过对总财富的贡献，可以参考文献 [17, 18]。研究结果表明狭窄框架是有意义的。但在以往研究中几乎没有易于处理的狭窄框架的偏好规范。Barberis 等 [19]尝试将狭窄框架纳入偏好规范中，研究了当投资者直接从股票市场波动中获得效用时，股票市场的定价。Barberis 和 Huang [16]提出从赌博结果中间接地获得效用。Gottlieb 和 Mitchell [20]提出了一个保险狭窄框架模型，表明受狭窄框架影响的受访者购买长期护理保险的可能性远低于平均水平，且这种影响比风险厌恶的影响大得多. Zheng [21]研究了投保人以狭窄框架评估购买保险时的保险决策，假设投保人在购买保险时持有一个混合观点：对冲财富风险和与保险公司的赌博。结果表明狭窄框架减少了保险需求，有助于解释市场上观察到的低保

险需求。人们有时也会购买过多的保险，Behaghel 和 Blau [22]认为狭窄框架和损失厌恶可以解释人们在 65 岁时社会保障的激增. 在研究中，Chi 等 [23]使用 S 形狭窄框架，表明了这个模型可以与保险购买过少以及保险购买过多这两个保险难题相协调。

在以上研究的基础上，本文考虑了单期的 Stackelberg 博弈，即领导者-跟随者博弈。再保险公司首先行动，保险公司随后行动，以实现最优的再保险策略。在 Stackelberg 博弈中，通过解决两个子问题来解决这个最优再保险问题。在以往文献中，还没有学者将狭窄框架理论和 Stackelberg 博弈相结合。因此，本文在保险公司的目标问题上引入狭窄框架的影响。具体地说，在本文的第一项研究内容中，第一个子问题是给定期望值保费原则，最大化保险公司终端财富的均值-方差准则以及保险净收益的二次效用函数，求得最优的保险赔偿. 第二个子问题是最大化再保险公司终端财富的均值-方差准则，计算保费原则的最优参数. 在第二项研究内容中，与第一项内容不同的是，将保费形式替换为 $\Pi(I) = \mathbb{E}(PI)$，最大化再保险公司终端财富的期望效用准则。最后得到了保险赔偿和保费价格强度的最优解。

本文余下内容安排如下。第 2 节给出模型与假设。第 3 节考虑期望值保费原则，在均值-方差准则下对 Stackelberg 问题进行求解，计算了保险公司获得的最优赔偿，并且证明了最优解是唯一的。第 4 节更换保费的形式以及再保险公司的目标准则，得到保险公司的最优赔偿以及保费价格强度的最优解。利用 Taylor 展开式，得到这对最优解的近似值。最后，第 5 节对本文进行总结。

2. 模型与假设

假设市场上有两个时刻 $t = 0, 1$，$t = 0$ 表示初始时刻。保险公司在 $t = 1$ 时面对一个损失 X，把损失 X 限制在区间 $[0, w_i]$ 上，其中 w_i 是保险公司的初始财富。假设用 $S_X(x)$ 表示 X 的生存函数，用 $F_X(x)$ 表示 X 的分布函数。一份再保险合同 $(I, \Pi(I))$ 包括两个部分，其中 I 是再保险赔偿，对所有的 $x \geq 0$，有 $0 \leq I(x) \leq x$，$\Pi(I)$ 是再保险保费。假设 R 是保险公司购买再保险后承担的损失，有 $R = X - I$。

国内外学者在研究最优再保险的问题上，大多采用预期效用最大化和均值-方差准则的方法处理代理人的终端财富。基于 Stackelberg 博弈框架，本文设计的再保险合同主要关注保险公司和再保险公司之间的相互影响，在此基础上引入狭窄框架的概念，即，假设再保险合同被保险公司看作是与再保险公司的赌博，这意味着当保险公司决定接受赌博时，他使用一个取决于赌博结果的效用函数。在后续研究中，我们使用二次效用函数来分析该问题。

本文研究了两个 Stackelberg 博弈问题，在第一项研究内容中，做如下假设：

(1) 假设保险公司和再保险公司的初始财富分别为 w_i 和 w_r，终端财富分别为 W_i 和 W_r，它们满足如下关系式：

$$W_i = w_i - X + I - \Pi(I), \tag{1}$$

$$W_r = w_r - I + \Pi(I). \tag{2}$$

在购买保险后，保险公司获得的保险净收益为 $I - \Pi(I)$。假设保险公司用二次函数评估保险净收益

的额外效用，二次函数 $g(\cdot)$ 的表达式如下：

$$g(x) = x - cx^2, \tag{3}$$

其中，参数 c 满足 $0 < c < \frac{1}{2w_i}$。[1]

(2) 假设再保险公司使用期望值保费原则进行计算，保费 $\Pi(I)$ 满足如下关系式：

$$\Pi(I) = (1+\theta)\mathbb{E}I,$$

其中，$\theta > 0$。

(3) 给定 θ，保险公司的目标是选择最优的保险赔偿 I^* 最大化终端财富和保险净收益的函数

$$\max_I \ \mathbb{E}W_i - \frac{\gamma_1}{2}Var(W_i) + k\mathbb{E}\left(g\left(I - \Pi(I)\right)\right), \tag{4}$$

其中 $\gamma_1 > 0$ 是保险公司的损失厌恶系数。$k \geq 0$ 是狭窄框架度，用来衡量保险公司购买保险的净收益在效用上所占的权重。当 $k = 0$ 时，保险公司只关注终端财富的均值-方差准则。当 $k \to +\infty$ 时，购买保险可以仅看作是与再保险公司的赌博。

给定求得的最优解 I^*，再保险公司选择最优的保费参数最大化其终端财富的均值-方差函数

$$\max_\theta \ \mathbb{E}W_r - \frac{\gamma_2}{2}Var(W_r), \tag{5}$$

其中 $\gamma_2 > 0$ 是再保险公司的损失厌恶系数。

在本文的第二项研究内容中，做以下假设：

(1) 在该项研究内容中，我们更换保费原则来求解 Stackelberg 博弈的最优解，假设保费形式为

$$\Pi(I) = \mathbb{E}(PI),$$

其中变量 P 表示价格强度，满足 $P > 0$ 且 $\mathbb{E}P = 1$。

(2) 给定保费的价格强度 P，保险公司的目标是选择最优的保险赔偿 I^* 来最大化终端财富和保险净收益的函数

$$\max_I \ \mathbb{E}W_i - \frac{\gamma_1}{2}Var(W_i) + k\mathbb{E}\left(g\left(I - \Pi(I)\right)\right),$$

之后，给定求得的最优解 I^*，再保险公司通过最大化其终端财富的期望效用求解最优的再保险价格强度

$$\max_P \ \mathbb{E}W_r. \tag{6}$$

1 保证当 $x = I - \Pi(I)$ 时，函数 g 是严格递增的。

DOI: 10.12677/aam.2024.133086

3. 第一个模型求解

本节计算单期 Stackelberg 博弈的最优解，求解过程分为两个步骤。

第一步，给定期望保费原则，最大化保险公司终端财富的均值-方差函数以及保险净收益的二次函数，计算得到最优保险赔偿的显式表达式。

第二步，给定这个最优赔偿，最大化再保险公司的均值-方差函数，求解再保险公司的最优保费的参数。下面将基于这两个步骤进行求解。

3.1. 保险公司问题及其求解

定理1. 给定 θ，最大化保险公司的目标函数，推导出最优的赔偿函数 $I^* = I^*(\cdot;\theta)$ 满足如下式子

$$I^*(x;\theta) = \frac{(\gamma_1 x - \lambda^*)_+}{\gamma_1 + 2ck} \wedge x, \tag{7}$$

其中 $\lambda^* > 0$ 是下面方程 *(8)* 的唯一解

$$\theta(1+k) = \lambda - \gamma_1 \int_0^{\frac{\lambda}{\gamma_1}} S_X(x)dx - \frac{2ck\gamma_1\theta^2}{\gamma_1 + 2ck} \int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} S_X(x)dx. \tag{8}$$

证明 首先，展开保险公司求解的目标函数公式 $\mathbb{E}W_i - \frac{\gamma_1}{2}Var(W_i) + k\mathbb{E}\left(g\left(I - \Pi(I)\right)\right)$，其中 W_i 由方程 (1) 给出；$g\left(I - \Pi(I)\right)$ 由方程 (3) 给出。目标函数可以化简为

$$\begin{aligned} \max_I\, & w_i - \mathbb{E}X - \frac{\gamma_1}{2}\mathbb{E}(X^2) + \frac{\gamma_1}{2}(\mathbb{E}X)^2 - \theta(1+k)\mathbb{E}I - \left(\frac{\gamma_1}{2} + ck\right)\mathbb{E}(I^2) \\ & + \left(\frac{\gamma_1}{2} + ck(1-\theta^2)\right)(\mathbb{E}I)^2 + \gamma_1\mathbb{E}(XI) - \gamma_1\mathbb{E}X\mathbb{E}I. \end{aligned} \tag{9}$$

之后，将方程 (9) 等价 $f(I)$，其表达式为

$$f(I) = -[\theta(1+k) + \gamma_1\mathbb{E}X]\mathbb{E}I - \left(\frac{\gamma_1}{2} + ck\right)\mathbb{E}(I^2) + [\frac{\gamma_1}{2} + ck(1-\theta^2)](\mathbb{E}I)^2 + \gamma_1\mathbb{E}(XI). \tag{10}$$

为了最大化 f，假设 $\mathbb{E}I = m \in [0,\mu]$，其中 $\mu = \mathbb{E}X$。进一步，得到 $f(I) = -(\frac{\gamma_1}{2} + ck)\mathbb{E}(I^2) + \gamma_1\mathbb{E}(XI)$。这样，就将原问题转化为求解 $f(I)$ 的最优解的优化问题，使用拉格朗日法对这个新的优化方程进行求解。

引入拉格朗日乘子 $\lambda \in \mathbb{R}$，得到一个新函数 $L(I)$，其表达式为

$$L(I) = \int_0^{\infty} \Big(- \left(\frac{\gamma_1}{2} + ck\right) I^2(x) + \gamma_1 x I(x) - \lambda I(x)\Big) dF_X(x) + \lambda m.$$

对 $I(x)$ 求导得到最优赔偿 I^*，其表达式为

$$I^*(x;\lambda) = \frac{(\gamma_1 x - \lambda)_+}{\gamma_1 + 2ck} \wedge x.$$

同时，m 的表达式写作

$$m = \mathbb{E}\left(\frac{(\gamma_1 X - \lambda)_+}{\gamma_1 + 2ck} \wedge X\right). \tag{11}$$

接下来证明给定 $m \in [0, \mu]$，存在唯一的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得方程 (11) 成立。

为了后续计算方便，将方程 (11) 写成如下积分形式

$$m = \begin{cases} \int_0^{-\frac{\lambda}{2ck}} S_X(x)dx + \frac{\gamma_1}{\gamma_1+2ck}\int_{-\frac{\lambda}{2ck}}^{\infty} S_X(x)dx, & \lambda \le 0, \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_1+2ck}\int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} S_X(x)dx, & \lambda > 0. \end{cases}$$

上式对 λ 求导，得到

$$m' = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma_1+2ck} S_X(-\frac{\lambda}{2ck}), & \lambda \le 0, \\ -\frac{1}{\gamma_1+2ck} S_X(\frac{\lambda}{\gamma_1}), & \lambda > 0. \end{cases} \tag{12}$$

从方程 (12) 可知，当 λ 从 $-\infty$ 增加到 ∞ 时，m 从 μ 减小到 0。这说明 m 对应着唯一的解 λ。

因此，将最大化方程 (4) 来寻找 $I(x)$ 的问题转化为寻找 m 的最大值，也就是说，寻找最优的 λ 来最大化方程 (10) 中的 f。那么，通过用 λ 来替换 $I(x)$，将 f 写成关于 λ 的公式

$$f(\lambda) = -\big(\theta(1+k) + \gamma_1 \mathbb{E}X\big) g_1(\lambda) - \left(\frac{\gamma_1}{2} + ck\right) g_2(\lambda) + \left(\frac{\gamma_1}{2} + ck(1-\theta^2)\right)(g_1(\lambda))^2 + \gamma_1 g_3(\lambda),$$

其中

$$g_1(\lambda) = \mathbb{E}I = m,$$

$$g_2(\lambda) = \mathbb{E}(I^2) = \begin{cases} 2\int_0^{-\frac{\lambda}{2ck}} xS_X(x)dx + \frac{2\gamma_1}{(\gamma_1+2ck)^2}\int_{-\frac{\lambda}{2ck}}^{\infty} (\gamma_1 x - \lambda) S_X(x)dx, & \lambda \le 0, \\ \frac{2\gamma_1}{(\gamma_1+2ck)^2}\int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} (\gamma_1 x - \lambda) S_X(x)dx, & \lambda > 0, \end{cases}$$

$$g_3(\lambda) = \mathbb{E}(XI) = \begin{cases} 2\int_0^{-\frac{\lambda}{2ck}} xS_X(x)dx + \frac{1}{\gamma_1+2ck}\int_{-\frac{\lambda}{2ck}}^{\infty} (2\gamma_1 x - \lambda) S_X(x)dx, & \lambda \le 0, \\ \frac{1}{\gamma_1+2ck}\int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} (2\gamma_1 x - \lambda) S_X(x)dx, & \lambda > 0. \end{cases}$$

分别对 g_1，g_2 和 g_3 求导，得到

$$g_1'(\lambda) = m' = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma_1+2ck} S_X(-\frac{\lambda}{2ck}), & \lambda \le 0, \\ -\frac{1}{\gamma_1+2ck} S_X(\frac{\lambda}{\gamma_1}), & \lambda > 0, \end{cases}$$

$$g_2'(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{ck(\gamma_1+2ck)} S_X(-\frac{\lambda}{2ck}) - \frac{2\gamma_1}{(\gamma_1+2ck)^2}\int_{-\frac{\lambda}{2ck}}^{\infty} S_X(x)dx, & \lambda \le 0, \\ -\frac{2\gamma_1}{(\gamma_1+2ck)^2}\int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} S_X(x)dx, & \lambda > 0, \end{cases}$$

$$g_3'(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2ck(\gamma_1+2ck)} S_X(-\frac{\lambda}{2ck}) - \frac{1}{\gamma_1+2ck}\int_{-\frac{\lambda}{2ck}}^{\infty} S_X(x)dx, & \lambda \le 0, \\ -\frac{\lambda}{\gamma_1(\gamma_1+2ck)} S_X(\frac{\lambda}{\gamma_1}) - \frac{1}{\gamma_1+2ck}\int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} S_X(x)dx, & \lambda > 0. \end{cases}$$

当 $\lambda \le 0$ 时，对 λ 求导，有

$$
\begin{aligned}
f'(\lambda) &= -\big(\theta(1+k)+\gamma_1\mathbb{E}X\big)g_1'(\lambda) - (\frac{\gamma_1}{2}+ck)g_2'(\lambda) + [\gamma_1+2ck(1-\theta^2)]g_1(\lambda)g_1'(\lambda)+\gamma_1 g_3'(\lambda)\\
&= \frac{S_X(-\frac{\lambda}{2ck})}{\gamma_1+2ck}\left(\theta(1+k)-\lambda-2ck(1-\theta^2)\int_0^{-\frac{\lambda}{2ck}} S_X(x)dx + \frac{2ck\gamma_1\theta^2}{\gamma_1+2ck}\int_{-\frac{\lambda}{2ck}}^{\infty} S_X(x)dx\right).
\end{aligned}
$$

当 λ 从 $-\infty$ 增加到 0 时，上式括号内的值从 $\theta(1+k)+\frac{2ck\gamma_1\theta^2}{\gamma_1+2ck}\mu$ 增加到 ∞。因此，对 $\lambda \le 0$，总有$f'(\lambda) > 0$。

当 $\lambda > 0$ 时

$$
\begin{aligned}
f'(\lambda) &= -\big(\theta(1+k)+\gamma_1\mathbb{E}X\big)g_1'(\lambda) - \left(\frac{\gamma_1}{2}+ck\right)g_2'(\lambda) + \big(\gamma_1+2ck(1-\theta^2)\big)g_1(\lambda)g_1'(\lambda)+\gamma_1 g_3'(\lambda)\\
&= \frac{S_X(\frac{\lambda}{\gamma_1})}{\gamma_1+2ck}\left(\theta(1+k)-\lambda+\gamma_1\int_0^{\frac{\lambda}{\gamma_1}} S_X(x)dx + \frac{2ck\gamma_1\theta^2}{\gamma_1+2ck}\int_{\frac{\lambda}{\gamma_1}}^{\infty} S_X(x)dx\right).
\end{aligned}
$$

从上述方程的表达式可以看到，当 λ 从 0 增加到 ∞ 时，上式括号内的值先增加到一个正值，后减小到 $-\infty$。那么，存在唯一的 λ^* 使得 $f(\lambda)$ 达到最优。λ^* 满足以下方程

$$
\theta(1+k) = \lambda^* - \gamma_1\int_0^{\frac{\lambda^*}{\gamma_1}} S_X(x)dx - \frac{2ck\gamma_1\theta^2}{\gamma_1+2ck}\int_{\frac{\lambda^*}{\gamma_1}}^{\infty} S_X(x)dx.
$$

□

定理2. 给定 θ，最优赔偿函数 $I^* = I^*(\cdot;d)$ 的表达式为

$$
I^*(x;d) = \alpha(x-d)_+, \tag{13}
$$

其中 $d = \frac{\lambda^*}{\gamma_1} > 0$ 是下面方程的唯一解

$$
\theta(1+k) = \gamma_1\int_0^d F_X(x)dx - 2\alpha ck\theta^2\int_d^{\infty} S_X(x)dx, \tag{14}
$$

且有

$$
\alpha = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+2ck}. \tag{15}
$$

证明 根据方程 (7) 中 $I^*(x;d)$ 的表达式，将其化简为方程 (13) 的形式。同时，计算得到方程 (15) 中的 α 以及 $d=\frac{\lambda^*}{\gamma_1}$。 □

注1：从方程 (13) 最优解的表达形式看出这是一个超额损失再保险，包括免赔额 d 和一个比例再保险 α. 当保险公司的风险厌恶系数增加时，免赔额 d 会降低，而再保险的比例会增加。

注2：狭窄框架系数对再保险比例的影响很明显。当狭窄程度增加时，保险公司的投保比例会减少，当 k 趋近于 ∞，保险作为对冲财富的作用完全被忽略，购买保险被看作是与再保险公司的赌博，这时保险公司不会再购买保险。这也解释了保险市场上投保比例低的原因。

3.2. 再保险公司问题及其求解

为了解决 Stackelberg 博弈的另一个子问题，也就是再保险公司的问题，将方程 (5) 中的目标函数 $\mathbb{E}W_r - \frac{\gamma_2}{2}Var(W_r)$ 展开，其中 W_r 由方程 (2) 给出

$$\mathbb{E}W_r - \frac{\gamma_2}{2}Var(W_r) = w_r + \alpha\theta\mathbb{E}(X-d)_+ - \frac{\gamma_2}{2}\alpha^2 Var(X-d)_+. \tag{16}$$

因此，最大化方程 (16) 等价于最大化 $g(\theta, d)$

$$g(\theta, d) = \theta\mathbb{E}(X-d)_+ - \frac{\gamma_2}{2}\alpha Var(X-d)_+. \tag{17}$$

根据方程 (14) 中 θ 的表达式计算

$$\theta^* = \frac{\sqrt{(1+k)^2 + 8c\alpha\gamma_1 k\mathbb{E}(X-d)_+(d-\mathbb{E}(X\wedge d))} - (1+k)}{4c\alpha k\mathbb{E}(X-d)_+}.$$

因此，将方程 (17) 重新写作

$$g(d) = \frac{\sqrt{(1+k)^2 + 8c\alpha\gamma_1 k\mathbb{E}(X-d)_+(d-\mathbb{E}(X\wedge d))} - (1+k)}{4c\alpha k} - \frac{\gamma_2}{2}\alpha Var(X-d)_+.$$

对 $g(d)$ 求导得到

$$\begin{aligned} g'(d) = & \frac{\gamma_1\left[(\mathbb{E}(X\wedge d)-d)S_X(d) + \mathbb{E}(X-d)_+(1-S_X(d))\right]}{\sqrt{(1+k)^2 + 8c\alpha\gamma_1 k\mathbb{E}(X-d)_+(d-\mathbb{E}(X\wedge d))}} \\ & + \alpha\gamma_2\mathbb{E}(X-d)_+(1-S_X(d)). \end{aligned} \tag{18}$$

此时，最优免赔额 d^* 是使方程 (18)为零的解。

本小节从理论上分析了保费最优参数的情况，下面将用两个数值例子对最优免赔额 d^* 进行分析。

3.3 数值计算 为了对上面的理论推导进行更深入的分析，本小节将研究两个连续型数值算例。在本节，基本参数的选择：$w_i = 10, c = 0.01, \gamma_1 = 0.25, \gamma_2 = 0.2, k = 3.4, \alpha = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 2ck} = 0.786$.

(1) 假设损失变量 X 服从一个截断的指数分布，则生存函数表示为

$$S_x(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0, 10], \\ 1 - e^{-10}, & x = 0. \end{cases}$$

根据生存函数的表达式，计算下面两个公式

$$\mathbb{E}(X\wedge d) - d = \int_0^d S_X(x)dx - d = 1 - e^{-d} - d,$$

$$\mathbb{E}(X-d)_+ = \int_d^{10} S_X(x)dx = e^{-d} - e^{-10}.$$

因此，将上述公式代入方程 (18)

$$g'(d)=\frac{\gamma_1\left[(1-e^{-d}-d)e^{-d}+(e^{-d}-e^{-10})(1-e^{-d})\right]}{\sqrt{(1+k)^2+8c\alpha\gamma_1 k(e^{-d}-e^{-10})(d+e^{-d}-1)}}+\alpha\gamma_2\left(e^{-d}-e^{-10}\right)\left(1-e^{-d}\right).$$

d^* 是下面方程的解

$$\frac{0.25\left[(1-e^{-d}-d)e^{-d}+(e^{-d}-e^{-10})(1-e^{-d})\right]}{\sqrt{19.36+0.0534(e^{-d}-e^{-10})(1-e^{-d})}}+0.1572\left(e^{-d}-e^{-10}\right)\left(1-e^{-d}\right)=0. \tag{19}$$

求解方程 (19) 得到 $d^*=4.70$.

(2) 假设损失变量 X 服从一个截断且移位的 Pareto 分布，生存函数为

$$S_X(x)=\left\{\frac{121}{120}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{120}\right\}\mathbb{I}_{x\in[0,10]}.$$

首先计算

$$\mathbb{E}(X\wedge d)-d=\int_0^d S_X(x)dx-d=\frac{121}{120}\frac{d}{d+1}-\frac{121}{120}d,$$

$$\mathbb{E}(X-d)_+=\int_d^{10}S_X(x)dx=\frac{121}{120}\frac{1}{d+1}+\frac{d}{120}-\frac{21}{120}.$$

根据上述计算结果，得到

$$\begin{aligned}g'(d)=&\frac{0.25\left[(\frac{d}{d+1}-d)(\frac{121}{120}\frac{1}{(d+1)^2}-\frac{1}{120})+(\frac{121}{120}\frac{1}{d+1}+\frac{d}{120}-\frac{21}{120})(1-\frac{1}{(d+1)^2})\right]}{\sqrt{19.36+0.0534(\frac{121}{120}\frac{1}{d+1}+\frac{d}{120}-\frac{21}{120})(\frac{121}{120}d-\frac{121}{120}\frac{d}{d+1})}}\\&+0.1572\left(\frac{121}{120}\frac{1}{d+1}+\frac{d}{120}-\frac{21}{120}\right)\left(1-\frac{1}{(d+1)^2}\right).\end{aligned}$$

令 $g'(d)=0$，计算得到 $d^*=6.31$。

4. 第二个模型求解

本节计算第二项研究内容的 Stackelberg 博弈最优解。

第一步求解中，给定保费原则中的价格强度变量 P，保险公司的目标函数与第一项内容的目标相同，即，最大化其终端财富的均值-方差函数以及保险净收益的二次函数，计算得到最优保险赔偿。

第二步，给定这个求得的最优赔偿，最大化再保险公司的期望效用函数，求解再保险公司最优保费的价格强度。下面基于这两个步骤进行求解。

定理3. *在均值-方差原则下考虑保险公司面对的问题，给定保费的价格强度变量 P，最大化保险公*

司的目标函数，得到保险公司保险赔偿的最优解

$$\begin{aligned} I^* &= q_1X + q_2P + n \\ &= \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}X + \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}\mu - \frac{ckq_1^2\sigma_X^2}{q_3-(1+k)} + n. \end{aligned} \tag{20}$$

在期望效用最大化准则下考虑再保险公司的目标，计算得到保费价格强度的最优解

$$P^* = \frac{\sigma_P}{\sigma_X}(X-\mu)+1 = \frac{q_3-(1+k)}{2ckq_1\sigma_X^2}(X-\mu)+1, \tag{21}$$

其中，q_1, q_2 和 q_3 的表达式分别由方程 *(23)*，*(24)* 和 *(27)* 给出。μ 和 σ_X 分别代表损失 X 的均值和标准差。

证明 保险公司的目标函数是最大化其终端财富的均值-方差函数和保险净收益的二次效用函数，通过展开 $\mathbb{E}W_i - \frac{\gamma_1}{2}Var(W_i) + k\mathbb{E}\left(g\left(I-\Pi(I)\right)\right)$，其中 W_i 和 $g\left(I-\Pi(I)\right)$ 由方程 (1) 和方程 (3) 给出。保险公司的目标决策等价为

$$\begin{aligned} \max_I\ &(1+k)\mathbb{E}I - (1+k)\mathbb{E}(PI) - (\frac{\gamma_1}{2}+ck)\mathbb{E}(I^2) + \frac{\gamma_1}{2}(\mathbb{E}I)^2 + \gamma_1\mathbb{E}(XI) - \gamma_1\mathbb{E}X\mathbb{E}I \\ &- ck[\mathbb{E}(PI)]^2 + 2ck\mathbb{E}I\mathbb{E}(PI). \end{aligned}$$

假设 I 最大化上述目标函数，引入随机变量 Q。设 $I_t = I + tQ$，其中 t 表示为一个实数，将得到的函数定义为 $g(t)$

$$\begin{aligned} g(t) =&(1+k)\mathbb{E}(I_t) - (1+k)\mathbb{E}(PI_t) - (\frac{\gamma_1}{2}+ck)\mathbb{E}(I_t^2) + \frac{\gamma_1}{2}[\mathbb{E}(I_t)]^2 + \gamma_1\mathbb{E}(XI_t) - \gamma_1\mathbb{E}X\mathbb{E}(I_t) \\ &- ck[\mathbb{E}(PI_t)]^2 + 2ck\mathbb{E}(I_t)\mathbb{E}(PI_t). \end{aligned} \tag{22}$$

$g(t)$ 在 $t=0$ 时取得最大值，即 $g'(0)=0$。对方程 (22) 关于 t 求导，得到一阶导数方程 $g'(t)$

$$\begin{aligned} g'(t) =&(1+k)\mathbb{E}Q - (1+k)\mathbb{E}(PQ) - (\gamma_1+2ck)\mathbb{E}(QI_t) + \gamma_1\mathbb{E}(I_t)\mathbb{E}Q + \gamma_1\mathbb{E}(XQ) - \gamma_1\mathbb{E}X\mathbb{E}Q \\ &- 2ck\mathbb{E}(PI_t)\mathbb{E}(PQ) + 2ck\mathbb{E}Q\mathbb{E}(PI_t) + 2ck\mathbb{E}(I_t)\mathbb{E}(PQ). \end{aligned}$$

根据关系式 $g'(0)=0$，得到下述条件

$$\begin{gathered} \mathbb{E}\left\{Q\left[(1+k) - (1+k)P - (\gamma_1+2ck)I + \gamma_1\mathbb{E}I + \gamma_1X - \gamma_1\mathbb{E}X\right.\right. \\ \left.\left.-2ckP\mathbb{E}(PI) + 2ck\mathbb{E}(PI) + 2ckP\mathbb{E}I\right]\right\} = 0. \end{gathered}$$

由于 Q 是任意的随机变量，中括号内的值为 0，化简得到

$$I^* = q_1X + q_2P + n,$$

其中，n 为任意常数。q_1 和 q_2 的表达式为

$$q_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 2ck}, \tag{23}$$

$$q_2 = \frac{2ckq_1\mu - (1+k) - 2ckq_1\mathbb{E}(PX)}{\gamma_1 + 2ck\mathbb{E}(P^2)}. \tag{24}$$

接下来讨论再保险公司面对的问题。

将再保险公司终端财富的期望效用函数化简，方程 (6) 等价为 $\max\limits_{P}[-\mathbb{E}I - \Pi(I)]$，将 I^* 的表达式代入该目标函数中，再保险公司的目标函数等价为最小化

$$\max_{P}\ -q_1\mathbb{E}X + q_1\mathbb{E}(PX) + q_2\mathbb{E}(P^2) - q_2. \tag{25}$$

根据 (24) 中 q_2 的表达式，得到下述关系式

$$q_1\mathbb{E}X - q_1\mathbb{E}(PX) = \frac{(\gamma_1 + 2ck\mathbb{E}(P^2))q_2 + k + 1}{2ck}.$$

代入到方程 (25)，目标函数等价为

$$\max_{P}\ -(1 + \frac{\gamma_1}{2ck})q_2 - \frac{1+k}{2ck}.$$

因此，再保险公司的目标函数等价为最小化 q_2

$$\min_{\rho,\sigma_P} q_2 = \min_{\rho,\sigma_P} \frac{-2ckq_1\rho\sigma_X\sigma_P - (1+k)}{2ck\sigma_P^2 + 2ck + \gamma_1},$$

其中，ρ 是变量 X 和 P 的相关系数，σ_X 和 σ_P 分别是 X 和 P 的标准差。

若要最小化该目标函数，显然有 $\rho = 1$. 此时，目标函数等价为

$$\max_{\sigma_P} \frac{2ckq_1\sigma_X\sigma_P + k + 1}{2ck\sigma_P^2 + 2ck + \gamma_1}.$$

对目标函数求导，计算 σ_P 的最优值

$$\sigma_P = \frac{\sqrt{(1+k)^2 + 2ckq_1^2(2ck+\gamma_i)\sigma_X^2} - (1+k)}{2ckq_1\sigma_X}. \tag{26}$$

由于相关系数 $\rho = 1$，假设 P 和 X 满足关系式 $P = aX + b$。结合下面两个方程

$$\begin{cases} \mathbb{E}(P) = 1, \\ Var(P) = \sigma_P^2. \end{cases}$$

计算系数 a, b 的值

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sigma_P}{\sigma_X}, \\ b = 1 - \dfrac{\sigma_P}{\sigma_X}\mu. \end{cases}$$

那么，得到 P 的最优解

$$P = \frac{\sigma_P}{\sigma_X}(X-\mu) + 1 = 1 + \frac{q_3 - (1+k)}{2ckq_1\sigma_X^2}(X-\mu),$$

其中，q_3 的表达式为

$$q_3 = \sqrt{(1+k)^2 + 2ckq_1^2(2ck+\gamma_1)\sigma_X^2}. \tag{27}$$

此时，化简方程 (24)，将 q_2 的表达式重新写作

$$q_2 = -\frac{2ckq_1\sigma_X\sigma_P + k + 1}{2ck\sigma_P^2 + \gamma_1 + 2ck}.$$

根据方程 (26) 中 σ_P 的表达式，将 q_2 写作

$$q_2 = -\frac{ckq_1^2\sigma_X^2}{q_3 - (1+k)}.$$

此时，保险公司的最优赔偿 I^* 的表达式

$$I^* = \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}X + \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}\mu - \frac{ckq_1^2\sigma_X^2}{q_3-(1+k)} + n.$$

□

定理4. 在变量 X 的标准差 σ_X 足够小的情况下，使用 *Taylor* 展开式，分别得到最优保险赔偿和保费价格强度的近似解

$$I^* \approx \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}X + \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}\mu - \frac{1+k}{\gamma_1+2ck} + n,$$

$$P^* \approx \frac{\gamma_1}{2(1+k)}(X-\mu) + 1.$$

证明 假设 σ_X 是一个足够小的数，根据 Taylor 展开将 σ_P 近似为

$$\sigma_P \approx \frac{\gamma_1\sigma_X}{2(1+k)},$$

得到最优价格强度 P^* 的近似值

$$P^* \approx 1 + \frac{\gamma_1}{2(1+k)}(X-\mu).$$

此时，q_2 近似为

$$q_2 \approx -\frac{1+k}{\gamma_1+2ck},$$

最优赔偿 I^* 的近似值

$$I^* \approx \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}X + \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1+2ck)}\mu - \frac{1+k}{\gamma_1+2ck} + n.$$

□

定理5. 给定最优赔偿和最优价格强度的表达式，再保险公司的最优值函数

$$\mathbb{E}(W_r^*) = w_r + \left(\frac{q_3-(1+k)}{4ck} - \frac{2ckq_1^2}{q_3-(1+k)}\right)\sigma_X^2.$$

同时，保险公司的效用前沿表示为

$$\begin{aligned}&(\mathbb{E}(W_i^*), Var(W_i^*))\\&= \left(w_i - \mu + \left(\frac{2ckq_1^2}{q_3-(1+k)} - \frac{q_3-(1+k)}{4ck}\right)\sigma_X^2, \left(\frac{2ck}{\gamma_1+2ck} + \frac{\gamma_1^2}{4(\gamma_1+2ck)^2}\right)\sigma_X^2\right),\end{aligned}$$

其中 q_3 由方程 *(27)* 给出.

证明 根据方程 (20) 中 I^* 的表达式和方程 (21) 中 P^* 的表达式，计算得到再保险公司的最优值函数

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_r^*) &= w_r - \mathbb{E}I^* + \Pi(I^*)\\&= w_r + \left(\frac{q_3-(1+k)}{4ck} - \frac{2ckq_1^2}{q_3-(1+k)}\right)\sigma_X^2.\end{aligned}$$

同时，计算方程 $\mathbb{E}(W_i^*)$，其中 W_i 由方程 (1) 给出，得到保险公司终端财富的相应期望

$$\mathbb{E}(W_i^*) = w_i - \mu + \left(\frac{2ckq_1^2}{q_3-(1+k)} - \frac{q_3-(1+k)}{4ck}\right)\sigma_X^2.$$

通过展开 $Var(W_i^*)$，将方程化简为 $\sigma_X^2 + \mathbb{E}(I^*)^2 - (\mathbb{E}I^*)^2 - 2\mathbb{E}(XI^*) + 2\mu\mathbb{E}I^*$，计算得到

$$\mathbb{E}(I^*)^2 - (\mathbb{E}I^*)^2 = \frac{\gamma_1^2\sigma_X^2}{4(\gamma_1+2ck)^2},$$

得到保险公司终端财富的相应方差

$$Var(W_i^*) = \left(\frac{2ck}{\gamma_1+2ck} + \frac{\gamma_1^2}{4(\gamma_1+2ck)^2}\right)\sigma_X^2.$$

□

5. 结论

本文在保险公司和再保险公司双方的角度上考虑最优再保险的问题，基于狭窄框架理论，得到了 Stackelberg 博弈模型的一对最优解。在第一项研究内容中，首先最大化保险公司终端财富的均值-方差函数以及保险净收益的二次函数，得到了保险公司最优赔偿的显式表达式，并证明了解的唯一性。从表达式看出，最优保险赔偿是由免赔额和一个保险比例构成的。然后最大化再保险公司终端财富的均值-方差准则，得到了最优免赔额所满足的方程。在第二项研究内容中，采用 $\Pi(I) = \mathbb{E}(PI)$ 的保费形式，计算得到了最优赔偿和再保费价格强度的解。进一步，通过 Taylor 展开式得到最优赔偿和再保费价格强度的近似解。

参考文献

[1] Borch, K.H. (1960) An Attempt to Determine the Optimum Amount of Stop Loss Reinsurance. *Transaction of the 16th International Congress of Actuaries*, **35**, 597-610.

[2] Kaluszka, M. (2001) Optimal Reinsurance under Mean-Variance Premium Principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, **28**, 61-67. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(00)00066-4

[3] Young, V.R. (1999) Optimal Insurance under Wang's Premium Principle. *Insurance: Mathematics and Economics*, **25**, 109-122. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(99)00012-8

[4] Kaluszka, M. (2005) Optimal Reinsurance under Convex Principles of Premium Calculation. *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**, 375-398. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.02.004

[5] Borch, K. (1969) The Optimal Reinsurance Treaty. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **5**, 293-297. https://doi.org/10.1017/S051503610000814X

[6] Cai, J., Lemieux, C. and Liu, F. (2016) Optimal Reinsurance from the Perspectives of Both an Insurer and a Reinsurer. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **46**, 815-849. https://doi.org/10.1017/asb.2015.23

[7] Von Stackelberg, H. (2010) Market Structure and Equilibrium. Springer Science and Business Media, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12586-7

[8] Simaan, M. and Cruz Jr., J.B. (1973) On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **11**, 533-555. https://doi.org/10.1007/BF00935665

[9] Chan, F.Y. and Gerber, H.U. (1985) The Reinsurer's Monopoly and the Bowley Solution. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **15**, 141-148. https://doi.org/10.2143/AST.15.2.2015025

[10] Cheung, K.C., Yam, S.C.P. and Zhang, Y. (2019) Risk-Adjusted Bowley Reinsurance under Distorted Probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, **86**, 64-72. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.02.006

[11] Chi, Y., Tan, K.S. and Zhuang, S.C. (2020) A Bowley Solution with Limited Ceded Risk for a Monopolistic Reinsurer. *Insurance: Mathematics and Economics*, **91**, 188-201. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.02.002

[12] Boonen, T.J, Cheung, K.C. and Zhang, Y. (2021) Bowley Reinsurance with Asymmetric Information on the Insurer's Risk Preferences. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2021**, 623-644. https://doi.org/10.1080/03461238.2020.1867631

[13] Li, D. and Young, V.R. (2021) Bowley Solution of a Mean-Variance Game in Insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, **98**, 35-43. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2021.01.009

[14] Heaton, J. and Lucas, D. (2000) Portfolio Choice in the Presence of Background Risk. *The Economic Journal*, **110**, 1-26. https://doi.org/10.1111/1468-0297.00488

[15] Curcuru, S., Heaton, J., Lucas, D. and Moore, D. (2010) Heterogeneity and Portfolio Choice: Theory and Evidence. In: A¨**i**t-Sahalia, Y. and Hansen, L.P., Eds., *Handbook of Financial Econometrics: Tools and Techniques*, North Holland, Amsterdam, 337-382. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-50897-3.50009-2

[16] Barberis, N. and Huang, M. (2009) Preferences with Frames: A New Utility Specification That Allows for the Framing of Risks. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **33**, 1555-1576. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2009.01.009

[17] Kahneman, D. and Lovallo, D. (1993) Timid Choices and Bold Forecasts: A Cognitive Perspective on Risk Taking. *Management Science*, **39**, 17-31. https://doi.org/10.1287/mnsc.39.1.17

[18] Kahneman, D. (2003) Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics. *American Economic Review*, **93**, 1449-1475. https://doi.org/10.1257/000282803322655392

[19] Barberis, N., Huang, M. and Santos, T. (2001) Prospect Theory and Asset Prices. *The Quarterly Journal of Economics*, **116**, 1-53. https://doi.org/10.1162/003355301556310

[20] Gottlieb, D. and Mitchell, O.S. (2020) Narrow Framing and Long-Term Care Insurance. *Journal of Risk and Insurance*, **87**, 861-893. https://doi.org/10.1111/jori.12290

[21] Zheng, J. (2020) Optimal Insurance Design under Narrow Framing. *Journal of Economic Behavior and Organization*, **180**, 596-607. https://doi.org/10.1016/j.jebo.2020.05.020

[22] Behaghel, L. and Blau, D.M. (2012) Framing Social Security Reform: Behavioral Responses to Changes in the Full Retirement Age. *American Economic Journal: Economic Policy*, **4**, 41-67. https://doi.org/10.1257/pol.4.4.41

[23] Chi, Y., Zheng, J. and Zhuang, S. (2022) S-Shaped Narrow Framing, Skewness and the Demand for Insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, **105**, 279-292. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2022.04.005