Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(3), 1099-1115
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133103

叶形图的强连通性

王欢欢，王世英*

山西师范大学数学与计算机科学学院，山西 太原

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月21日；发布日期：2024年3月28日

摘 要

一个互联网络系统通常会被构建成一个无向连通图$G = (V(G), E(G))$，其中$V(G)$代表图的顶点集，$E(G)$代表着图的边集，顶点和边分别代表着互联网络中的处理器和处理器之间的通信链路。在互联网络中，处理器或者通信链路出现故障是不可避免的，在这种系统中，我们重点考虑网络的容错能力。而连通性在衡量互联网络的容错性和可靠性方面起着重要作用。传统的连通性只可允许处理器或者通信链路发生故障，它的适用范围比较局限。在此背景下，提出了网络的强连通性。强连通性允许处理器和通信链路可以同时发生故障，它是传统连通性的衍生。显然更适用于一般情况。叶形图有很多好的性质，本文研究了叶形图的一些强连通性，并且得到了叶形图的强连通度以及强自然连通度。

关键词

连通性，容错性，叶形图

The Strong Connectivity of Leaf-Sort Graphs

Huanhuan Wang, Shiying Wang*

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

* 通讯作者。

文章引用: 王欢欢, 王世英. 叶形图的强连通性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 1099-1115.
DOI: 10.12677/aam.2024.133103

Received: Feb. 27^{th}, 2024; accepted: Mar. 21^{st}, 2024; published: Mar. 28^{th}, 2024

Abstract

An interconnection network is usually modeled as an undirected, connected graph $G = (V(G), E(G))$, where $V(G)$ represents vertex set, $V(G)$ represents edge set, and nodes represent processors, edges represent communication links between processors. In the interconnect network, the failure of processors or communication links is unavoidable. We focus on the fault tolerance of the network. The connectivity plays an important role in measuring the fault tolerance and reliability of interconnection networks. Traditional connectivity only allows processor or communication link to fail, its scope of application is relatively limited. Under this background, the strong connectivity of the network is proposed. Strong connectivity allows both the processor and the communication link to fail at the same time and is a derivative of traditional connectivity. Obviously more applicable to general situations. Leaf graphs have many good properties. In this paper, we study some strong connectivity of leaf graphs, and the strong connectivity and strong natural connectivity of leaf graphs are obtained.

Keywords

Connectivity, Fault-Tolerance, Leaf-Sort Graph

1. 引言

一个互联网络通常会被构建成一个无向图$G = (V(G), E(G))$，其中$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 代表图G的顶点集，$E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$代表着图$G$的边集，顶点$v$和边$e$分别代表着互联网络中的处理器和处理器之间的通信链路。对于图G的任意一个顶点v，我们用$N_G(v)$来表示点v的邻域，即和v相连的顶点集，令$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$，用$E_G(v)$表示和$v$相连的边集。令$U \subseteq V(G)$是图$G$的一个顶点子集，$N_G(U) = \bigcup_{v \in U} N_G(v) \setminus U$表示顶点集$U$的邻域。令$V' \subseteq V(G)$是图$G$的一个顶点子集，由$V'$诱导出来的一个子图$G[V']$ 是一个顶点集是V'，边集是图G中'两个端点都在V'中的所有

边集的集合。我们用$d_G(v)$来表示顶点v在图G中的度，$\delta(G)=\min\{d_G(v)|\ v\in V(G)\}$表示图$G$的最小度。在一个图$G$中，如果任意一个顶点$v$的度都为$k$，那么我们就称图$G$是$k$正则图[1]。

在互联网络中，由于处理器或者通信链路会发生故障，所以连通性在衡量互联网络的容错性和可靠性方面起着重要的作用[2–5]。大型网络的容错能力通常衡量的是在网络拓扑中发生的一定数量的节点故障或链路故障，网络可以在多大程度上保持原有的性质，在这样的背景下，研究了网络中各种各样的连通性。例如：Zhao和Hao等人[6]研究了泡形图的广义连通度；Guo等人[7]研究了折叠类超立方体的连通性与超连通性；Lin等人[8]研究了超立方体的结构连通度与子结构连通度；Guo和Lu等人[9]研究了星图的边容错的Strong Menger边连通性；Wang等人[10]研究了泡形星图的强连通性；Feng等人[11]研究了轮图的2-额外连通度；Wang等人[12]研究了叶形图的连通性，等等。

其中强连通性可以允许处理器和通信链路同时发生故障。传统的的连通性只允许处理器发生故障，边连通性只允许通信链路发生故障。它的适用范围比较局限。强连通性显然是传统连通性的衍生。更适用于一般情况。在这篇文章中，我们主要研究叶形图CF_n的一些强连通性，并且得到了叶形图的强连通度[10]以及强自然连通度[10]。

2. 预备知识

(1) **叶形图**

我们用S_n来表示由$\{1,2,\ldots,n\}$上的所有置换，用$p_1p_2\cdots p_n$来表示置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$，置换$(ij)$也被称为对换，注意：是交换位置$i$ 和j上的元素的置换（不交换元素i和j），即$(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)(ij)=(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$。根据代数学的有关知识我们知道，$\{(1i):i=2,3,\ldots,n\}$是对称群$S_n$的一个生成集。因此，$\{(1i):i=2,3,\ldots,n\}\cup\{(j(j+1)):j=2,4,\ldots,n-1\}$ (n 是奇数)和$\{(1i):i=2,3,\ldots,n\}\cup\{(j(j+1)):j=2,4,\ldots,n-2\}$ (n是偶数)也是S_n的一个生成集，n维叶形图CF_n的定义如下：

定义2.1 当n为奇数时，n维叶形图CF_n 是一个以S_n为顶点集，$\{(u,v)|u=v(1i)(i\in[2,n]),u=v(i(i+1))(i\in\{2,4,\ldots,n-1\})\}$为边集的图；当$n$为偶数时，$n$维叶形图$CF_n$是一个以$S_n$为顶点集，$\{(u,v)|u=v(1i)(i\in[2,n]),u=v(i(i+1))(i\in\{2,4,\ldots,n-2\})\}$为边集的图。

我们可以根据每个顶点最后一个位置上的数把叶形图CF_n 划分成n个不同的子图：CF^1_{n-1}，$CF^2_{n-1},\ldots,CF^n_{n-1}$，例如：$i$子图$CF^i_{n-1}$里每一个顶点的最后一个位置上的数都是固定的$i(i\in[1,n])$。很显然，每一个$CF^i_{n-1}$跟$CF_{n-1}$是同构的[11]。为了方便，我们简单的表示为：$CF_n=CF^1_{n-1}\oplus CF^2_{n-1}\oplus\cdots\oplus CF^n_{n-1}$，其中$\oplus$只表示$CF_n$的相应分解。

任意一条边都有两个端点，我们把两个端点位于不同子图的边称为外部边。如果两条边不相邻(没有公共的顶点)，我们就称它们是不相关的。对于任意子图里面的顶点u，我们用u^+表示$u(1n)$，用u^-表示$u((n-1)n$，令n为奇数时，$N^+_u=\{u^+,u^-\}$，$[1,n]$里的任意两个整数i,j，我们把i子图和j子图之间所有连着的交叉边用$E_{i,j}(CF_n)=E_{CF_n}(V(CF^i_{n-1}),V(CF^j_{n-1}))$ 来表示，根据CF_n的定义我们知道，当n是奇数的时候，CF_n是一个包含了$n!$个顶点的$\frac{3n-3}{2}$正则图；当n是偶数

的时候，CF_n是一个包含了$n!$个顶点的$\frac{3n-4}{2}$正则图。2维、3维、4维的叶形图CF_2，CF_3和CF_4见图1。

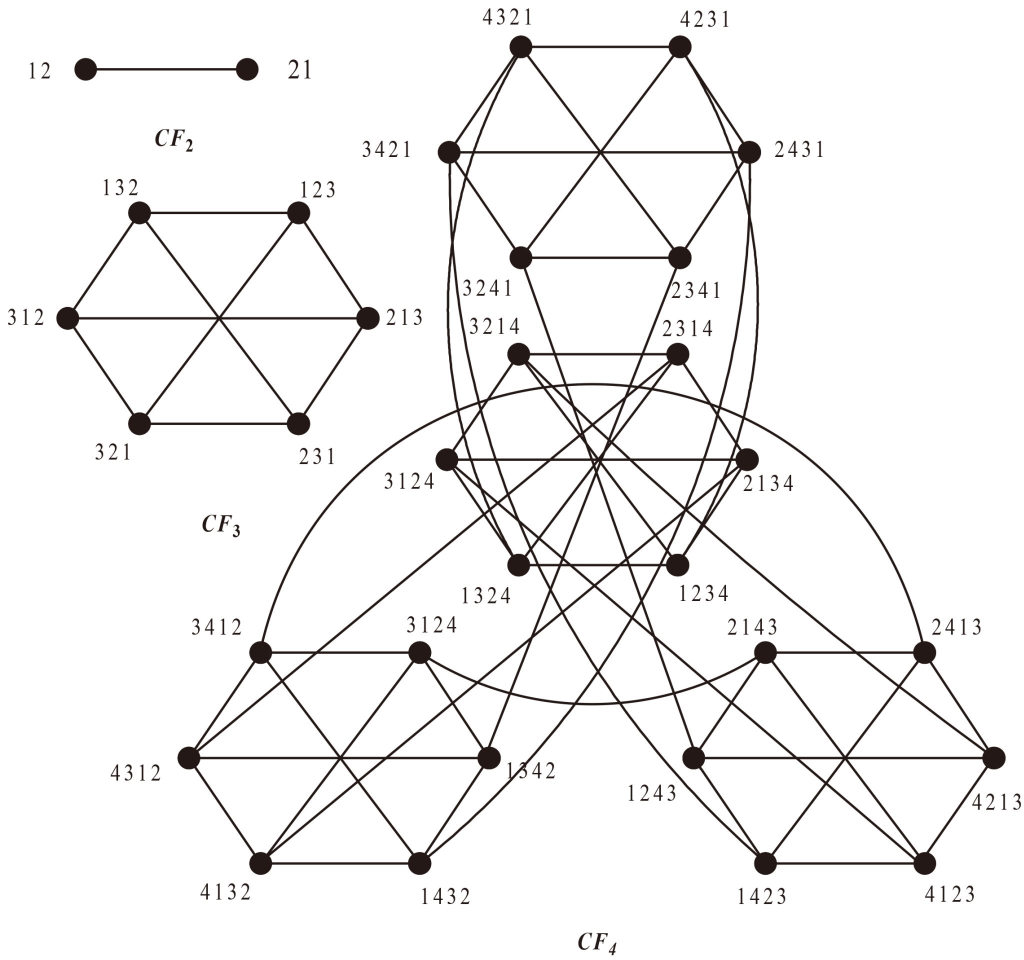

Figure 1. The leaf-sort graphs CF_2, CF_3 and CF_4

图 1. 叶形图CF_2，CF_3和CF_4

定理2.2 ([12]) CF_n是二部图。

定理2.3 ([12]) 当n为奇数时，任意两个不同的子图CF^i_{n-1}之间存在着$2(n-2)!$条独立的交叉边；n为偶数时，任意两个不同的子图CF^i_{n-1}之间存在着$(n-2)!$条独立的交叉边。

定理2.4 ([12]) 令$v \in CF^i_{n-1}$，$(1 \leq i \leq n)$，则n为奇数时，v^+和v^-属于两个不同的子图$CF^j_{n-1}{}'s$，其中$j \neq i$；n为偶数时，v^+属于CF^j_{n-1}，其中$j \neq i$。

定理2.5 ([13]) 对于i子图CF^i_{n-1}里面的任意两个不同的顶点u，v，n为奇数时，$N^+_u \cap N^+_v = \emptyset$；$n$为偶数时，$u^+ \neq v^+$。

定理2.6 ([13]) 当n为奇数时，对于1和2子图$CF^{[1,2]}_{n-1}$里面的任意一个顶点u，它的两个外部邻域一定有一个在3到n子图$CF^{[3,n]}_{n-1}$里，即$u^+ \in V(CF^{[3,n]}_{n-1})$或者$u^- \in V(CF^{[3,n]}_{n-1})$。

(2) 定义与性质

定义2.7 ([10]) 设$G = (V, E)$是一个非平凡连通图，$F \subseteq V \cup E$，若$\delta(G - F) \geq g$，则强故障集F称为强g-好邻故障集。使$G - F$不连通的一个强g-好邻故障集F被称为图G的一个强g-好邻割。强g-好邻割的最小基数就被称为图G的强g-好邻连通度，用$\kappa\lambda^g(G)$ 表示。若图G有一个强g-好邻割，则连通图G是强g-好邻连通的。图G的强0-好邻连通也被称为图G的强连通度，记为$\kappa\lambda(G)$；图G的强1-好邻连通也被称为图G的强自然连通度，记为$n\kappa\lambda(G)$。若$F \subseteq E$，图G的强自然连通度称为图G的强自然边连通度，用$n\lambda(G)$来表示。

假设$g^{'} \geq g$，若一个连通图G是强$g^{'}$-好邻连通的，那图G有一个强$g^{'}$-好邻割F。因此$\delta(G-F) \geq g^{'}$，那么$\delta(G - F) \geq g$。因此图G是强g-好邻连通的。由此可以得到下列的定理。

定理2.8 ([10]) 令$g^{'} \geq g$，且G是一个强$g^{'}$-好邻连通图。则$\kappa\lambda^{g^{'}}(G) \geq \kappa\lambda^g(G)$。

定义2.9 ([10]) 设$G = (V, E)$是一个非平凡连通图，$F \subseteq V \cup E$，若$G - F$的每个分支至少有g个顶点，则强故障集F称为强g-额外故障集。使$G - F$不连通的一个强g-额外故障集F 被称为图G的一个强g-额外割。强g-额外割的最小基数就被称为图G 的强g-额外连通度，用$\tilde{\kappa}\lambda^g(G)$ 表示。若图G有一个强g-额外割，则连通图G是强g-额外连通的。

假设$g^{'} \geq g$，若一个连通图G是强$g^{'}$-额外连通的，那么图G有一个强$g^{'}$-额外割F。因此可以得到$G - F$的每个分支至少有$g^{'}$个顶点，那么$G - F$的每个分支至少有g个顶点。因此连通图G是强g-额外连通的。由此可以得到：

定理2.10 ([10]) 令$g^{'} \geq g$，且G是一个强$g^{'}$-额外连通图。则$\tilde{\kappa}\lambda^{g^{'}}(G) \geq \tilde{\kappa}\lambda^g(G)$。

定理2.11 ([10]) 令$g^{'} \geq g$，且G是一个强g-好邻连通图。则$\kappa\lambda^g(G) \geq \tilde{\kappa}\lambda^g(G)$。

定理2.12 ([10]) 令$g^{'} \geq g$，且G是一个强g-额外连通图，当$g = 0, 1$时，有$\kappa\lambda^g(G) = \tilde{\kappa}\lambda^g(G)$。

如果图G的每个最小（强）（边）割F都能孤立出来一个顶点，则连通图G是（强）超$|F|$（边）连通的。此外，若$G - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，则图G是（强）紧超$|F|$（边）连通的。如果连通图G的每个最小自然（强）（边）割F都能孤立出来一条边，则连通图G是（强）超$|F|$（边）自然连通的。此外，若$G - F$有两个分支，其中一个分支是一条边，则图G是（强）紧超$|F|$（边）自然连通的。

定理2.13 ([12]) 令CF_n是一个n维叶形图$(n \geq 2)$，n为奇数时，CF_n的连通度$\kappa(CF_n) = \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$CF_n$的连通度$\kappa(CF_n) = \frac{3n-4}{2}$。

定理2.14 ([12]) 令CF_n是一个n维叶形图$(n \geq 2)$，n为奇数时，CF_n 的边连通度$\lambda(CF_n) = \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$CF_n$ 的连通度$\lambda(CF_n) = \frac{3n-4}{2}$。

引理2.15 ([13]) 令CF_n是一个n维叶形图$(n \geq 4)$，n为奇数时，CF_n是紧超$\frac{3n-3}{2}$连通的；n为偶数时，CF_n是紧超$\frac{3n-4}{2}$连通。

引理2.16 ([14]) 当$n \geq 4$，令$F \subset V(CF_n)$，n为奇数，$|F| \leq 3n - 6$；n为偶数，$|F| \leq 3n - 7$时。若$CF_n - F_n$不连通，则有以下两种情况:

(1) CF_n有两个部分，其中一个为孤立点；

(2) CF_n有三个部分，其中两个为孤立点。

引理2.17 ([14]) 令$F \subset E(CF_3)$,$|F| \le 3$ 时，若CF_n不连通，则CF_n有两个部分，其中一个为孤立点。

引理2.18 ([14]) 当$n \ge 3$，令$F \subset E(CF_n)$，n为奇数，$|F| \le 3n-6$；n为偶数，$|F| \le 3n-7$时。若CF_n不连通，则CF_n有两个部分，其中一个为孤立点；

3. 叶形图CF_n的强紧超连通性

定理3.1 对于任意整数$n \ge 3$，n为奇数时，$\kappa\lambda(CF_n) = \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$\kappa\lambda(CF_n) = \frac{3n-4}{2}$。

证明：令F为CF_n的最小强割，如果$F \subset V(CF_n)$，由定理2.13可知，当n为奇数时，$|F| = \frac{3n-3}{2}$；n为偶数时，$|F| = \frac{3n-4}{2}$。若$F \subset E(CF_n)$，由定理2.14可知，当n为奇数时，$|F| = \frac{3n-3}{2}$；n为偶数时，$|F| = \frac{3n-4}{2}$。故该定理对上述两种情况成立。

假设$n \ge 3$时，$F \not\subseteq V(CF_n)$。我们令n为奇数时，$|F| \le \frac{3n-5}{2}$；n为偶数时，$|F| \le \frac{3n-6}{2}$，同时设$F_v = F \cap V(CF_n)$，$F_v \ne \emptyset$，$F_e = F \cap E(CF_n)$，$F_e \ne \emptyset$。由此可以得出n为奇数时，$|F_v| \le \frac{3n-7}{2}$；n为偶数时，$|F_v| \le \frac{3n-8}{2}$，那么由定理2.13可知，$CF_n - F_v$是连通的。由于F_e为$CF_n - F_v$的最小边割，设$CF_n - F_v - F_e$有两个分支。令$|F_e| = i$。因为$n \ge 3$，所以当n为奇数时有$n! - |F_v| \ge n! - (\frac{3n-5}{2} - i) \ge 2(i+1)$；当$n$为偶数时有$n! - |F_v| \ge n! - (\frac{3n-6}{2} - i) \ge 2(i+1)$。因此，在$CF_n - F_v - F_e$中有一个分支$C$，满足$|V(C)| \ge i+1$。令$V_C$为$CF_n - F_v$ 中与F_e相关联点的集合，由于$|V_C| \le |F_e| = i$。我们可以得到：当n为奇数时，$|V_C| + |F_v| \le |F_e| + |F_v| = |F| \le \frac{3n-5}{2}$；$n$为偶数时，$|V_C| + |F_v| \le |F_e| + |F_v| = |F| \le \frac{3n-6}{2}$。由定理2.13可知，$CF_n - F_v - F_e$是连通的，即$CF_n - F$连通，与$F$为$CF_n$的最小强割矛盾。则当$n$为奇数时，$|F| \ge \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$|F| \ge \frac{3n-4}{2}$。

令$u = (1)v = (12)$。当n为奇数时，令$F = \{(1,i) : 3 \le i \le n\} \cup \{i(i+1) : i = 246 \cdots n-1\} \cup \{uv\}$；当$n$为偶数时，令$F = \{(1,i) : 3 \le i \le n\} \cup \{i(i+1) : i = 246 \cdots n-2\} \cup \{uv\}$。可以看出$F$为$CF_n$的一个强割。所以当$n$为奇数时，$\kappa\lambda(CF_n) \le \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$\kappa\lambda(CF_n) \le \frac{3n-4}{2}$，故得证。

定理3.2 对于任意整数$n \ge 4$，n为奇数时，CF_n是紧超$\frac{3n-3}{2}$边连通；n为偶数时，CF_n是紧超$\frac{3n-4}{2}$边连通。

证明：令F为CF_n的最小边割，n为奇数时，$|F| = \frac{3n-3}{2}$，n为偶数时，$|F| = \frac{3n-4}{2}$。令$F_i = F \cap E(CF_n^i)$，其中$i \in [1n]$，且令$|F_1| \ge |F_2| \ge \cdots \ge |F_n|$。设$C$为$CF_n$中所有交叉边的集合，同时令$F_c = F \cap C$。下面我们对$n$作分类讨论：

（1）当$n = 4$时，$|F| = 4$，有以下情况：

情况1：$|F_1| \le 2$

在此情况下，我们可以得到$i \in [14]$时，$|F_i| \le 2$，$CF_4^i \cong CF_3$，由定理2.14可知，$i \in [14]$时，$CF_4^i - F_i$连通。因为$|F_c| \le 4$，$|N(V(CF_4^i - F_i))| = (4-1)! = 6 > |F_c|$，故$CF_4 - F$连通。

情况2：$|F_1| = 3$

在此情况下，我们可以得到$i \in [24]$时，$|F_i| \le 1$，$|F_c| \le 1$，$CF_4^i \cong CF_3$，由定理2.14可知，

$CF_4^i - F_i$连通。又由定理2.3可知，任意两个子图中有$(4-2)! = 2$条交叉边，由于$(4-2)! = 2 > |F_c|$，故$CF_4[V(CF_4^2 - F_2) \cup V(CF_4^3 - F_3) \cup V(CF_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由定理2.17可知，$CF_4^1 - F_1$或是连通的或有两个分支，其中一个为孤立点。当$CF_4 - F_1$连通时，由于$(4-2)! = 2 > |F_c|$，则$CF_4 - F$连通；当$CF_4 - F_1$有两个分支，其中一个为孤立点$v$时。倘若$\{v^+\} = F_i$，其中$i \in \{234\}$，或者$|v^+ \cap (F_2 \cup F_3 \cup F_4)| = 1$，此时$CF_4 - F$有两个分支，其中一个为孤立点，得证。否则连通，与$F$为$CF_n$的最小边割矛盾。

情况3：$|F_1| = 4$

在此情况下，我们可以得到$i \in [24]$，$|F_i| = 0$，$|F_c| = 0$，由定理2.14及定理2.3可知，$CF_4 - F$连通。

（2）当$n \geq 5$时，我们有以下情况：

该结果对$n = 4$成立，我们现对n做数学归纳，假设该结论对CF_{n-1}成立。

情况1：n为奇数时，$|F_1| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1| \leq \frac{3n-8}{2}$。

在此情况下，我们可以得到$i \in [1n]$，当n为奇数时，$|F_i| \leq \frac{3n-9}{2}$，$|F_c| \leq \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$|F_i| \leq \frac{3n-8}{2}$，$|F_c| \leq \frac{3n-4}{2}$。由于$n \geq 5$且为奇数时，$2(n-2)! > \frac{3n-3}{2}$；$n \geq 6$且为偶数时$(n-2)! > \frac{3n-4}{2}$，再结合定理2.14及定理2.3可知，$CF_4 - F$连通。

情况2：n为奇数时，$|F_1| = \frac{3n-7}{2}$；n为偶数时，$|F_1| = \frac{3n-6}{2}$。

在此情况下，我们可以得到$i \in [2n]$，当n为奇数时，$|F_i| \leq 2$，$|F_c| \leq 2$；n为偶数时，$|F_i| \leq 1$，$|F_c| \leq 1$。由于$CF_n^i \cong CF_3$，由定理2.14可知，$CF_n^i - F_i$是连通的。又由定理2.3可知，当$n \geq 5$且为奇数时，$2(n-2)! > 2 \geq |F_c|$；当$n \geq 6$且为偶数时，$(n-2)! > 1 \geq |F_c|$。则$CF_n[V(CF_n^2 - F_2) \cup V(CF_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(CF_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由归纳假设可知，$CF_n - F_1$或是连通的或有两个分支，其中一个为孤立点$v$。若$CF_n - F_1$是连通的，由定理2.3可知，$CF_n - F$是连通的，与最小边割矛盾。若$CF_n - F_1$有两个分支，其中一个为孤立点$v$时，倘若当$n$为奇数时，$|F_c| = 2$且$F_c$恰好均与$v$关联或者$|N_v^+ \cap (F_2 \cup F_3 \cup \cdots \cup F_n)| = 2$；$n$为偶数时，$F_c$与$v$关联或者$|v^+ \cap (F_2 \cup F_3 \cup \cdots \cup F_n)| = 1$，此时$CF_n(V(CF_n^1 - F_1 - v) \cup V(CF_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(CF_n^n - F_n)) - F_c$连通，故$CF_n - F$有两个分支，其中一个为孤立点，得证。否则$CF_n - F$连通，与$F$为最小边割矛盾。

情况3：n为奇数时，$\frac{3n-5}{2} \leq |F_1| \leq \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1| = \frac{3n-4}{2}$。

在此情况下，我们可以得到$i \in [2n]$时，当n为奇数时，$|F_i| \leq 1$，$|F_c| \leq 1$；n为偶数时，$|F_i| \leq 0$，$|F_c| \leq 0$。由于$CF_4^i \cong CF_3$，由定理2.14可知，$CF_n^i - F_i$是连通的，又由定理2.3可知，当$n \geq 5$且为奇数时，$2(n-2)! > 1 \geq |F_c|$；当$n \geq 6$且为偶数时，$(n-2)! > 0 \geq |F_c|$。故$CF_n - F$连通，与F为最小边割矛盾。

综上所述，引理得证。

定理3.3 对于任意整数$n \geq 4$，n为奇数时，CF_n是强紧超$\frac{3n-3}{2}$连通；当n为偶数时，CF_n 是强紧超$\frac{3n-4}{2}$连通。

证明：令F为CF_n的最小强割，n为奇数时，$|F| = \frac{3n-3}{2}$；n为偶数时，$|F| = \frac{3n-4}{2}$。令$F_i = F \cap V(CF_n^i)$，$F_i^e = F \cap E(CF_n^i)$，其中$i \in [1n]$，且令$|F_1 \cup F_1^e| = \max\{|F_i \cup F_i^e||i = 12 \cdots n\}$。

设C为CF_n中所有交叉边的集合，同时$F_c = F \cap C$。下面我们对n进行分类讨论：

（1）当$n = 4$时，$|F| = 4$。

情况1：$0 \leq |F_1 \cup F_1^e| \leq 2$

在此情况下，由于$|F_1 \cup F_1^e| = \max\{|F_i \cup F_i^e||i = 12 \cdots n\}$，由定理3.1可知，$i \in [14]$，$CF_4^i - F_i - F_i^e$连通。再由定理2.4可知，$|N(CF_n^i)| = 6 > |F|$。故$CF_4 - F$连通，矛盾。

情况2：$|F_1 \cup F_1^e| = 3$

在此情况下，我们可以得到$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，由于$CF_4^i \cong CF_3$，由定理3.1 可知$i \in [24]$时，$CF_4^i - F_i - F_i^e$均连通。又由定理2.3可知，任意两个子图中有$(4-2)! = 2$条交叉边，由于$(4-2)! = 2 > 1$，故$CF_4[V(CF_4^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(CF_4^3 - F_3 - F_3^e) \cup V(CF_4^4 - F_4 - F_4^e)] - F_c$是连通的。由于$|F_1 \cup F_1^e| = 3$，我们可以看出，$CF_4^1 - F_1 - F_1^e$有以下三种情况：(1) $CF_4^1 - F_1 - F_1^e$是连通的；(2) $CF_4^1 - F_1 - F_1^e$有两个分支，其中一个为孤立点；(3) $CF_4^1 - F_1 - F_1^e$ 为三个孤立点。当$CF_4^1 - F_1 - F_1^e$连通时，因为$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，$|N(V(CF_4^1 - F_1 - F_1^e) \cap (V(CF_4^2) \cup V(CF_4^3) \cup V(CF_4^4))| \geq 3 > 1$，则$CF_4 - F$连通；当$CF_4^1 - F_1 - F_1^e$有两个分支，其中一个为孤立点$u$时。假设$\{u^+\} = F_i$，其中$i \in \{234\}$，或者$u$恰好与$F_c$关联时，此时$CF_4 - F$有两个分支，其中一个为孤立点，得证。否则$CF_4 - F$连通，矛盾；当$CF_4^1 - F_1 - F_1^e$ 为三个孤立点时，设其中一孤立点为v时。假设$\{v^+\} = F_i$，其中$i \in \{234\}$，或者v恰好与F_c关联时，则$CF_4 - F$有两个分支，其中一个为孤立点，得证，否则$CF_4 - F$连通，矛盾。

情况3：$|F_1 \cup F_1^e| = 4$

在此情况下，$|F_i \cup F_i^e| = 0$，$|F_c| = 0$，由定理3.1及2.4可知，$CF_4 - F$连通，矛盾。

（2）当$n \geq 5$时，我们有以下情况：

该结果对$n = 4$成立，我们现对n做数学归纳，假设该结论对CF_{n-1}成立。

情况1：n为奇数时，$|F_1 \cup F_1^e| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1 \cup F_1^e| \leq \frac{3n-8}{2}$。

在此情况下，n为奇数时，$|F_i \cup F_i^e| \leq \frac{3n-9}{2}$，$|F_c| \leq \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$|F_i \cup F_i^e| \leq \frac{3n-8}{2}$，$|F_c| \leq \frac{3n-4}{2}$。由定理3.1可得$i \in [1n]$，$CF_n^i - F_i - F_i^e$连通，再由定理2.4可知$CF_n - F$连通，矛盾。

情况2：n为奇数时，$|F_1 \cup F_1^e| = \frac{3n-7}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1 \cup F_1^e| = \frac{3n-6}{2}$。

在此情况下，当n为奇数时，$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| = 2$；$n$为偶数时，$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| = 1$。假设$CF_n^1 - F_1 - F_1^e$连通，由定理2.4可知，$n \geq 5$且为奇数时有$2[(n-1)! - \frac{3n-7}{2}] \geq 2$；$n \geq 6$且为偶数时有$(n-1)! - \frac{3n-7}{2} \geq 1$。故$CF_n - F$连通，矛盾；假设$CF_n^1 - F_1 - F_1^e$不连通时，由归纳假设得，会有两个分支，其中一个为孤立点v，倘若n为奇数时，$|N(v) \cap (F_2 \cup F_3 \cdots F_n)| = 2$，或者$|F_c| = 2$ 且F_c 与v均关联；n为偶数时，$|N(v) \cap (F_2 \cup F_3 \cdots F_n)| = 1$，或者$|F_c| = 1$且$F_c$与$v$关联，此时$CF_n - F$有一孤立点，得证。否则连通，矛盾。

情况3：n为奇数时，$\frac{3n-5}{2} \leq |F_1 \cup F_1^e| \leq \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1 \cup F_1^e| = \frac{3n-4}{2}$。

在此情况下，n为奇数时，$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq 1$；$n$为偶数时，

$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| = 0$，由定理2.4及定理3.1可知，$CF_n - F$连通，矛盾。

4. 叶形图CF_n的强自然连通性

定理4.1 对于任意整数$n \geq 5$，n为奇数时，CF_n为紧超$3n-5$自然连通；n为偶数时，CF_n为紧超$3n-6$自然连通。

证明： 令$F \subseteq V(CF_n)$为CF_n的最小自然割，当n为奇数时，$|F| = 3n-5$，n为偶数时，$|F| = 3n-6$。令$F_i = F \cap V(CF_n^i)$，其中 $i \in [1n]$，且令$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$。下面我们分奇数偶数两种情况展开讨论：

声明1：当n为奇数时，$|F_3| \geq 1$；当n为偶数时，$|F_2| \geq 1$。

声明1的证明： 当n为奇数时，$|F_3| \geq 1$。若$|F_3| = 0$，则$|F_3| = |F_4| = \cdots = |F_n| = 0$。由定理2.13及2.3可知，$CF_n[V(CF_n^3) \cup V(CF_n^4) \cup \cdots \cup V(CF_n^n)]$连通。再由定理2.6可知，$CF_n - F$连通，矛盾；当$n$为偶数时，$|F_2| \geq 1$。若$|F_2| = 0$，则$|F_2| = |F_3| = \cdots = |F_n| = 0$。由定理2.13及定理2.3可知，$CF_n - F$连通，矛盾。得证。

由声明1可知，当n为奇数时，$1 \leq |F_1| \leq 3n-7$，且由$|F| = 3n-5$得$1 \leq |F_2| \leq \frac{3n-7}{2}$。否则倘若$|F_2| \geq \frac{3n-5}{2}$，则有$|F| \geq 2 \times \frac{3n-5}{2} + 1 = 3n-4 > |F|$，矛盾，得证；当$n$为偶数时，$1 \leq |F_1| \leq 3n-7$。且由$|F| = 3n-6$得$1 \leq |F_2| \leq \frac{3n-6}{2}$。否则倘若$|F_2| \geq \frac{3n-4}{2}$，则有$|F| \geq 2 \times \frac{3n-4}{2} = 3n-4 > |F|$，矛盾，得证。

情况1： n为奇数时，$|F_1| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1| \leq \frac{3n-8}{2}$。

由于$|F_1| = \max\{|F_i||1 \leq i \leq n\}$。由定理2.13可知，$CF_n^i - F_i$连通。由于$n \geq 5$且为奇数时，$2(n-2)! > 3n-9 = |F_i| + |F_j|$；$n \geq 6$且为偶数时，$(n-2)! > 3n-8 = |F_i| + |F_j|$，其中$i \neq j$且$ij \in [1n]$，再由定理2.3可知，$CF_n - F$连通，矛盾

情况2： n为奇数时，$\frac{3n-7}{2} \leq |F_1| \leq 3n-10$；$n$为偶数时，$\frac{3n-6}{2} \leq |F_1| \leq 3n-9$。

子情况2.1： n为奇数时，$|F_2| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_2| \leq \frac{3n-8}{2}$。

在此情况下，我们可以得到$i \in [2n]$，n为奇数时，$|F_i| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_i| \leq \frac{3n-8}{2}$。类似于情况1，我们可以得到，$CF_n[V(CF_n^i - F_i) \cup V(CF_n^j - F_j)]$是连通的，其中$i \neq j$且$ij \in [2n]$，故$CF_n[V(CF_n^2 - F_2) \cup V(CF_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(CF_n^n - F_n)]$连通。若$CF_n^1 - F_1$连通，当$|F_n| = 2$，$n \geq 5$且为奇数时有$2(n-1) + \frac{3n-7}{2} = \frac{7n-11}{2} > 3n-5$；$n \geq 6$且为偶数时有，则$2(n-1) + \frac{3n-6}{2} = \frac{7n-10}{2} > 3n-6$，故矛盾。因此$|F_n| \leq 1$，又因为$n \geq 5$且为奇数时，$2(n-2)! > 3n-10+1 = 3n-9 \geq |F_1| + |F_n|$；$n \geq 6$且为偶数时，$(n-2)! > 3n-9+1 = 3n-8 \geq |F_1| + |F_n|$，所以$CF_n[V(CF_n^1 - F_1) \cup V(CF_n^n - F_n)]$连通，故$CF_n - F$连通；若$CF_n^1 - F_1$不连通，由定理2.16可知，$CF_n^1 - F_1$或有两个分支，其中一个为孤立点，或有三个分支，其中两个为孤立点。令C为$CF_n^1 - F_1$中最大的分支，因为$n \geq 5$且为奇数时$2[(n-1)! - (3n-10) - 2] > 3n-5-\frac{3n-7}{2}$；$n \geq 6$且为偶数时$(n-1)! - (3n-9) - 2 > 3n-6-\frac{3n-6}{2}$，故$CF_n[V(C) \cup V(CF_2 - F_2) \cup V(CF_3 - F_3) \cup \cdots \cup V(CF_n - F_n)]$连通。与$F$为最小自然割矛盾。

子情况2.2：n为奇数时，$|F_2| = \frac{3n-7}{2}$；n为偶数时，$|F_2| = \frac{3n-6}{2}$。

在此情况下，n为奇数时，$|F_3| + |F_4| + \cdots + |F_n| \leq 2$；$n$为偶数时，$|F_3| + |F_4| + \cdots + |F_n| = 0$。由

定理2.13及定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^3-F_3)\cup V(CF_n^4-F_4)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通。假设$CF_n^2-F_2$连通，$n\geq 5$且为奇数时，$2[(n-1)!-\frac{3n-7}{2}]>2$；$n\geq 6$且为偶数时$(n-1)!-\frac{3n-6}{2}>0$。由定理2.6可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2)\cup V(CF_n^3-F_3)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通。倘若$CF_n^1-F_1$连通，$n\geq 5$且为奇数时，$2[(n-1)!-(3n-10)]>3n-5-\frac{3n-7}{2}$；$n\geq 6$且为偶数时$(n-1)!-(3n-9)>3n-6-\frac{3n-6}{2}$，因此$CF_n[V(CF_n^1-F_1)\cup V(CF_n^2-F_2)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通，即$CF_n-F$连通，矛盾；倘若$CF_n^1-F_1$不连通，根据条件由引理2.16可知，$CF_n^1-F_1$有两个分支，其中一个为孤立点或者有三个分支，其中两个为孤立点。我们令C为$CF_n^1-F_1$的最大分支，$n\geq 5$且为奇数时，$2[(n-1)!-(3n-10)-2]>3n-5-\frac{3n-7}{2}$；$n\geq 6$且为偶数时，$(n-1)!-(3n-9)-2>3n-6-\frac{3n-6}{2}$，则$CF_n[V(C)\cup V(CF_n^2-F_2)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通，与$F$为最小自然割矛盾。假设$CF_n^2-F_2$不连通，由定理2.15可知，$CF_n^2-F_2$有两个分支，其中一个为孤立点。令$B$为其最大分支，$n\geq 5$且为奇数时，$2[(n-1)!-\frac{3n-7}{2}-1]>2$；$n\geq 6$且为偶数时$(n-1)!-\frac{3n-6}{2}-1>0$，故$CF_n[V(B)\cup V(CF_n^3-F_3)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通。倘若$CF_n^1-F_1$连通，$n\geq 5$ 且为奇数时$2[(n-1)!-(3n-10)]>3n-5-\frac{3n-7}{2}$；$n\geq 6$且为偶数时$(n-1)!-(3n-9)>3n-6-\frac{3n-6}{2}$，因此$CF_n[V(CF_n^1-F_1)\cup V(B)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n)]$连通，与$F$为最小自然割矛盾；倘若$CF_n^1-F_1$不连通，由引理2.16可知，$CF_n^1-F_1$有两个分支，其中一个为孤立点或者有三个分支，其中两个为孤立点。令$B^{'}$为其最大分支，$n\geq 5$且为奇数时，$2[(n-1)!-(3n-10)-2]>3n-5-\frac{3n-7}{2}$；$n\geq 6$且为偶数时$(n-1)!-(3n-9)-2]>3n-6-\frac{3n-6}{2}$，可得$CF_n[V(B)\cup V(B^{'})\cup V(CF_n^3-F_3)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通。此时若$CF_n-F$不连通时，有下列五种情况：(1) CF_n-F有两个分支，其中一个为孤立点，矛盾；(2) CF_n-F有三个分支，其中两个为孤立点，矛盾；(3) CF_n-F有四个分支，其中三个为孤立点，矛盾；(4) CF_n-F有两个分支，其中一个为孤立边，得证；(5) CF_n-F有三个分支，其中一个为孤立点，另一个为孤立边，矛盾。

情况3： n为奇数时，$3n-9\leq|F_1|\leq 3n-7$；n为偶数时，$3n-8\leq|F_1|\leq 3n-7$。

在此情况下，可知n为奇数时，$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\leq 4$；$n$为偶数时，$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\leq 2$。由定理2.3及2.13可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2)\cup V(CF_n^3-F_3)\cup\cdots V(CF_n^n-F_n)]$连通。倘若$CF_n^1-F_1$连通时，由定理2.4可知，$CF_n-F$连通，矛盾；倘若$CF_n^1-F_1$不连通，设$B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_k$为$CF_n^1-F_1$的分支，若$|V(B_j)|\geq 3$，当$n$为奇数时，$|N(V(B_j))|\cap|[V(CF_n^2)\cup V(CF_n^3)\cup\cdots V(CF_n^n)]|\geq 6>4$；当$n$为偶数时，$|N(V(B_j))|\cap|[V(CF_n^2)\cup V(CF_n^3)\cup\cdots V(CF_n^n)]|\geq 3>2$。此时$CF_n^1-F_1$有两个分支，其中一个为孤立点；或有三个分支，其中两个为孤立点；或有四个分支，其中三个为孤立点，以上均不符，矛盾；或有两个分支，其中一个为孤立边，得证。

定理4.2 对于任意整数$n\geq 3$，n为奇数时，$n\lambda(CF_n)=3n-5$; 当n为偶数时，$n\lambda(CF_n)=3n-6$。

证明： 令$u=(1)$，$v=(12)$。当n为奇数时，$F=\{ux:x\in\{(1,i):3\leq i\leq n\}\cup\{j(j+1):j=2,4,\cdots,n-1\}\}\cup\{vx:x\in\{(1,i):3\leq i\leq n\}\cup\{j(j+1):j=2,4,\cdots,n-1\}\}$；$n$为偶数时，$F=\{ux:x\in\{(1,i):3\leq i\leq n\}\cup\{j(j+1):j=2,4,\cdots,n-2\}\}\cup\{vx:x\in\{(1,i):3\leq i\leq n\}\cup\{j(j+1):j=2,4,\cdots,n-2\}\}$。由定理2.2可知，$CF_n$无奇圈，则有$x\in V(CF_n-F)$，$n$为奇数时，$d_{CF_n-F}(x)\geq\frac{3n-5}{2}\geq 1$；$n$为偶数时，$d_{CF_n-F}(x)\geq\frac{3n-6}{2}\geq 1$。故$F$为$CF_n$的一个自然边割，则$n$为奇数时，$n\lambda(CF_n)\leq 3n-5$; 当$n$为偶数时，$n\lambda(CF_n)\leq 3n-6$。由引理2.18可知，$n$为奇数时，$|F|\geq 3n-5$；$n$为偶数时，$|F|\geq 3n-6$。因此当$n$为奇数时，$n\lambda(CF_n)=3n-5$; 当$n$为偶数时，$n\lambda(CF_n)=3n-6$，得证。

定理4.3　对于任意$n \geq 3$时，n为奇数时，CF_n为超自然3n-5边连通；n为偶数时，CF_n为超自然3n-6边连通。

证明：设F为CF_n的最小自然边割。由定理4.2可知，n为奇数时，$|F| = 3n - 5$；n为偶数时，$|F| = 3n - 6$。令$F_i = F \cap E(CF_n^i)$，其中$i \in [1, n]$，且$|F_1| > |F_2| > \cdots > |F_n|$。设$C$为$CF_n$中所有交叉边组成的集合，我们令$F_c = F \cap C$。接下来我们对$n$做分类讨论：

(1) $n = 3$，$|F| = 4$，显然此时$CF_3 - F$或连通，矛盾；或有两部分，其中一部分为孤立点，矛盾；或有两部分，其中一部分为孤立边，成立。

(2) $n = 4$，$|F| = 6$，有以下情况：

情况1：$|F_1| \leq 2$

在此情况下，$i \in [1, 4]$时，$|F_i| \leq 2$，$|F_c| \leq 6$，由于$CF_4^i \cong CF_3$，则由定理2.14可知，$CF_4^i - F_i$连通。再由定理2.3 可知，若$|F_c \cap ([V(CF_4^1), V(CF_4^2)] \cup [V(CF_4^1), V(CF_4^3)] \cup [V(CF_4^1), V(CF_4^4)])| = 6$，此时可显然，$CF_4 - F$有两个分支，其中一个为$CF_4^1 - F_1$，矛盾。若$|F_c| < 6$，则$CF_4 - F$连通，矛盾。

情况2：$|F_1| = 3$

子情况2.1：$|F_2| \leq 2$

在此情况下，$i \in [2, 4]$时，$|F_i| \leq 2$，$|F_c| \leq 3$，$CF_4^i \cong CF_3$，则由定理2.14可知，$CF_4^i - F_i$连通。再由2.3可知，任意两个子图中有$(4-2)! = 2$条交叉边，则$CF_4[V(CF_4^2 - F_2) \cup V(CF_4^3 - F_3) \cup V(CF_4^4 - F_4)] - F_c$ 连通。由于$CF_4^1 \cong CF_3$，由定理3.2可知，$CF_4^1 - F_1$连通或有两个分支，其中一个为孤立点。由$|F_2| + |F_3| + |F_4| + |F_c| = 3$可知，$CF_4 - F$连通或有两个分支，其中一个为孤立点。均不符，矛盾

子情况2.2：$|F_2| = 3$

在此情况下，$|F_3| + |F_4| + |F_c| = 0$，由定理2.3及定理2.14可知，$CF_4[V(CF_4^3 - F_3) \cup V(CF_4^4 - F_4)] - F_c$连通。倘若当$i \in [1, 2]$时，$CF_4^i - F_i$连通。可显然$CF_4 - F$连通，矛盾；倘若$CF_4^1 - F_1$连通，但$CF_4^2 - F_2$不连通时，由定理3.2可知，$CF_4^2 - F_2$有两个分支，其中一个为孤立点，由于$|F_c| = 0$，显然$CF_4 - F$连通，矛盾；若当$i \in [1, 2]$时，$CF_4^i - F_i$不连通，则由定理3.2可知，$CF_4^i - F_i$有两个分支，其中一个为孤立点$v_i$，根据$|F_c| = 0$可知，$CF_4[V(CF_4^1 - F_1 - v_1) \cup V(CF_4^2 - F_2 - v_2) \cup V(CF_4^3 - F_3) \cup V(CF_4^4 - F_4)] - F_c$连通。现假设$v_1 v_2$相连，则由定理2.4得，$|N(v_i) \cap (V(CF_4^3) \cup V(CF_4^4))| = 0$，由$|F_3| + |F_4| + |F_c| = 0$可知，该命题成立。故$CF_4 - F$有两个分支，其中一个为孤立边$v_1 v_2$，得证。否则连通，矛盾。

情况3：$|F_1| = 4$

在这种情况下，$|F_2| + |F_3| + |F_4| + |F_c| = 2$，由定理2.3及2.14可知，$CF_4[V(CF_4^2 - F_2) \cup V(CF_4^3 - F_3) \cup V(CF_4^4 - F_4)] - F_c$连通。由于$CF_4^1 \cong CF_3$，由(1)可知，$CF_4^1 - F_1$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点，或有两个分支，其中一个为孤立边uv，由定理2.4可知，$CF_4 - F$或有两个分支，其中一个为孤立边uv，得证。或连通或有两个分支，其中一个为孤立点，均不符矛盾。

情况4：$5 \le |F_1| \le 6$

在这种情况下，$|F_2|+|F_3|+|F_4|+|F_c| \le 1$。由定理2.3及定理2.14可知，$CF_4[V(CF_4^2-F_2)\cup V(CF_4^3-F_3)\cup V(CF_4^4-F_4)]-F_c$ 连通。此时设$CF_4^1-F_1$有$B_1,B_2,\cdots,B_k$个分支，其中k为正整数。当$|V(B_k)|\ge 2$时，由于$|F_c|\le 1$，可得，$CF_4[V(B_k)\cup V(CF_4^2-F_2)\cup V(CF_4^3-F_3)\cup V(CF_4^4-F_4)]-F_c$连通，故$CF_4-F$或连通或有两个分支，其中一个为孤立点，均不符，矛盾。

(3) $n\ge 5$时，有以下情况：

情况1：当n为奇数时，$|F_1|\le \frac{3n-9}{2}$；当n 为偶数时，$|F_1|\le \frac{3n-8}{2}$。

在此情况下，$i\in[1,n]$，当n为奇数时，$|F_i|\le\frac{3n-9}{2}$，$|F_c|\le 3n-5$；n为偶数时，$|F_i|\le\frac{3n-8}{2}$，$|F_c|\le 3n-6$。由定理2.14可知，$CF_n^i-F_i$连通。因为$n\ge5$且为奇数时$2(n-2)!\ge 3n-5$；$n\ge 6$且为偶数时$(n-2)!\ge 3n-6$。再由定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^1-F_1)\cup V(CF_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通。故$CF_n-F$连通，矛盾。

情况2：当n为奇数时，$|F_1|=\frac{3n-7}{2}$；当n为偶数时，$|F_1|=\frac{3n-6}{2}$。

子情况2.1：当n为奇数时，$|F_2|\le\frac{3n-9}{2}$；当n为偶数时，$|F_2|\le\frac{3n-8}{2}$。

在此情况下，$i\in[2,n]$，n为奇数时，$|F_i|\le\frac{3n-9}{2}$，$|F_c|\le\frac{3n-3}{2}$；n为偶数时，$i\in[2,n]$，$|F_i|\le\frac{3n-8}{2}$，$|F_c|\le\frac{3n-6}{2}$。由定理2.14可知，$CF_n^i-F_i$连通。因为$n\ge5$且为奇数时$2(n-2)!\ge\frac{3n-3}{2}$；$n\ge 6$且为偶数时$(n-2)!\ge\frac{3n-6}{2}$，再由定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2)\cup V(CF_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通。由定理3.2可知，$CF_n^1-F_1$连通或有两个分支，其中一个为孤立点。令$B$为其最大分支，由于$n\ge5$且为奇数时$2[(n-1)!-1]>\frac{3n-3}{2}$；$n\ge6$且为偶数时$(n-1)!-1>\frac{3n-6}{2}$。则$CF_n[V(B)\cup V(CF_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$ 连通。故CF_n-F或连通或有两个分支，其中一个为孤立点。均不符，矛盾。

子情况2.2：当n为奇数时，$\frac{3n-7}{2}\le|F_2|\le\frac{3n-3}{2}$；当$n$为偶数时，$|F_2|=\frac{3n-6}{2}$。

在此情况下，$i\in[3,n]$，n为奇数时，$|F_i|\le\frac{3n-7}{2}$，$|F_c|\le 2$；n为偶数时，$|F_i|\le\frac{3n-6}{2}$，$|F_c|=0$。由定理2.12可知，$CF_n^i-F_i$连通。$2(n-2)!>2$，$(n-2)!>0$。再由定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^3-F_3)\cup V(CF_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通。倘若当$i\in[1,2]$ 时，$CF_n^i-F_i$连通。可显然CF_n-F连通，矛盾；倘若$CF_n^1-F_1$连通，但$CF_n^2-F_2$不连通时，设有$B_1,B_2,\cdots,B_k$分支，其中k为正整数。当$|V(B_k)|\ge2$时，可知，$CF_n[V(CF_n^1-F_1)\cup V(B)\cup V(CF_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通，此时$CF_n-F$有一孤立点，矛盾；若当$i\in[1,2]$时，$CF_n^i-F_i$不连通，则由定理3.2可知：$CF_n^i-F_i$有两个分支，其中一个为孤立点$v_i$，根据定理2.3可知，$CF_n[V(CF_4^1-F_1-v_1)\cup V(CF_4^2-F_2-v_2)\cup V(CF_4^3-F_3)\cup V(CF_4^4-F_4)]-F_c$连通。倘若$v_1,v_2$相连，当$n$为奇数时，$|F_c|=2$且$F_c$与$v_i$均关联；$n$为偶数时，由于$|F_c|=0$，此时$CF_n-F$有两个分支，其中一个为孤立边$v_1v_2$，得证。否则或连通或有两个分支，其中一个为孤立点，均矛盾。

情况3：当n为奇数时，$\frac{3n-5}{2}\le|F_1|\le 3n-10$；当$n$为偶数时，$\frac{3n-4}{2}\le|F_1|\le 3n-9$。

子情况3.1：n为奇数时，$|F_i|\le\frac{3n-9}{2}$；n为偶数时，$|F_i|\le\frac{3n-8}{2}$。

在此情况下，$i\in[2,n]$，n为奇数时，$|F_i|\le\frac{3n-9}{2}$，$|F_c|\le\frac{3n-5}{2}$；n为偶数时，$|F_i|\le\frac{3n-8}{2}$，$|F_c|\le\frac{3n-8}{2}$。由定理2.14可知，$CF_n^i-F_i$连通。因为$n\ge5$且为奇数时$2(n-2)!\ge\frac{3n-7}{2}$；$n\ge6$且为偶

数时$(n-2)! \geq \frac{3n-7}{2}$，再由定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2) \cup V(CF_n^3-F_3) \cup \cdots \cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通。由定理2.18可知，$CF_n^1-F_1$或连通，此时显然$CF_n-F$连通，矛盾；或有两个分支，其中一个为孤立点，由于$n \geq 5$且为奇数时$2[(n-1)!-1] > \frac{3n-5}{2}$；$n \geq 6$且为偶数时$(n-1)!-1 > \frac{3n-8}{2}$。故此时$CF_n-F$有两个分支，其中一个为孤立点，矛盾。

子情况3.2：当n为奇数时，$\frac{3n-7}{2} \leq |F_2| \leq \frac{3n-5}{2}$。

在此情况下，$i \in [3,n]$，$|F_i| \leq \frac{3n-7}{2}$，$|F_c| \leq 1$，由定理2.14可知，$CF_n^i-F_i$连通。因为$n \geq 5$时$2(n-2)! \geq 1$，再由定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^3-F_3) \cup V(CF_n^4-F_4) \cup \cdots \cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通。倘若当$i \in [1,2]$时，$CF_n^i-F_i$连通。可显然$CF_n-F$连通，矛盾；倘若$CF_n^1-F_1$连通，但$CF_n^2-F_2$不连通时，由于$\frac{3n-5}{2} \leq 3n-10$，由定理2.17可知，$CF_n^2-F_2$有两个分支，其中一个为孤立点，又因为$|F_c| \leq 1$，显然，$CF_n-F$连通，矛盾；若当$i \in [1,2]$ 时，$CF_n^i-F_i$不连通，则由定理2.15可知：$CF_n^i-F_i$有两个分支，其中一个为孤立点v_i，因为$|F_c| \leq 1$，则显然CF_n-F连通，矛盾。

情况4：n为奇数时，$3n-9 \leq |F_1| \leq 3n-5$；$n$为偶数时，$3n-8 \leq |F_1| \leq 3n-6$

此时，n为奇数时，$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_c| \leq 4$；$n$为偶数时，$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_c| \leq 2$。由定理2.3及2.14可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2) \cup V(CF_n^3-F_3) \cup \cdots \cup V(CF_n^n-F_n)]-F_c$连通。现假设$CF_n^1-F_1$有$B_1, B_2, \cdots, B_k$个分支，其中$k$为正整数。当$|V(B_k)| \geq 3$时，由于$n$为奇数时，$|F_c| \leq 4$；$n$为偶数时，$|F_c| \leq 2$，可得$CF_n[V(B_k) \cup V(CF_n^2-F_2) \cup V(CF_n^3-F_3) \cup \cdots \cup V(CF_n^4-F_n)]-F_c$连通，故$CF_n-F$连通；或有两个分支，其中一个为孤立点；或有三个分支，其中两个为孤立点，以上均不符；或有两个分支，其中一个为孤立边，得证。

引理4.4 对于任意$n \geq 4$时，$F \subseteq V(CF_n) \cup E(CF_n)$，且当$n$为奇数时，$|F| \leq 3n-6$；当$n$为偶数时，$|F| \leq 3n-7$，则$CF_n-F$若不连通时满足下列两种情况：(i) CF_n-F有两个分支，其中一个为孤立点；(ii) CF_n-F有三个分支，其中两个为孤立点。

证明：当$n \geq 4$时，若$F \subseteq V(CF_n)$，且当n为奇数时，$|F| \leq 3n-6$；当n为偶数时，$|F| \leq 3n-7$，由定理2.16可知，CF_n-F满足下列两种情况：(i) CF_n-F有两个分支，其中一个为孤立点；(ii) CF_n-F有三个分支，其中两个为孤立点，成立；若$F \subseteq E(CF_n)$，且当n为奇数时，$|F| \leq 3n-6$；当n为偶数时，$|F| \leq 3n-7$，由定理2.17可知，CF_n-F有两个分支，其中一个为孤立点，也成立。

因此，假设$n \geq 4$时，$F \subseteq V(CF_n) \cup E(CF_n)$，且当$n$为奇数时，$|F| \leq 3n-6$；$n$为偶数时，$|F| \leq 3n-7$。我们假设$CF_n-F$是不连通的。其中$F \cap V(CF_n) \neq \emptyset$，$F \cap E(CF_n) \neq \emptyset$，令$F_i = F \cap V(CF_n^i)$，$F_i^e = F \cap E(CF_n^i)$，其中$i \in [1,n]$，且$|F_1 \cup F_1^e| \geq |F_2 \cup F_2^e| \geq \cdots \geq |F_n \cup F_n^e|$。设$C$为$CF_n$中所有交叉边的集合，令$F_c = F \cap C$，因此可知，当$n$为奇数时，$1 \leq |F_1|+|F_2|+\cdots+|F_n| \leq 3n-7$，$1 \leq |F_1^e|+|F_2^e|+\cdots+|F_n^e| \leq 3n-7$；当$n$为偶数时，$1 \leq |F_1|+|F_2|+\cdots+|F_n| \leq 3n-8$，$1 \leq |F_1^e|+|F_2^e|+\cdots+|F_n^e| \leq 3n-8$。

当$n=4$时，令$|F| \leq 5$，因为$CF_4^i \cong CF_3$。若$|F| \leq 3$时，由定理3.1可知，CF_4-F连通，矛盾；若$|F|=4$时，由定理3.3可知，CF_4-F有两个分支，其中一个为孤立点，得证；若$|F|=5$时，CF_4-F不连通，考虑以下情况：

情况1：$|F_1 \cup F_1^e|=5$

此时，$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 0$，显然$CF_4 - F$连通，矛盾。

情况2：$|F_1 \cup F_1^e| = 4$

此时，我们可以得到$CF_4^1 - F_1$有下列6种情况：(1) 连通；(2) 为两个孤立点；(3) 为三个孤立点；(4) 有两个分支，其中一个为孤立点；(5) 为两条孤立边；(6) 有三个分支，其中两个为孤立点。由于$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 1$，结合定理2.4可知，当$CF_4 - F$是情况(1)或(5)时，$CF_4 - F$连通，矛盾；当$CF_4 - F$是其他情况时，$CF_4 - F$不连通时，有两个分支，其中一个为孤立点，得证。

情况3：$|F_1 \cup F_1^e| = 3$

此时，我们可以得到$CF_4^1 - F_1$有下列3种情况：(1) 连通；(2) 有两个分支，其中一个为孤立点；(3) 为三个孤立点；由于$|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 2$，结合定理2.4可知，$CF_4 - F$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点，或有三个分支，其中两个是孤立点，得证。

情况3：$0 \leq |F_1 \cup F_1^e| \leq 2$

此时，由定理3.1可知，$i \in [1, 4]$，$CF_4^i - F_i - F_i^e$连通，由于$|N(CF_n^i| = 6 > |F|$，故$CF_4 - F$连通，矛盾。

因此，此结论对$n = 4$成立，我们对n作归纳法，假设当$n \geq 5$时，CF_{n-1}也成立，下面我们看CF_n。

(2) 当$n \geq 5$，n为奇数时，令$|F| \leq 3n - 6$；n为偶数时，令$|F| \leq 3n - 7$。

情况1：n为奇数时，$|F_1 \cup F_1^e| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1 \cup F_1^e| \leq \frac{3n-8}{2}$

此时：当$i \in [1n]$，n为奇数时，$|F_i \cup F_i^e| \leq \frac{3n-9}{2}$，$|F_c| \leq 3n-6$；$n$为偶数时，$|F_i \cup F_i^e| \leq \frac{3n-8}{2}$，$|F_c| \leq 3n - 7$。由定理3.1可知，$CF_n^i - F_i - F_i^e$连通，因为$n \geq 5$且为奇数时$2(n-2)! > 3n - 6$；$n \geq 6$且为偶数时$(n-2)! > 3n - 7$，再结合定理2.3可知，$CF_n - F$连通。

情况2：n为奇数时，$|F_1 \cup F_1^e| = \frac{3n-7}{2}$；$n$为偶数时，$|F_1 \cup F_1^e| = \frac{3n-6}{2}$。

子情况2.1：n为奇数时，$|F_2 \cup F_2^e| \leq \frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_2 \cup F_2^e| \leq \frac{3n-8}{2}$。

此时，n为奇数时，$|F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq \frac{3n-5}{2}$；$n$为偶数时，$|F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq \frac{3n-8}{2}$。由定理3.1可知，当$i \in [2n]$时，$CF_n^i - F_i - F_i^e$连通。因为$n \geq 5$且为奇数时$2(n-2)! > \frac{3n-5}{2}$；$n \geq 6$且为偶数时$(n-2)! > \frac{3n-8}{2}$。再结合定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^2 - F_2 - F_2^e) \cup V(CF_n^3 - F_3 - F_3^e) \cup \cdots \cup V(CF_n^n - F_n - F_n^e)] - F_c$连通。由定理3.3可知，$CF_n^1 - F_1 - F_1^e$或连通或有两个分支，其中一个为孤立点。当$CF_n^1 - F_1 - F_1^e$连通时，显然$CF_n - F$连通。当$CF_n^1 - F_1 - F_1^e$有两个分支，其中一个为孤立点$v$时，因为$n \geq 5$且为奇数时$2[(n-1)! - \frac{3n-7}{2} - 1] > \frac{3n-5}{2}$；$n \geq 6$且为偶数时$(n-1)! - \frac{3n-6}{2} - 1 > \frac{3n-8}{2}$，再结合定理2.3可知，$CF_n[V(CF_n^1 - F_1 - F_1^e - v) \cup V(CF_n^2 - F_2 - F_2^e) \cup \cdots \cup V(CF_n^2 - F_2 - F_2^e)] - F_c$连通。故$CF_n - F$有两个分支，其中一个为孤立点，得证。

子情况2.2：n为奇数时，$|F_2 \cup F_2^e| = \frac{3n-7}{2}$。

此时，$|F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + \cdots + |F_n \cup F_n^e| + |F_c| \leq 1$。类似于上述子情况2.1可知，$CF_n[V(CF_n^3 -$

$F_3-F_3^e)\cup V(CF_n^4-F_4-F_4^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。当$i\in\{1,2\}$时，由定理3.3可知，$CF_n^i-F_i-F_i^e$或连通或有两个分支，其中一个为孤立点$v_i$。假设$CF_n^i-F_i-F_i^e$连通，显然$CF_n-F$连通；假设$CF_n^1-F_1-F_1^e$ 不连通而$CF_n^2-F_2-F_2^e$连通时，因为$n\geq 5$时$2[(n-2)!-\frac{3n-7}{2}-1]>1$，故$CF_n[V(CF_n^1-F_1-F_1^e-v_1)\cup V(CF_n^2-F_2-F_2^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。故$CF_n-F$或连通或有两个分支，其中一个为孤立点；假设$CF_n^i-F_i-F_i^e$不连通，由定理3.3可知，$CF_n^i-F_i-F_i^e$有两个分支，其中一个为孤立点$v_i$。由于$2[(n-1)!-\frac{3n-7}{2}-1]>1$，故$CF_n[V(CF_n^1-F_1-F_1^e-v_1)\cup V(CF_n^2-F_2-F_2^e-v_2)\cup\ V(CF_n^3-F_3-F_3^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。由于$|F_3\cup F_3^e|+|F_4\cup F_4^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|\leq 1$，再结合定理2.6可得$CF_n-F$连通，矛盾。或有两个分支，其中一个为孤立点，得证。

情况3：n为奇数时，$|F_1\cup F_1^e|=\frac{3n-5}{2}$。

子情况3.1：n为奇数时，$|F_2\cup F_2^e|\leq\frac{3n-9}{2}$。

此时，$|F_3\cup F_3^e|+|F_4\cup F_4^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|\leq\frac{3n-7}{2}$，由定理2.3及3.1可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2-F_2^e)\cup V(CF_n^3-F_3-F_3^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。由于$\frac{3n-5}{2}\leq 3n-10=3(n-1)-7(n\geq 5)$，由归纳法，$CF_n^1-F_1-F_1^e$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点，或有三个分支，其中两个为孤立点。由于$2[(n-1)!-\frac{3n-5}{2}-2]>\frac{3n-7}{2}$，故$CF_n-F$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点，或有三个分支，其中两个为孤立点，得证。

子情况3.2：n为奇数时，$|F_2\cup F_2^e|=\frac{3n-7}{2}$。

此时，$|F_3\cup F_3^e|+|F_4\cup F_4^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|=0$，由定理2.6可知，$CF_n-F$连通。

情况4：n为奇数时，$\frac{3n-3}{2}\leq|F_1\cup F_1^e|\leq 3n-10$；$n$为偶数时，$\frac{3n-4}{2}\leq|F_1\cup F_1^e|\leq 3n-9$。

此时，n为奇数时，$|F_2\cup F_2^e|+|F_3\cup F_3^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|\leq\frac{3n-9}{2}$；$n$为偶数时，$|F_2\cup F_2^e|+|F_3\cup F_3^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|\leq\frac{3n-10}{2}$。由定理2.3及3.1可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2-F_2^e)\cup V(CF_n^3-F_3-F_3^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。由归纳法可知，$CF_n^1-F_1-F_1^e$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点，或有三个分支，其中两个为孤立点。令$|F_1\cup F_1^e|=i$，$n\geq 5$且为奇数时$2[(n-1)!-i-2]>\frac{3n-9}{2}$；$n\geq 6$且为偶数时，$(n-1)!-i-2>\frac{3n-10}{2}$，故$CF_n-F$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点，或有三个分支，其中两个为孤立点。

情况5：n为奇数时，$3n-9\leq|F_1\cup F_1^e|\leq 3n-6$；$n$为偶数时，$3n-8\leq|F_1\cup F_1^e|\leq 3n-7$。

此时，n为奇数时，$|F_2\cup F_2^e|+|F_3\cup F_3^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|\leq 3$；$n$为偶数时，$|F_2\cup F_2^e|+|F_3\cup F_3^e|+\cdots+|F_n\cup F_n^e|+|F_c|\leq 1$，由定理2.3及3.1可知，$CF_n[V(CF_n^2-F_2-F_2^e)\cup V(CF_n^3-F_3-F_3^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。假设$CF_n^1-F_1-F_1^e$有分支$B_1B_2\cdots B_k$。当$|V(B_k)|\geq 2$时，由定理2.4可知，$CF_n[V(B_k)\cup V(CF_n^2-F_2-F_2^e)\cup V(CF_n^3-F_3-F_3^e)\cup\cdots\cup V(CF_n^n-F_n-F_n^e)]-F_c$连通。故$CF_n-F$或连通，或有两个分支，其中一个为孤立点。

定理4.5 任意整数$n\geq 4$时，当n为奇数时，$n\kappa\lambda(CF_n)=3n-5$；当$n$为偶数时，$n\kappa\lambda(CF_n)=3n-7$。

令F为CF_n的一个最小自然强割，由引理4.4可知，当n为奇数时，$|F|\geq 3n-5$；当n为偶数时，$|F|\geq 3n-6$。我们令$u=(1)$，$v=(12)$。且n为奇数时令$F=\{ux: x\in\{(1i): 3\leq i\leq n\}\cup\{(ii+1): i=2,4,\cdots,n-1\}\cup\{(12)(1,i): 3\leq i\leq n\}\cup\{(i(i+1): i=2,4,\cdots,n-2)\}$；$n$

偶数时令$F = \{uxx \in \{(1i) : 3 \le i \le n\} \cup \{(i(i+1) : i = 2, 4, \cdots, n-2)\} \cup \{(12)(1,i) : 3 \le i \le n\} \cup \{(i(i+1) : i = 2, 4, \cdots, n-1)\}\}$。由于$CF_n$无奇圈，故$F$为$CF_n$的一个强自然割，故当$n$为奇数时，$n\kappa\lambda(CF_n) \le 3n-5$；$n$为偶数时，$n\kappa\lambda(CF_n) \le 3n-6$。结合上述得证。

5. 结论

本文研究了叶形图CF_n的一些强连通性质，相较传统的连通性，该性质允许边和点可同时发生故障，更适用于一般情况。并且得到了对于任意整数$n \ge 4$，n为奇数时，$\kappa\lambda(CF_n) = \frac{3n-3}{2}$；$n$为偶数时，$\kappa\lambda(CF_n) = \frac{3n-4}{2}$，即去掉这些数量的强割后，叶形图可能会孤立出一个点；在加强条件后得到了，n为奇数时，$n\kappa\lambda(CF_n) = 3n-5$；$n$为偶数时，$n\kappa\lambda(CF_n) = 3n-7$，即去掉这些数量的强割后，叶形图可能会孤立出一条边。本文只研究了叶形图要想孤立出一个点或一条边，需要去掉强割的最小基数，那么叶形图要想孤立两个点甚至更多的情况，需要去掉强割的基数就有赖于大家的研究了。

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (61772010)，山西省基础研究计划 (202203021221128)。

参考文献

[1] Bondy, J. and Murty, U. (2008) Graph Theory. Springer, Berlin.

[2] Hung, C.-N., Hsu, H.-C., Liang, K.-Y. and Hsu, L.-H. (2003) Ring Embedding in Faulty Pancake Graphs. *Information Processing Letters*, **86**, 271-275. https://doi.org/10.1016/S0020-0190(02)00510-0

[3] Tutte, W.T. (1966) Connectivity in Graphs. University of Toronto Press, Toronto.

[4] Whitney, H. (1932) Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. *American Journal of Mathematics*, **54**, 150-168. https://doi.org/10.2307/2371086

[5] Wang, M., Yang, W., Guo, Y. and Wang, S. (2016) Conditional Fault Tolerance in a Class of Cayley Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, **3**, 67-82.

[6] Zhao, S. and Hao, R. (2019) The Generalized Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **30**, 793-809. https://doi.org/10.1142/S0129054119500229

[7] Guo, L. and Ekinci, G.B. (2023) Connectivity and Super Connectivity of Folded Hypercube-Like Networks. *Theoretical Computer Science*, **976**, 114-151. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.114151

[8] Lin, C.-K., Zhang, L., Fan, J. and Wang, D. (2016) Structure Connectivity and Substructure Connectivity of Hypercubes. *Theoretical Computer Science*, **634**, 97-107. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2016.04.014

[9] Guo, J. and Lu, M. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **291**, 109-119. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.03.006

[10] Wang, S. and Wang, M. (2019) The Strong Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *The Computer Journal*, **62**, 715-729. http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/bxy077

[11] Feng, W. and Wang, S. (2020) The 2-Extra Connectivity of Wheel Networks. *Mathematical Problems in Engineering*, **2020**, Article ID: 8910240. https://doi.org/10.1155/2020/8910240

[12] Wang, S., Wang, Y. and Wang, M. (2019) Connectivity and Matching Preclusion for Leaf-Sort Graphs. *Journal of Interconnection Networks*, **19**, Article 1940007. https://doi.org/10.1142/S0219265919400073

[13] Zhao, J. and Wang, S. (2020) Connectivity and Nature Diagnosability of Leaf-Sort Graphs. *Journal of Interconnection Networks*, **20**, Article 2050011. https://doi.org/10.1142/S0219265920500115

[14] Wang, M., Xiang, D. and Wang, S. (2020) Connectivity and Diagnosability of Leaf-Sort Graphs. *Parallel Processing Letters*, **30**, Article 2040004. https://doi.org/10.1142/S0129626420400046