Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(3), 949-955
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133089

Hans汉斯

关于不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=17y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的正整数解研究

卓国梁

西南大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2024年2月19日；录用日期：2024年3月12日；发布日期：2024年3月20日

摘　要

本文主要通过运用Pell方程，递归序列，平方剩余等方法，证明了不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=17y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解。

关键词

不定方程，Pell方程，递归序列，平方剩余

A Research of the Positive Integer Solution of the Diophantine Equation $6x(x+1)(x+2)(x+3)=17y(y+1)(y+2)(y+3)$

Guoliang Zhuo

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: Feb. 19th, 2024; accepted: Mar. 12th, 2024; published: Mar. 20th, 2024

Abstract

In this paper, with the methods of Pell equation, recurrence sequence, quadratic remainder, we have shown that the Diophantine equation $6x(x+1)(x+2)(x+3)=17y(y+1)(y+2)(y+3)$ has no positive integer solution.

文章引用: 卓国梁. 关于不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=17y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的正整数解研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 949-955. DOI: 10.12677/aam.2024.133089

Keywords

Diophantine Equation, Pell Equation, Recurrence Sequence, Quadratic Remainder

1. 引言

设 p,q 为给定的正整数，并且满足 $(p,q)=1$，对于不定方程

$$px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$$

的正整数解研究已经有了诸多进展。对于 $p=1$ 的情形，Chon [1]在 1971 年证明了当 $q=2$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(5,4)$；Ponnudurai [2]在 1975 年证明了当 $q=3$ 时，上述不定方程仅有两组正整数解 $(x,y)=(3,2),(7,5)$；宣体佐[3]在 1982 年证明了当 $q=5$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(2,1)$；Luo [4]在 2001 年证明了当 $q=6$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(7,4)$。对于 $p\neq 1$ 的情形，曹珍富[5]在 1982 年证明了当 $(p,q)=(3,2)$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(8,9)$；罗明，朱德辉和马芙蓉[6]在 2009 年证明了当 $(p,q)=(3,5)$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(7,6)$。

实际上，近年来仍有许多学者关注上述不定方程的正整数解问题并给出了许多结论，特别关于 $p\neq 1$ 的情形。胡邦群和罗明[7]在 2017 年证明了当 $(p,q)=(6,7)$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(25,24)$，以及当 $(p,q)=(6,11)$ 和 $(p,q)=(5,11)$ 时，上述不定方程均无正整数解；李妮[8]在 2017 年当 $(p,q)=(5,14)$ 时，上述不定方程无正整数解；杨晓柳和牟全武[9]在 2018 年证明了当 $(p,q)=(5,18)$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(6,4)$；林丽娟[10]在 2021 年证明了当 $(p,q)=(7,5)$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(10,11)$；王润青[11]在 2021 年证明了当 $(p,q)=(6,13)$ 时，上述不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(10,8)$。

不定方程求解的困难性导致有相当一部分不定方程的正整数解是未知的，特别是当 $(p,q)=(6,17)$ 时，上述方程的求正整数解问题仍未解决。本文将证明 $(p,q)=(6,17)$ 时，即不定方程

$$6x(x+1)(x+2)(x+3)=17y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

无正整数解。本文的主要结果进一步完善了当 $1<p,q<50$ 并且 p 和 q 互素时，不定方程求正整数解的相关结论。

2. 预备知识

首先，我们将方程(1)化简为：

$$\left[6\left(x^2+3x+1\right)\right]^2-102\left(y^2+3y+1\right)^2=-66,$$

此时令 $X=6\left(x^2+3x+1\right)$，$Y=y^2+3y+1$，方程(1)就转化为 $X^2-102Y^2=-66$。

参照文[12]可知，方程 $X^2-102Y^2=-66$ 的全部整数解可由以下两个结合类(非歧类)给出

$$X+Y\sqrt{102}=\pm\left(x_n+y_n\sqrt{102}\right)=\pm\left(6+\sqrt{102}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{102}\right)=\pm\left(6+\sqrt{102}\right)\left(101+10\sqrt{102}\right)^n,$$

$$X+Y\sqrt{102}=\pm\left(\overline{x_n}+\overline{y_n}\sqrt{102}\right)=\pm\left(-6+\sqrt{102}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{102}\right)=\pm\left(-6+\sqrt{102}\right)\left(101+10\sqrt{102}\right)^n,$$

其中 $\pm 6+\sqrt{102}$ 是方程 $X^2-102Y^2=-66$ 的相应结合类的基本解，$101+10\sqrt{102}$ 是 Pell 方程 $u^2-102v^2=1$ 的基本解。

由于上述结合类 $\pm\left(x_n+y_n\sqrt{102}\right)$ 与 $\pm\left(\overline{x_n}+\overline{y_n}\sqrt{102}\right)$ 是共轭的，即 $\overline{y_n}=y_{-n}$。因此，如果 y 是方程(1)的一个整数解，则应满足 $y^2+3y+1=\pm y_n$，其中 $n\in\mathbb{Z}$，即

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5,\ n\in\mathbb{Z}。\tag{2}$$

显然(2)式可以写成以下两个等式：

$$(2y+3)^2=4y_n+5,\ n\in\mathbb{Z}；\tag{3}$$

$$(2y+3)^2=-4y_n+5,\ n\in\mathbb{Z}。\tag{4}$$

下面我们将证明当且仅当 $n=0,-1$ 时(3)式成立，当且仅当 $n=0$ 时(4)式成立。从而给出不定方程(1)的全部整数解，并证明该不定方程无正整数解。

根据上面所给出的结合类的关系式，不难推导出下列关系式成立：

$$u_{n+1}=202u_n-u_{n-1},\ u_0=1,\ u_1=101；\tag{5}$$

$$v_{n+1}=202v_n-v_{n-1},\ v_0=0,\ v_1=10；\tag{6}$$

$$y_{n+1}=202y_n-y_{n-1},\ y_0=1,\ y_1=161；\tag{7}$$

$$u_{2n}=u_n^2+102v_n^2=2u_n^2-1,\ v_{2n}=2u_nv_n；\tag{8}$$

$$y_n=u_n+6v_n；\tag{9}$$

$$u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n\left(\bmod u_m\right)；\tag{10}$$

$$v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n\left(\bmod u_m\right)；\tag{11}$$

$$y_{n+2km}\equiv(-1)^k y_n\left(\bmod u_m\right)。\tag{12}$$

3. $(2y+3)^2=4y_n+5$

本节将证明当且仅当 $n=0,-1$ 时(3)式成立，即当且仅当 $n=0,-1$ 时 $4y_n+5$ 为平方数。

引理 1 若 $4y_n+5$ 为平方数，则必需 $n\equiv 0,-1\left(\bmod 180\right)$。

证明 根据(7)式，我们对递归序列 $\{y_n\}$ 取模 7，其剩余类序列周期为 3，当 $n\equiv 1\left(\bmod 3\right)$ 时，$y_n\equiv 0\left(\bmod 7\right)$，此时 $4y_n+5\equiv 5\left(\bmod 7\right)$。因为 $(4y_n+5\,|\,7)=(5\,|\,7)=-1$（其中 $(a\,|\,p)$ 表示 a 对 p 的 Jacobi 符号)，因此当 $n\equiv 1\left(\bmod 3\right)$ 时，$4y_n+5$ 不可能是平方数，从而排除 $n\equiv 1\left(\bmod 3\right)$。此时还剩下 $n\equiv 0,2\left(\bmod 3\right)$ 的情况未讨论这等价于 $n\equiv 0,2,3,5,6,8,9,11,12,14\left(\bmod 15\right)$。

在下面的证明过程中，我们会使用同样的方法去证明 $4y_n+5$ 在某些情况下不为平方数，为节省篇幅，叙述方式会稍微简略。

下证当 $n\equiv 2,3,5,6,8,9,11,12\left(\bmod 15\right)$ 时，$4y_n+5$ 不为平方数。首先，对 $\{y_n\}$ 取模 1801，其剩余类序列周期为 15，当 $n\equiv 2,3,5,8,11,12\left(\bmod 15\right)$ 时，$4y_n+5\equiv 417,1540,656,1366,1091,174\left(\bmod 1801\right)$。其次，对 $\{y_n\}$ 取模 29,671，其剩余类序列周期为 15，当 $n\equiv 6,9\left(\bmod 15\right)$ 时，$4y_n+5\equiv 17638,9312\left(\bmod 29671\right)$。此时，还剩下 $n\equiv 0,14\left(\bmod 15\right)$ 的情况未讨论，这等价于 $n\equiv 0,14,15,29\left(\bmod 30\right)$。

下证当 $n\equiv 14\left(\bmod 30\right)$ 时，$4y_n+5$ 不为平方数。对 $\{y_n\}$ 取模 67，其剩余类序列周期为 6，当 $n\equiv 2$

$(\bmod 6)$时，$4y_n+5\equiv 42(\bmod 67)$，从而排除$n\equiv 2(\bmod 6)$，这等价于排除$n\equiv 14(\bmod 30)$。此时，还剩下$n\equiv 0,15,29(\bmod 30)$ $$的情况未讨论，这等价于$n\equiv 0,15,29,30,45,59(\bmod 60)$。

下证当$n\equiv 15,29,45(\bmod 60)$时，$4y_n+5$不为平方数。对$\{y_n\}$取模 61，其剩余类序列周期为 60，当$n\equiv 15,29,45(\bmod 60)$时，$4y_n+5\equiv 43,24,28(\bmod 61)$。此时，还剩下$n\equiv 0,30,59(\bmod 60)$的情况未讨论。

下证当$n\equiv 30(\bmod 60)$时，$4y_n+5$不为平方数，这等价于排除$n\equiv 30,90,150,210,270,330,390,450$ $(\bmod 480)$。首先，对$\{y_n\}$取模 887，其剩余类序列周期为 8，当$n\equiv 2(\bmod 8)$时，$4y_n+5\equiv 587(\bmod 887)$，从而排除$n\equiv 2(\bmod 8)$，这等价于排除$n\equiv 90,210,330,450(\bmod 480)$。其次，对$\{y_n\}$取模 719，其剩余类序列周期为 48，当$n\equiv 30(\bmod 48)$时，$4y_n+5\equiv 705(\bmod 719)$，从而排除$n\equiv 30(\bmod 48)$，这等价于排除$n\equiv 30,270(\bmod 480)$。最后，对$\{y_n\}$取模 544543，其剩余类序列周期为 32，当$n\equiv 6,22(\bmod 32)$时，$4y_n+5\equiv 318178,226375(\bmod 544543)$，从而排除$n\equiv 6,22(\bmod 32)$，这等价于排除$n\equiv 390,150(\bmod 480)$。至此，可以排除$n\equiv 30(\bmod 60)$，还剩下$n\equiv 0,59(\bmod 60)$的情况未讨论，这等价于$n\equiv 0,59,60,119,120,179$ $(\bmod 180)$。

下证当$n\equiv 59,60,119,120(\bmod 180)$时，$4y_n+5$不为平方数。首先，对$\{y_n\}$取模 541，其剩余类序列周期为 180，当$n\equiv 59,60(\bmod 180)$时，$4y_n+5\equiv 176,360(\bmod 541)$。其次，对$\{y_n\}$取模 2161，其剩余类序列周期为 45，当$n\equiv 30(\bmod 45)$时，$4y_n+5\equiv 1155(\bmod 2161)$，从而排除$n\equiv 30(\bmod 45)$，这等价于排除$n\equiv 120(\bmod 180)$。最后，对$\{y_n\}$取模 19，其剩余类序列周期为 18，当$n\equiv 11(\bmod 18)$时，$4y_n+5\equiv 14$ $(\bmod 19)$，从而排除$n\equiv 11(\bmod 18)$，这等价于排除$n\equiv 119(\bmod 180)$。

至此，仅剩下$n\equiv 1,179(\bmod 180)$的情况未讨论。证毕。

引理 2 如果$2\mid m$，则有$(\pm 24v_{2m}+5\mid u_{2m})=(\pm 24v_m+5u_m\mid 521)$。

证明 如果$2\mid m$，根据递归序列(5)可知$u_m\equiv 1(\bmod 24)$，即有$u_m\equiv 1(\bmod 8)$，$u_m\equiv 1(\bmod 3)$，从而立即有

$$\pm 24v_m+5u_m\equiv 5(\bmod 8),\quad \pm 24v_m+5u_m\equiv 2(\bmod 3),$$

并且结合递归序列(6)可知$v_m\equiv 0(\bmod 4)$，因此我们有

$$(2\mid \pm 24v_m+5u_m)=-1,\quad (3\mid \pm 24v_m+5u_m)=-1,$$

再由等式(8)可得

$$(u_m\mid u_{2m})=(u_{2m}\mid u_m)=(2u_m^2-1\mid u_m)=(-1\mid u_m)=1,\ (2\mid u_m)=1。$$

于是我们根据等式(8)有

$$\begin{aligned}(\pm 24v_{2m}+5\mid u_{2m})&=(\pm 48u_mv_m+10u_m^2\mid u_{2m})=(u_m\mid u_{2m})(2\mid u_{2m})(\pm 24v_m+5u_m\mid u_{2m})=(u_{2m}\mid \pm 24v_m+5u_m)\\&=(u_m^2+102v_m^2\mid \pm 24v_m+5u_m)=(5^2\cdot u_m^2+5^2\cdot 102v_m^2+(\pm 24v_m+5u_m)(\pm 24v_m-5u_m)\mid \pm 24v_m+5u_m)\\&=(3126\mid \pm 24v_m+5u_m)=(2\mid \pm 24v_m+5u_m)(3\mid \pm 24v_m+5u_m)(521\mid \pm 24v_m+5u_m)=(\pm 24v_m+5u_m\mid 521),\end{aligned}$$

证毕。

引理 3 如果$n\equiv 0(\bmod 180)$，则仅当$n=0$时，$4y_n+5$为平方数。

证明 当$n=0$时，$4y_n+5=4y_0+5=3^2$。

当$n\equiv 0(\bmod 180)$且$n\neq 0$时，令$n=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^t\cdot k$，其中$t\geq 1$，$2\nmid k$ (即$k\equiv \pm 1(\bmod 4)$)。如果m取2^t，$5\cdot 2^t$，$3^2\cdot 5\cdot 2^t$中之一，那么由(9)式和(12)式可得

$$4y_n+5\equiv \pm 4y_{2m}+5\equiv \pm 24v_{2m}+5(\bmod u_{2m}),$$

再由引理 2 可得

$$\left(\pm 24v_{2m}+5 \mid u_{2m}\right)=\left(\pm 24v_m+5u_m \mid 521\right)。$$

根据递归序列(5)和(6)，对$\left\{\pm 24v_{2m}+5u_m\right\}$取模 521，所得到的两个剩余类序列周期均为 65，而对$\left\{2^t\right\}(t\ge 1)$取模 65，其剩余类序列的周期为 12。下面对 n 分成以下两种情况讨论。

情况 1：当$k\equiv 1(\bmod 4)$时。此时若$t\equiv 0,3,5,11(\bmod 12)$，则令$m=2^t$；若$t\equiv 1,2,4,6,9,10(\bmod 12)$，则令$m=5\cdot 2^t$；若$t\equiv 7,8(\bmod 12)$，则令$m=3^2\cdot 5\cdot 2^t$。

根据(9)式，(12)式以及引理 2 可得

$$\left(4y_n+5 \mid u_{2m}\right)=\left(4y_{2m}+5 \mid u_{2m}\right)=\left(24v_{2m}+5 \mid u_{2m}\right)=\left(24v_m+5u_m \mid 521\right),$$

此时，我们有表 1：

Table 1. When $k\equiv 1(\bmod 4)$, *t*, *m*, and $24v_m+5u_m$ correspond to tables

表 1. $k\equiv 1(\bmod 4)$时，t，m 以及 $24v_m+5u_m$ 对应表

$t(t\ge 1)(\bmod 12)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m(\bmod 65)$	1	10	20	8	15	32	60	40	15	25	50	33
$24v_m+5u_m(\bmod 521)$	224	478	216	156	328	300	150	122	328	434	428	486

对表 1 中的所有 m 均有$\left(24v_m+5u_m \mid 521\right)=-1$，故在情况 1 中$4y_n+5$不为平方数。

情况 2：当$k\equiv -1(\bmod 4)$时。此时若$t\equiv 5,6,9,11(\bmod 12)$，则令$m=2^t$；若$t\equiv 0,3,4,7,8,10(\bmod 12)$，则令$m=5\cdot 2^t$；若$t\equiv 1,2(\bmod 12)$，则令$m=3^2\cdot 5\cdot 2^t$。

根据(9)式，(12)式以及引理 2 可得

$$\left(4y_n+5 \mid u_{2m}\right)=\left(-4y_{2m}+5 \mid u_{2m}\right)=\left(-24v_{2m}+5 \mid u_{2m}\right)=\left(-24v_m+5u_m \mid 521\right),$$

此时，我们有表 2：

Table 2. When $k\equiv -1(\bmod 4)$, *t*, *m*, and $-24v_m+5u_m$ correspond to tables

表 2. $k\equiv -1(\bmod 4)$时，t，m 以及 $-24v_m+5u_m$ 对应表

$t(t\ge 1)(\bmod 12)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m(\bmod 65)$	5	25	50	40	15	32	64	55	45	57	50	33
$-24v_m+5u_m(\bmod 521)$	150	122	328	434	428	486	224	478	216	156	328	300

对表 2 中的所有 m 均有$\left(-24v_m+5u_m \mid 521\right)=-1$，故在情况 2 中$4y_n+5$不为平方数。证毕。

引理 4 如果$n\equiv -1(\bmod 180)$，则仅当$n=-1$时，$4y_n+5$为平方数。

证明 当$n=-1$时，$4y_n+5=4y_{-1}+5=13^2$。

当$n\equiv -1(\bmod 180)$且$n\ne -1$时，令$n=-1+2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^t\cdot k$，其中$t\ge 1$，$2\nmid k$。如果 m 取2^t以及$5\cdot 2^t$中之一，那么由(7)式和(12)式可得

$$4y_n+5\equiv -4y_{-1}+5\equiv -159\left(\bmod u_m\right),$$

又因为$2\mid m$，根据递归序列(5)可知$u_m\equiv 1(\bmod 24)$，即有

$$u_m \equiv 1(\bmod 8)，\quad u_m \equiv 1(\bmod 3)，$$

因此，我们有

$$(4y_n+5|u_m)=(-159|u_m)=(-1|u_m)(3|u_m)(53|u_m)=(u_m|53)。$$

根据递归序列(5)，对 $\{u_m\}$ 取模 53，其剩余类序列周期均为 52，而对 $\{2^t\}(t>1)$ 取模 52，其剩余类序列的周期为 12。此时若 $t \equiv 0,2,4,5,6,8,10,11(\bmod 12)$，则令 $m=2^t$；若 $t \equiv 1,3,7,9(\bmod 12)$，则令 $m=5\cdot 2^t$。此时，我们有表 3：

Table 3. t, m, and u_m correspond to tables
表 3. t，m 以及 u_m 对应表

$t(t>1)(\bmod 12)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m(\bmod 52)$	40	36	4	40	16	32	12	16	48	12	36	20
$u_m(\bmod 53)$	33	19	31	33	19	32	33	19	31	33	19	32

当 $t=1$ 时，则有 $m=10$，此时由(5)式可得，$(u_{10}|53)=(34|53)=-1$。对此 m 和表 3 中的所有 m 均有 $(u_m|53)=-1$，从而 $4y_n+5$ 不为平方数。证毕。

4. $(2y+3)^2=-4y_n+5$

引理 5 $-4y_n+5$ 为平方数仅当 $n=0$ 时成立。

证明 由递归序列(7)可知，当 $n\neq 0$ 时，$-4y_n+5<0$，此时 $-4y_n+5$ 不可能是平方数；当 $n=0$ 时，$-4y_n+5=-4y_0+5=1^2$。证毕。

5. 主要结论

根据前几节的讨论，可以得出本文的主要结论。

定理 1 不定方程(1)的全部整数解为

$$(-3,-3),(-2,-3),(-1,-3),(0,-3),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0),$$
$$(-3,-2),(-2,-2),(-1,-2),(0,-2),(-3,1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-1),$$

其中无正整数解。

证明 在前几节的讨论中，我们将求不定方程(1)的全部整数解的问题转化成对 $\{\pm 4y_n+5\}$ 在 n 取何值时是平方数的讨论。

根据引理 1，引理 3 以及引理 4 可知，(3)式成立当且仅当 $n=0,-1$，即 $4y_n+5$ 为平方数当且仅当 $n=0,-1$。当 $n=0$ 时，$(2y+3)^2=4y_0+5=3^2$，此时给出不定方程(1)的一组整数解，即 $y=0,-3$，$x=0,-1,-2,-3$。当 $n=-1$ 时，$(2y+3)^2=4y_{-1}+5=13^2$，此时 $y=5,-8$，将其带入不定方程(1)的化简形式中，则有 $x^2+3x+1=\pm 69$，经计算方程 $x^2+3x+1=\pm 69$ 不存在整数解。

根据引理 5 可知，(4)式成立当且仅当 $n=0$，即 $-4y_n+5$ 为平方数当且仅当 $n=0$。当 $n=0$ 时，$(2y+3)^2=-4y_0+5=1^2$，此时给出不定方程(1)的一组整数解，即 $y=-1,-2$，$x=0,-1,-2,-3$。

综上，我们给出了不定方程(1)的 16 组整数解，且无正整数解。证毕。

6. 结语

本文延续了文献[6]的证明思路，将不定方程(1)等价转化成 Pell 方程(2)，并构建出方程(1)和方程(2)

的整数解的等价关系，并通过运用递归序列、平方剩余等初等方法，得出方程(2)的全部整数解，继而得到方程(1)的全部整数解，从而证明不定方程(1)无正整数解。

事实上，不同类型的不定方程的递归序列具有不同的特点，我们在证明过程中需要结合本文所研究的不定方程的递归序列的特点转换研究思路，这其中包括选择$(p,q)=(6,17)$而不是$(p,q)=(17,6)$。本文的主要结果(即定理1)，进一步完善了当$1<p,q<50$并且p和q互素时，关于这种类型的不定方程求正整数解的相关结论。但是对于上述类型的不定方程，还有问题值得进一步研究，即是否能给出求解公式，从而简化上述类型的不定方程的正整数解的求解过程。

参考文献

[1] Cohn, J. (1971) The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$. *Pacific Journal of Mathematics*, **37**, 31-35. https://doi.org/10.2140/pjm.1971.37.35

[2] Ponnudurai, T. (1975) The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)$. *London Mathematical Society*, **10**, 32-40.

[3] 宣体佐. 关于不定方程$x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 北京大学学报(自然科学版), 1982(2): 27-34.

[4] Luo, M. (2001) On the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **32**, 3-7.

[5] 曹珍富. 关于不定方程$3x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 哈尔滨工业大学科研报告，1982, 32(3): 13.

[6] 罗明, 朱德辉, 马芙蓉. 关于不定方程$3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2009, 34(5): 16-21.

[7] 胡邦群, 罗明. 关于不定方程$6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(10): 17-21.

[8] 李妮. 关于不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2017, 34(4): 41-45.

[9] 杨晓柳, 牟全武. 关于不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J].西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(4): 92-96.

[10] 林丽娟. 关于不定方程$7x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 数学的实践与认识，2021, 51(9): 218-223.

[11] 王润青. 不定方程$6x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$的正整数解研究[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2021, 30(6): 562-565.

[12] 柯召, 孙琦. 数论讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 15-36.