Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(3), 1156-1175**
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133107

泡型图的强连通性

郭小丽，王世英*

山西师范大学数学与计算机科学学院，山西 太原

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月21日；发布日期：2024年3月29日

摘 要

一个互联网络系统通常由一个简单无向连通图 $G = (V(G), E(G))$ 构成，其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示互联网络中的处理器和处理器之间的通信链路。在互联网络中，处理器或者通信链路出现故障是不可避免的，而连通性和边连通性是评估互联网络容错性和可靠性的主要参数。基于这种情况，提出了互联网络的强连通性，强连通性允许处理器和通信链路同时发生故障。在本文中，我们研究了当 $n \geq 4$ 时，n-维泡型图 B_n 的强连通性和强自然连通性以及强自然边连通性等相关性质。

关键词

连通性，强连通性，强自然连通性，泡型图

The Strong Connectivity of Bubble-Sort Graphs

Xiaoli Guo, Shiying Wang*

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University,
Taiyuan Shanxi

Received: Feb. 27^{th}, 2024; accepted: Mar. 21^{st}, 2024; published: Mar. 29^{th}, 2024

* 通讯作者。

文章引用: 郭小丽, 王世英. 泡型图的强连通性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 1156-1175.
DOI: 10.12677/aam.2024.133107

Abstract

A network is usually modeled by a simple undirected graph $G = (V(G), E(G))$, where $V(G)$ and $E(G)$ represent processors and links between processors, respectively. In the interconnect network, the failure of processors or communication links is unavoidable. The connectivity and edge-connectivity of G are major parameters to evaluate the fault-tolerance and reliability of a network. Based on such circumstances, strong connectivity of the internet is proposed, it allows both processors and links to fail at the same time. In this paper, we study strong connectivity of B_n for $n \geq 4$, including the strong natural connectivity and strong natural edge-connectivity of B_n and so on.

Keywords

Connectivity, Strong Connectivity, Strong Natural Connectivity, Bubble-Sort Graphs

1. 引言

一个互联网络系统通常由一个简单无向连通图$G = (V(G), E(G))$构成，其中$V(G)$ 和$E(G)$ 分别表示互联网络中的处理器和处理器之间的通信链路。一个图G的连通度（或边连通度）是指去掉最少的点（或边），使得图G不连通或者是一个平凡图，分别记作$\kappa(G)$和$\lambda(G)$。一个图G的超（边）连通度是指去掉最少的点（边），使图G不连通，且每个连通分支至少包含两个顶点。对于图G 的任意一个顶点v，我们用$N_G(v)$ 来表示顶点v的邻域，即和v相连的顶点集。用$d_G(v)$来表示顶点v 在图G 中的度，即与顶点v 相连的边数。显然，我们有$d_G(v) = |N_G(v)|$。对于一个顶点集$X \subseteq V(G)$，X的邻域$N_G(X) = \{\bigcup_{x \in X} N_G(x)\} \backslash X$。在一个图$G$ 中，如果任意一个顶点v 的度都为k，那么我们就称图G是k-正则图。如果$d_G(v) = 0$，则v是一个孤立点。对于一个非空顶点集$V' \subset V(G)$，G中V'的诱导子图记为$G[V']$，该诱导子图的顶点集为V'，边集为G中所有端点都在V'中的边的集合。泡型图是一个具有吸引力的互联网络，在研究多处理器系统中扮演着重要的角色，并且具有一些良好的拓扑性质，如节点对称、$(n-1)$-正则和二分等性质，参见文[1–9]。

在互联网络中，由于处理器或者通信链路可能都会发生故障，从而导致整个互联网芯片被替换。连通性和边连通性是评估一个互联网络容错能力的主要参数，当网络拓扑结构中有一定数量的节点和链路发生故障时，我们希望网络仍能保持其原始性质。基于此背景下，强连通性被提出。强连通性综合了点连通性和边连通性，它允许节点和通信链路同时发生故障。一个非平凡图G，取故障集$F \subseteq V(G)$，若$G-F$不连通，则F是图G的一个顶点割。同样地，若故障集$F \subseteq E(G)$，且$G-F$不连通，则F是图G的一个边割。取故障集$F \subseteq V(G)$，若对任意的顶点$x \in V(G) \backslash F$，都有$|N_G(x) \cap (V(G) \backslash F)| \geq g$，则称$F$是一个$g$-好邻故障集。使得$G-F$不连通的一个$g$-好邻故障集$F$被称为图$G$的一个$g$-好邻割。$g$-好邻割的最小基数称为图$G$的$g$-好邻连通度，记为$\kappa^{(g)}(G)$。如果$G-F$的每个分支至少有$(g+1)$个顶点，则称故障集$F$是图$G$的一个$g$-额外故障集。使得$G-F$不连通的一个$g$-额外故障集$F$被称为图$G$的一个$g$-额外割。$g$-额外割的最小基数称为图$G$的$g$-额外连通度，记为$\tilde{\kappa}^{(g)}(G)$。参见文[10–16]。在这篇文章中，我们主要研究了泡型图B_n的强连通性，证明了B_n的紧超连通性和紧超边连通性都是$n-1$，还证明了B_n的强自然边连通性是$2n-4$。

本文剩下部分的安排如下：第2部分介绍了n维泡型图B_n的定义和一些相关的性质。第3部分讨论了n维泡型图B_n的强紧超连通性。第4部分研究了n维泡型图B_n的强自然连通性。第5部分对本文进行了总结。

2. 预备知识

这一章节中，我们给出了泡型图的概念和一些相关性质，同时，我们还给出了在下一章节中会应用到的一些引理。

为了方便，我们用$p_1 p_2 \cdots p_n$来表示置换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$。置换有时也用不相交的轮换的乘积表示,例如$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$。特别地，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$。对于此处未定义的术语和符号，我们遵循[17].

设$[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$，$S_n$为$[n]$上包含所有置换$p_1 p_2 \cdots p_n$的对称群。$n$维泡型图$B_n$是顶点集为$V(B_n) = S_n$的图，当且仅当$u = v(i, i+1)(1 \leq i \leq n-1)$时，其中两个顶点$u$和$v$相邻。显然，$B_n$是一个$n-1$正则图，$|V(B_n)| = n!$，$|E(B_n)| = \frac{(n-1)n!}{2}$。我们可以将$B_n$ 分解为n个子图$B_n^1, B_n^2, \cdots, B_n^n$，其中每个顶点$u = x_1 x_2 \cdots x_n \in V(B_n)$的最后一个位置$x_n$为一个固定的整数$i, i \in [n]$，则$B_n^i$同构于$B_{n-1}$。设$v \in V(B_n)$，那么$v(n-1, n)$被称为$v$的外部邻域，显然$B_n$中每个顶点都有一个外部邻域。$B_n$是一个特殊的$Cayley$ 图，泡型图B_4见图 1。

定义2.1 ([14]) 设$G = (V, E)$是一个非平凡连通图。如果$\delta(G-F) \geq g$，则强故障集$F \subseteq V \cup E$称为强g-好邻故障集。使得$G-F$不连通的一个强g-好邻故障集F被称为图G的一个强g-好邻割。强g-好邻割的最小基数称为图G的强g-好邻连通度，用$\kappa\lambda^{(g)}(G)$表示。若图G有一个强g- 好邻割，则连通图G是强g-好邻连通的。图G的强0-好邻连通度也称作图G的强连通度，记为$\kappa\lambda(G)$。图G的强1-好邻连通度也称作图G的强自然连通度，记为$n\kappa\lambda(G)$。若$F \subseteq E$，则图G的强自然连通度称为图G的自然边连通度，表示为$n\lambda(G)$。

假设$g' \geq g$。如果一个连通图G是强g'-好邻连通的，那么图G有一个强g'-好邻割F。因此可以

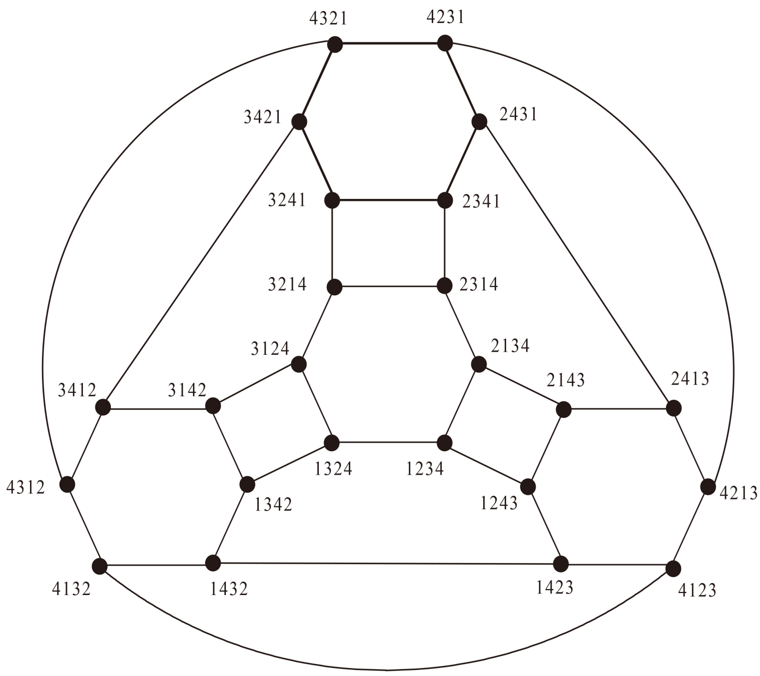

Figure 1. The bubble-sort graph B_4

图 1. 泡型图B_4

得到$\delta(G-F)\geq g^{'}$，再结合$g^{'}\geq g$，我们有$\delta(G-F)\geq g$。因此，图G也是强g-好邻连通的。由此我们有下述定理成立。

定理2.2 ([14]) 令$g^{'}\geq g$，且G是一个强$g^{'}$-好邻连通图，则$\kappa\lambda^{(g^{'})}(G)\geq\kappa\lambda^{(g)}(G)$。

定义2.3 ([14]) 设$G=(V,E)$是一个非平凡连通图，如果$G-F$的每个分支至少有$g+1$个顶点，则强故障集$F\subseteq V\cup E$称为强g-额外故障集。使得$G-F$ 不连通的一个强g-额外故障集F 被称为图G的一个强g-额外割。强g-额外割的最小基数称为图G的强g-额外连通度，用$\tilde{\kappa\lambda}^{(g)}(G)$表示。若图$G$ 有一个强g-额外割，则连通图G是强g-额外连通的。

假设$g^{'}\geq g$。如果一个连通图G是强$g^{'}$-额外连通的，那么图G有一个强$g^{'}$-额外割F。因此可以得到$G-F$的每个分支至少有$g^{'}+1$个顶点，再结合$g^{'}\geq g$，我们有$G-F$的每个分支至少有$g+1$个顶点。因此，图G也是强g-额外连通的。由此有下述定理成立。

定理2.4 ([14]) 令$g^{'}\geq g$，且G是一个强$g^{'}$-额外连通图，则$\tilde{\kappa\lambda}^{(g^{'})}(G)\geq\tilde{\kappa\lambda}^{(g)}(G)$。

定理2.5 ([14]) 令G是一个强g-好邻连通图，则$\kappa\lambda^{(g)}(G)\geq\tilde{\kappa\lambda}^{(g)}(G)$。

定理2.6 ([14]) 令G是一个强g-额外连通图，当$g=0,1$时，有$\kappa\lambda^{(g)}(G)=\tilde{\kappa\lambda}^{(g)}(G)$。

在本文中，我们通常假定$n\geq 4$并且根据最后一个位置的标签字符串i对B_n进行划分，其中$1\leq i\leq n$。定义$E_{i,j}(B_n)=E_{B_n}(V(B_n^i),V(B_n^j))$，其中$i,j\in[1,n]$且$i\neq j$。对于任意$x\in V(B_n^i)$，我们定义$x^+=x(n-1,n)$，被称为$x$的外部邻域，$B_n$有以下性质。

命题1 ([17]) 对于任何整数$n\geq 2$，B_n是$(n-1)$-正则的，是顶点传递的。

命题2 ([17]) 对于任何整数$n \geq 2$，B_n是二部图。

命题3 ([17]) 对于对于任何整数$n \geq 3$，B_n的围长为4。

命题4 ([17]) 设B_n是泡型图，那么$\kappa(B_n) = n - 1\lambda(B_n) = n - 1$。

命题5 ([17]) 设B_n是泡型图，则有下述定理成立：

(1) 对于$i, j \in [1, n]$且$i \neq j$，$|E_{i,j}(B_n)| = (n-2)!$;

(2) 对于$x, y \in V(B_n^i), N_x^+ \cap N_y^+ = \emptyset$;

(3) 对于$x, y \in V(B_n), |N_{B_n}(x) \cap N_{B_n}(y)| \leq 2$。

命题6 ([18]) 对于$n \geq 3$时，B_n 的超连通度是$2n-4$。

3. B_n的强紧超连通性

在这一节中，B_n的强紧超连通性被证明。在证明本文的最终结论之前，我们先证明几个有用的定理。

定理3.1 对于任何整数$n \geq 2$，$\kappa\lambda(B_n) = n - 1$。

证明： 令F是B_n的最小强割。若$F \in V(B_n)$，根据命题4，有$|F| = n - 1$。若$F \in E(B_n)$，根据命题4有$|F| = n - 1$。故该定理的结果在上述情况中成立。因此，假设$n \geq 2$且$F \notin V(B_n)$。令$F_v = F \cap V(B_n), F_v \neq \emptyset$，且令$F_e = F \cap E(B_n), F_e \neq \emptyset$。假设$F$是$B_n$的最小强割，且$|F| \leq n-2$。因为$|F_v| \leq n-3$，由命题4可得$B_n - F_v$是连通的。因为$F_e$是$B_n - F_v$的最小边割，故$B_n - F_v - F_e$有两个分支，令$|F_e| = i$，因为$n \geq 2$，所以$n! - |F_v| \geq n! - (n-2-i) > 2(i+1)$成立。因此，在$B_n - F_v - F_e$中有一个分支$C$，使得$|V(C)| \geq i+1$。在$C$中，令顶点集$V_c$是由在$B_n - F_v$中与$F_e$关联的顶点构成，因此$|V_c| \leq |F_e| = i$。由于$|V_c| + |F_v| \leq |F_e| + |F_v| = |F| \leq n-2$。由命题4得$B_n - F_v - F_e$ 是连通的，因此$B_n - F$是连通的，与F是B_n 的最小强割矛盾，故$|F| \geq n-1$。令$u = (1), v = (12)$，并且令$F = \{(i, i+1) : 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{uv\}$，则$F$是$B_n$的一个强割，因此$\kappa\lambda(B_n) \leq n-1$，结合$\kappa\lambda(B_n) \geq n-1$,则有$\kappa\lambda(B_n) = n-1$。

如果图G的每个最小顶点割F都至少孤立出一个顶点，则连通图G是超连通的。此外，若$G - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点，则图G是紧$|F|$超连通的。

定理3.2 对于任何整数$n \geq 4$，B_n是紧$(n-1)$超连通的。

证明： 令F是B_n的最小顶点割，由命题4得$|F| = n-1$。令$F_i = F \cap V(B_n^i)$，其中$i \in [1, n]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots |F_n|$。令$B_n - F$是不连通的，对$n$进行以下分类讨论：

(1) $n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = 3$，并且$B_4^i \cong B_3$。我们需要考虑以下几种情况。

声明1： $|F_4| = 0$。

声明1的证明： 若$F_4 \neq 0$，则$|F_4| \geq 1$。故$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq 1$，所以$|F_1| + |F_2| + |F_3| + |F_4| \geq 4$，而$|F| = 3$，矛盾，故$|F_4| = 0$。

根据声明1得：$1 \geq |F_2| \geq |F_3| \geq 0$，并且由$|F| = 3$可知$1 \leq |F_1| \leq 3$。若$|F_2| = 2$，则$|F| \geq 2 \times 2 = 4$，这与$|F| = 3$矛盾，故$|F_2| \leq 1$。

情况1： $|F_1| = 3$。

在这种情况下，$|F_2| = |F_3| = |F_4| = 0$，故$B_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2, 4]$。由命题5(1)可得：$B_4\left[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) - V(B_4^4 - F_4)\right]$是连通的。根据$|F_1| = 3$且$B_4^1 \cong B_3$，则可得到$B_4^1 - F_1$是连通的，或者$B_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，或者$B_4^1 - F_1$有三个孤立点。若$B_4^1 - F_1$是连通的，则$B_4 - F$是连通的，与$B_4 - F$不连通矛盾；若$B_4^1 - F_1$ 有两个分支，其中一个是孤立点，由定义知每个点都有一个外部邻域，故$B_4 - F$连通，与$B_4 - F$不连通矛盾；若$B_4^1 - F_1$有三个孤立点，类似可得$B_4 - F$连通，矛盾。

情况2： $|F_1| = 1$。

在这种情况下，$|F_1| = |F_2| = |F_3| = 1$。由命题5(1)得任意两个不同的子图$B_n^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，故$B_4 - F$是连通的，矛盾。

情况3： $|F_1| = 2$。

在这种情况下，$|F_2| = 1, |F_3| = |F_4| = 0$。$|F_1| = 2$时，$B_4^1 - F_1$是连通的，或者有两个分支，其中一个是孤立点，或者有两个分支，每个分支是二阶完全图K_2。由命题5(1)，若$B_4^1 - F_1$是连通的，则$B_4 - F$是连通的，矛盾；若$B_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个是孤立点u，令$F_2 = \{u^+\}$，此时$B_4\left[V(B_4^1 - u - F_1) \cup V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)\right]$是连通的，因此$B_4 - F$有两个分支，其中一个是孤立点。否则$B_4 - F$连通，矛盾。若$B_4^1 - F_1$有两个分支，每个分支是二阶完全图$K_2$，由命题5(1)可知$B_4 - F$是连通的，矛盾。

(2) $n \geq 5$

对于$n = 4$时结论成立，我们对n进行归纳假设。假设$n \geq 5$时，对于B_{n-1}结果成立，即若F是B_{n-1}的最小顶点割，则$B_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况1： $|F_1| \leq n - 3$。

在这种情况下，$|F_i| \leq n - 3$，其中$i \in [1, n]$。由$B_n^i \cong B_{n-1}$和命题4 可得，$B_n^i - F_i$是连通的。由命题5(1)可得任意两个不同子图B_n^i 之间有$(n-2)!$条独立的交叉边，又$n \geq 5$，则$(n-2)! \geq 2n - 6 \geq |F_i| + |F_j|$，其中$i \neq j$，$i, j \in [1, n]$。则$B_n - F$是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1| = n - 2$。

在这种情况下，$|F_2| = 1, |F_i| = 0$，其中$i \in [3, n]$。由命题4和命题5(1)可知，$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通的。由于$B_n^i \cong B_{n-1}$，根据归纳假设$B_n^1 - F_1$是连通的或者两个分支，其中一个分支是一个孤立点。若$B_n^1 - F_1$ 连通，则$B_n - F$是连通的，矛盾；若$B_n^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v。令$F_2 = \{v^+\}$，因为$B_n[V(B_n^1 - F_1 - v) \cup V(B_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通的。因此，$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。否则$B_n - F$连通，矛盾。

情况3： $|F_1| = n - 1$。

在这种情况下，$|F_i| = 0$，其中$i \in [2, n]$。由命题4和命题5(1)可知，$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 -$

$F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的，由定义可知$B_n^1-F_1$中每个点都有一个外部邻域，故$B_n-F$ 连通，矛盾。

综上所述，B_n是紧$(n-1)$超连通的。

如果图G的最小边割F都能孤立出来一个顶点，则连通图G是紧$|F|$超边连通的。

定理3.3 对于任何整数$n\geq 4$，B_n是紧$(n-1)$超边连通的。

证明： 令F是B_n的最小边割，由命题4得$|F|=n-1$。令$F_i=F\cap E(B_n^i)$，其中$i\in[1,n]$ 且$|F_1|\geq|F_2|\geq\cdots|F_n|$。设$C$是$B_n$中所有的交叉边构成的集合，同时令$F_c=F\cap C$。我们对$n$进行以下分类讨论：

(1) $n=4$

当$n=4$时，$|F|=3$且$B_4^i\cong B_3$。类似于定理3.2的声明1，$|F_4|=0$，故$1\leq|F_1|\leq 3,1\geq|F_2|\geq|F_3|\geq 0$

情况1： $|F_1|=1$。

由$B_4^i\cong B_3$和命题4可得$B_4^i-F_i$是连通的，$i\in[1,4]$。由命题5(1)，我们可以得到任意两个不同的子图B_4^i之间有$(n-2)!=2$条独立的交叉边。注意到$|F|=3$,不失一般性，我们假设$|F_c\cap[V(B_4^1),V(B_4^2)]|=2$。因为$|F_c|\leq 3$且$B_n^1$中所有顶点的外部邻域有$(n-1)!=6$，由命题5(1)可知，$B_4[V(B_4^1-F_1)\cup V(B_4^3-F_3)\cup V(B_4^4-F_4)]$ 是连通的。类似地，$B_4[V(B_4^2-F_2)\cup V(B_4^3-F_3)\cup V(B_4^4-F_4)]$是连通的。因此，$B_4-F$是连通的，矛盾。令$|F_c\cap[V(B_4^1),V(B_4^2)]|<2$，$i,j\in[1,4]$且$i\neq j$。类似地，我们也可以得到$B_4-F$是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1|=2$。

这种情况下，$|F_c|\leq 1$且$|F_i|\leq 1$，其中$i\in[2,4]$且$B_4^i\cong B_3$。由命题4 可知，$B_4^i-F_i$是连通的。因为$|F_1|=2$，所以$B_4^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，或者有两个连通分支，每个分支顶点个数大于等于2。若$B_4^1-F_1$有两个连通分支，由命题5(1)可得任意两个不同子图B_4^i 之间有$(n-2)!=2$ 条独立的交叉边，而$|F_c|\leq 1$，因而B_4-F 是连通的，矛盾；若$B_4^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v。若$|F_c|=1$且不与v关联或$|F_c|=0$，则B_4-F连通，矛盾。若$|F_c|=1$且与v关联，则$B_4[V(B_4^1-v-F_1)\cup V(B_4^2-F_2)\cup V(B_4^3-F_3)\cup V(B_4^4-F_4)]$是连通的，因此$B_4-F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

情况3： $|F_1|=3$。

这种情况下，$|F_2|=|F_3|=|F_4|=|F_c|=0$，由命题4和命题5(1)可得$B_4-F$是连通的，矛盾。

(2) $n\geq 5$

对于$n=4$时结论成立，我们对n进行归纳假设。假设$n\geq 5$时，对于B_{n-1}结果成立，即若F是B_{n-1}的最小边割，则$B_{n-1}-F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况1： $|F_1|\leq n-3$。

在这种情况下，$|F_i|\leq n-3i\in[1,n]$且$|F_c|\leq n-1$。由命题4可得$B_n^i-F_i$ 是连通的。又由命

题5(1)可得任意两个不同子图之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。因为$n \geq 5$时，$(n-2)! > n-1 \geq |F_c|$，所以$B_n[V(B_n^1 - F_1) \cup V(B_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通的，故$B_n - F$是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1| = n-1$。

在这种情况下，$|F_2| = |F_3| = \cdots = |F_n| = |F_c| = 0$，由命题4和命题5(1)可得$B_n - F$连通，矛盾。

情况3： $|F_1| = n-2$。

在这种情况下，$|F_i| \leq 1, i \in [2, n]$且$|F_c| \leq 1$，由$B_n^i \cong B_{n-1}$和命题4可得，$B_n^i - F_i$是连通的。由命题5(1)可得任意两个不同子图之间有$(n-2)!$条独立的交叉边，所以$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由于$B_n^1 \cong B_{n-1}$，根据归纳假设$B_n^1 - F_1$是连通的或者$B_n^1 - F_1$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，不妨设该孤立点为v。若$B_n^1 - F_1$连通，则$B_n - F$是连通的，矛盾；若$B_n^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v，假设$|F_c| = 0$或$|F_c| = 1$且与v不关联，则$B_n - F$连通，矛盾。假设$|F_c| = 1$且与v关联，则$B_n[V(B_n^1 - v - F_1) \cup V(B_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)] - F_c$是连通的，故$B_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

综上所述，B_n是紧$(n-1)$超边连通的。

如果图G的最小强割F都能孤立出来一个顶点，则连通图G是强超连通的。若$G - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，则图G是强紧$|F|$超连通的。

定理3.4 对于任何整数$n \geq 4$，B_n是强紧$(n-1)$超连通的。

证明： 令F是B_n的最小强割，根据定理3.1得$|F| = n-1$。令$F_i = F \cap V(B_n^i), F_e^i = F \cap E(B_n^i), i \in [1, n]$，且$|F_1 \cup F_e^1| \geq |F_2 \cup F_e^2| \geq \cdots \geq |F_n \cup F_e^n|$。设$C$是$B_n$中所有的交叉边构成的集合，同时令$F_c = F \cap C$。我们对$n$进行以下分类讨论：

(1) $n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = 3$且$|F_c| \leq 3$。

情况1： $|F_1 \cup F_e^1| \leq 1$。

在这种情况下，$|F_i \cup F_e^i| \leq 1, i \in [1, n], |F_c| \leq 3$。因为$B_4^i \cong B_3$，根据定理3.1可得$B_4^i - F_i - F_e^i$是连通的。根据命题5(1)任意两个不同子图$B_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边。不失一般性，我们假设$|F_c \cap [V(B_4^1), V(B_4^2)]| = 2$。由于$|F_c| \leq 3$，而$B_4^1$中每个顶点都有一个外部邻域，故$B_4[V(B_4^1 - F_1 - F_e^1) \cup V(B_4^j - F_j - F_e^j)] - F_c, j \in [3, 4]$是连通的。同理，$B_4[V(B_4^2 - F_2 - F_e^2) \cup V(B_4^j - F_j - F_e^j)] - F_c, j \in [3, 4]$ 是连通的。因此$B_4 - F$ 连通，矛盾。

情况2： $|F_1 \cup F_e^1| = 2$。

在这种情况下，$|F_c| \leq 1, |F_i \cup F_e^i| \leq 1, i \in [2, 4]$。由定理3.1可知，$B_4^i - F_i - F_e^i, i \in [2, 4]$是连通的。由命题4和5(1)可知，$B_4[V(B_4^2 - F_2 - F_e^2) \cup V(B_4^3 - F_3 - F_e^3) \cup V(B_4^4 - F_4 - F_e^4)] - F_c$是连通的。由$|F_1 \cup F_e^1| = 2, B_4^1 \cong B_3$可得$B_4^1 - F_1 - F_e^1$是连通的，或者有两个分支其中一个分支是孤立点，或者有两个分支，每个分支至少有两个顶点。若$B_4^1 - F_1 - F_e^1$是连通的，根据命

题5(2)我们可以得到$|N(V(B_4^1-F_1-F_e^1))\cap(V(B_4^2)\cup V(B_4^3)\cup V(B_4^4))|\geq 4$，再结合$|F_2\cup F_e^2|+|F_3\cup F_e^3|+|F_4\cup F_e^4|+|F_c|=1$，我们有$B_4-F$是连通的，矛盾；若$B_4^1-F_1-F_e^1$有两个分支，每个分支至少有两个顶点，结合$|F_2\cup F_e^2|+|F_3\cup F_e^3|+|F_4\cup F_e^4|+|F_c|=1$，我们有$B_4-F$是连通的，矛盾；若$B_4^1-F_1-F_e^1$有两个分支其中一个分支是孤立点$v$。若$|F_c|=1$且不与$v$关联或$|F_2|=1$且$F_2\neq\{v^+\}$，则$B_4-F$ 连通，矛盾。若$|F_c|=1$且与v关联或$|F_2|=1$且$F_2=\{v^+\}$，则$B_4[V(B_4^1-F_1-F_e^1-v)\cup V(B_4^2-F_2-F_e^2)\cup V(B_4^3-F_3-F_e^3)\cup V(B_4^4-F_4-F_e^4)]$是连通的，所以$B_4-F$有两个分支其中一个分支是孤立点。

情况4：$|F_1\cup F_e^1|=3$。

在这种情况下，$|F_i\cup F_e^i|=0, i\in[2,4]$且$|F_c|=0$。由$B_4^i\cong B_3$和命题4可得$B_4^i-F_i-F_e^i, i\in[2,4]$是连通的。又因为$|F_2\cup F_e^2|+|F_3\cup F_e^3|+|F_4\cup F_e^4|+|F_c|=0$。由命题4和命题5(1)可知$B_4-F$是连通的，矛盾。

(2) $n\geq 5$

对于$n=4$时结论成立，我们对n进行归纳假设。假设$n\geq 5$时，对于B_{n-1}结果成立，即若F是B_{n-1}的最小强割，则$B_{n-1}-F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况1：$|F_1\cup F_e^1|\leq n-3$。

在这种情况下，$|F_i\cup F_e^i|\leq n-3, i\in[1,n]$且$|F_c|\leq n-1$。由定理3.1 可得$B_n^i-F_i-F_e^i$是连通的。由命题5(1)任意两个不同子图$B_n^i$之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。因为$n\geq 5$，则$(n-2)!>n-1$。因此$B_n[V(B_n^i-F_i-F_e^i)\cup V(B_n^j-F_j-F_e^j)]-F_c, i,j\in[1,n], i\neq j$ 是连通的，故B_n-F是连通的，矛盾。

情况2：$|F_1\cup F_e^1|=n-2$。

在这种情况下，$|F_i\cup F_e^i|\leq 1, i\in[2,n]$且$|F_c|\leq 1$。由定理3.1可得$B_n^i-F_i-F_e^i, i\in[2,n]$ 是连通的。由命题5(1)可得$B_n[V(B_n^2-F_2-F_e^2)\cup V(B_n^3-F_3-F_e^3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n-F_e^n)]-F_c$是连通的。由于$B_n^1\cong B_{n-1}$，根据归纳假设$B_n^1-F_1-F_e^1$是连通的，或者有两个分支其中一个分支是一个孤立点。若$B_n^1-F_1-F_e^1$是连通的，由于$|F_1\cup F_e^1|=n-2$，根据命题5(2)得$n\geq 5$时$|N(V(B_n^1-F_1-F_e^1))\cap(V(B_n^2)\cup V(B_n^3)\cup\cdots\cup V(B_n^n))|\geq(n-1)!-(n-2)>1$，结合$|F_2\cup F_e^2|+|F_3\cup F_e^3|+\cdots+|F_n\cup F_e^n|+|F_c|=1$，有$B_n-F$是连通的，矛盾；若$B_n^1-F_1-F_e^1$有两个分支其中一个分支是孤立点$v$。若$|F_c|=1$且与$v$关联或$|F_2|=1$且$F_2=\{v^+\}$，则$B_n[V(B_n^1-F_1-F_e^1-v)\cup V(B_n^2-F_2-F_e^2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n-F_e^n)]-F_c$是连通的，所以$B_n-F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。否则$B_n-F$连通，矛盾。

情况3：$|F_1\cup F_e^1|=n-1$。

在这种情况下，$|F_c|=|F_i\cup F_e^i|=0, i\in[2,n]$，由命题3.1得$B_n^i-F_i-F_e^i$是连通的，其中$i\in[2,n]$。由命题5(1)得任意两个不同的子图之间有$(n-2)!$条独立的交叉边，故$B_n[V(B_n^2-F_2-F_e^2)\cup V(B_n^3-F_3-F_e^3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n-F_e^n)]-F_c$ 是连通的，而$B_n^1-F_1-F_e^1$中每个点都有一个外部邻域。因此B_n-F 是连通的，矛盾。

综上所述，B_n是强紧$(n-1)$超连通的。

4. B_n的强自然连通性

引理4.1 令$F \subseteq V(B_4)$且$|F| \leq 3$。如果$B_4 - F$不连通，则$B_4 - F$有两个分支其中一个分支是一个孤立点。

证明： 根据命题4，$|F| \geq 3$。令$F_i = F \cap V(B_4^i), i \in [1,4]$，且$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$。由于$|F| \geq 3$，所以$|F| = 3$。

声明1： $|F_4| = 0$。

声明1的证明： 若$|F_4| \neq 0$，则$|F_4| \geq 1$，此时$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq 1$，因此$|F_1|+|F_2|+|F_3|+|F_4| \geq 4$，而$|F| = 3$，矛盾，所以$|F_4| = 0$。

声明2： $|F_1| \geq 2$。

声明2的证明： 若$|F_1| \leq 1$，则$|F_i| \leq 1, i \in [1,4]$。由$B_4^i \cong B_3$和命题4可得$B_4^i - F_i$是连通的。由命题5(1)可知任意两个不同子图$B_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，故$B_4 - F$连通，矛盾。因此$|F_1| \geq 2$。

情况1： $|F_1| = 2$。

在这种情况下，$|F_2| = 1$，由$B_4^i \cong B_3$和命题4可得$B_4^i - F_i$是连通的，$i \in [2,4]$。$|F_1| = 2$时，$B_4^1 - F_1$是连通的，或者有两个分支其中一个分支是孤立点，或者有两个分支，每个分支顶点个数大于等于2。若$B_4^1 - F_1$是连通的，根据命题5(1)得$B_4 - F$是连通的，矛盾；若$B_4^1 - F_1$有两个分支其中一个分支是孤立点v。若$F_2 \neq \{v^+\}$，则$B_4 - F$是连通的，矛盾。若$F_2 = \{v^+\}$，则$B_4 - F$有两个分支其中一个分支是孤立点；若$B_4^1 - F_1$有两个分支，每个分支顶点个数大于等于2，由命题5(1)可知任意两个不同的子图B_n^i之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，故$B_4 - F$连通，矛盾。

情况2： $|F_1| = 3$。

在这种情况下，$|F_i| = 0, i \in [2,4]$，由$B_4^i \cong B_3$和命题4可得$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)$是连通的。由定义可知$B_4^1 - F_1$中每个点都有一个外部邻域，所以$B_4 - F$是连通的，矛盾。

综上所述，$|F| \leq 3$时，如果$B_4 - F$不连通，则$B_4 - F$有两个分支其中一个分支是一个孤立点。

引理4.2 $n \geq 4$时，令$F \subseteq V(B_n)$且$|F| \leq 2n-5$。如果$B_n - F$不连通，则$B_n - F$有两个分支其中一个分支是一个孤立点。

证明： 根据引理4.1，当$n = 4$时结果成立。下证当$n \geq 5$时结果成立。假设对于$F \subset V(B_n)$且$|F| \leq 2n-5$，如果$B_n - F$是不连通的，根据命题4，$|F| \geq n-1$。令$F_i = F \cap V(B_n^i), |F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$，其中$i \in [1,n]$。

声明3： $1 \leq |F_2| \leq n-3$。

声明3的证明： 若$F_2 = \emptyset$，那么$F_i = \emptyset, i \in [2,4]$。根据命题4和命题5(1)可得$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通的。根据定义可知$B_n$中每个点都有一个外部邻域，因此$B_n - F$是连

通的，矛盾。若$|F_2| \geq n-2$，则$|F_1| \geq n-2$，此时$|F| \geq 2n-4 > 2n-5$，这与$|F| \leq 2n-5$矛盾。

根据声明3，对于每个$i \in [2,n], B_n^i - F_i$是连通的，由命题5(1)可得$B_n[V(B_n^2-F_2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通的。又由于$|F| \leq 2n-5$，则$|F_1| \leq 2n-6$。同时需$|F_3| \leq n-4$，否则$|F| \geq 3(n-3) > 2n-5$，这与$|F| \leq 2n-5$矛盾。$n \geq 5$时，因为$|E_{i,j}(B_n - F)| \geq (n-2)! - (2n-5) \geq 1, i,j \in [1,n]$，所以$B_n^i - F_i$与$B_n^j - F_j$之间至少有一条边连接，其中$i,j \in [1,n]$。根据$B_n - F$是不连通的可知$B_n^1 - F_1$是不连通的，此时$|F_1| \geq n-2$。由命题5(2)和6可得，当$n-2 \leq |F_1| \leq 2n-6$时，$B_n^1 - F_1$有两个分支其中一个分支是孤立点，或者有两个分支，其中一个分支是二阶完全图K_2。若$B_n^1 - F_1$有两个分支其中一个分支是孤立点v，若$F_2 = \{v^+\}$，则$B_n - F$ 有两个分支其中一个分支是孤立点，否则$B_n - F$连通，矛盾；若$B_n^1 - F_1$有两个分支其中一个分支是二阶完全图K_2，记其中边为xy，此时$|F_1| = 2n-6$，则$|F_2| = 1$，由定义知B_n 中每个点都有一个外部邻域，则点x 和y 至少有一个点的外部邻域在$B_n^i - F_i, i \in [2,n]$中。根据$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$ 是连通的，我们可以得到$B_n - F$是连通的，矛盾。

综上所述，$F \subseteq V(B_n)$且$|F| \leq 2n-5$ 时，若$B_n - F$是连通的，则$B_n - F$有两个分支其中一个分支是孤立点。

如果连通图G的每个最小自然割$|F|$都能孤立出来一条边，则图G是超自然连通的。若$G - F$有两个分支，其中一个分支是孤立边，则图G是紧$|F|$超自然连通的。

引理4.3 对于任何整数$n \geq 5$，B_n是紧$(2n-4)$超自然连通的。

证明： 令$F \subseteq V(B_n)$是B_n的最小自然割。由命题6可得$|F| = 2n-4$，令$F_i = F \cap V(B_n^i), i \in [1,n]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$。

声明4： $1 \leq |F_2| \leq n-2$。

声明4的证明： 若$|F_2| = 0$，则$|F_2| = |F_3| = \cdots = |F_n| = 0$，因此根据$B_n$中外部邻域的定义可知$B_n - F$是连通的，矛盾。根据$|F| = 2n-4$可得$1 \leq |F_1| \leq 2n-5$。若$|F_2| \geq n-1$，则$|F| \geq 2(n-1) = 2n-2 > 2n-4$，矛盾。因此，$1 \leq |F_2| \leq n-2$。

情况1： $|F_i| \leq n-3, i \in [1,n]$。

在这种情况下，根据命题4和$B_n^i \cong B_{n-1}$可得$B_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [1,n]$。根据命题5(1)可知任意两个不同子图B_n^i之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。由于$n \geq 5$，故$(n-2)! > 2n-6 \geq |F_i| + |F_j|, i \neq j$。因此$B_n[V(B_n^i - F_i) \cup V(B_n^j - F_j)]$是连通的，其中$i \neq j$，故$B_n - F$是连通的，矛盾。

情况2： $n-2 \leq |F_1| \leq 2n-7$。

情况2.1： $|F_i| \leq n-3, i \in [2,n]$。

根据$B_n^i \cong B_{n-1}$和命题4，$B_n^i - F_i$是连通的。由命题5(1)可得任意两个不同子图B_n^i之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。因为$n \geq 5$，$(n-2)! > 2n-6 \geq |F_i| + |F_j|, i \neq j$，因此$B_n[V(B_n^i - F_i) \cup V(B_n^j - F_j)]$是连通的，其中$i,j \in [2,n], i \neq j$，故$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通的。若$V(B_n^1 - F_1)$是连通的，假设$|F_n| = 1$，由于$n \geq 5, n-1+n-2 = 2n-3 > 2n-4$，矛盾，因此$|F_n| = 0$。因为$(n-2)! > 2n-7 \geq |F_1| + |F_n|$，所以$B_n[V(B_n^1 - F_1) \cup V(B_n^n - F_n)]$是连通

的，故B_n-F连通，矛盾。若$V(B_n^1-F_1)$不连通，因为$|F_1|\leq 2n-7$，根据$B_n^1\cong B_{n-1}$ 和引理4.2可得，$B_n^1-F_1$若不连通，则$B_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。令C为$B_n^1-F_1$的最大分支，因为$n\geq 5,(n-1)!-(2n-7)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$，故$B_n[V(C)\cup V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的。因此$F$不是$B_n$的最小自然割，矛盾。

情况2.2：$|F_2|=n-2$。

此时，$|F_3|=|F_4|=\cdots=|F_n|=0,|F_1|=|F_2|=n-2$。根据$B_n^i\cong B_{n-1}$和命题4，$B_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[3,n]$。再根据命题5(1)，$B_n[V(B_n^3-F_3)\cup V(B_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的。

若$B_n^2-F_2$是连通的，根据命题5(1)，$n\geq 5$时，$(n-2)!-(n-2)>0$，故$B_n[V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的。若$B_n^1-F_1$是连通的，类似地$B_n[V(B_n^1-F_1)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的，所以$B_n-F$是连通的，矛盾；若$B_n^1-F_1$不连通，由于$|F_1|\leq 2n-7=2(n-1)-5$，由引理4.2，$B_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。令$C$是$B_n^1-F_1$ 的最大分支。因为$(n-1)!-(n-2)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$，故$B_n[V(C)\cup V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的，与$F$是$B_n$ 的最小自然割矛盾。

若$B_n^2-F_2$不连通，根据$B_n^i\cong B_{n-1}$和定理3.4，$B_n^2-F_2$由两个分支，其中一个分支是一个孤立点。令D是$B_n^2-F_2$ 的最大分支。因为$n\geq 5,(n-1)!-(n-2)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$，故$B_n[V(D)\cup V(B_n^3-F_3)\cup V(B_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的。若$B_n^1-F_1$是连通的，由于$n\geq 5,(n-1)!-(n-2)>(2n-4)-(n-2)=n-2$，根据命题5(2)，$B_n[V(B_n^1-F_1)\cup V(D)\cup V(B_n^3-F_3)\cup V(B_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的，与$F$是$B_n$的最小自然割矛盾；若$B_n^1-F_1$不连通，由于$|F_1|\leq 2n-7=2(n-1)-5$，由引理4.2，$B_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。令$B$是$B_n^1-F_1$ 的最大分支。因为$n\geq 5,(n-1)!-(n-2)-1>(2n-4)-(n-2)=n-2$，故$B_n[V(B)\cup V(D)\cup V(B_n^3-F_3)\cup V(B_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的，因此若$B_n-F$不连通，则$B_n-F$满足以下情形之一：

(i)B_n-F有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，矛盾；

(ii)B_n-F有三个分支，其中两个分支是孤立点，矛盾；

(iii)B_n-F有两个分支，其中一个分支是二阶完全图K_2，因此F是B_n的最小自然割。

情况3： $2n-6\leq|F_1|\leq 2n-4$。

由声明4，$|F_2|\geq 1$，则$|F_1|\leq 2n-5$。此时，$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\leq 2$。由于$B_n^i\cong B_{n-1}$，根据命题4和命题5(1)，$B_n[V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]$是连通的。若$B_n^1-F_1$连通，由于$n\geq 5,(n-1)!-(2n-5)>5$，根据命题5(2)，$B_n[V(B_n^1-F_1)\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]=B_n-F$是连通的，矛盾；若$B_n^1-F_1$不连通，令$C_1,C_2,\cdots,C_k$是$B_n^1-F_1$的分支,其中$k\geq 2$。若$k\geq 3$，根据命题5(2)，$|(N(V(C_1)))\cup(N(V(C_2)))\cup(N(V(C_3)))\cap(V(B_n^2)\cup V(B_n^3)\cup\cdots\cup V(B_n^n))|\geq 3$。如果$|V(C_j)|\geq 3,|N(V(C_j))\cap(V(B_n^2)\cup V(B_n^3)\cup\cdots\cup V(B_n^n)|\geq 3$，其中$j\in[1,k]$。由于$|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\leq 2$，则若$B_n-F$不连通，则满足以下情形之一：

(i)B_n-F有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，矛盾；

(ii)B_n-F有三个分支，其中两个分支是孤立点，矛盾；

(iii)$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是二阶完全图K_2，因此F是B_n的最小自然割。

综上，当$n \geq 5$时，B_n是$2n-4$超自然连通的。

引理4.4 设$F \subseteq E(B_4)$ 且$|F| \leq 3$。如果$B_4 - F$ 不连通，则$B_4 - F$ 有两个分支其中一个分支是一个孤立点。

证明： 根据命题4，$|F| \geq 3$。因此$|F| = 3$。令$F_i = F \cap E(B_4^i), i \in [1,4]$且$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4|$。令$C$ 是B_4中所有的交叉边且$F_c = F \cap C$。

声明4： $|F_4| = 0$。

声明4的证明： 若否，$|F_4| \geq 1$，则$|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq |F_4| \geq 1$，因此$|F| \geq 4$，矛盾，故$|F_4| = 0$。

情况1： $|F_1| \leq 1$。

此时，$|F_i| \leq 1, i \in [1,4], |F_c| \leq 3$。根据命题4和$B_4^i \cong B_3$可得$B_4^i - F_i$是连通的。根据命题5(1)可知每两个子图$B_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，所以$B_4 - F$连通，矛盾。

情况2： $|F_1| = 2$。

此时，$|F_3| = |F_4| = 0, |F_2| \leq 1, |F_c| \leq 1$。根据命题4和$B_4^i \cong B_3$可得$B_4^i - F_e^i$是连通的，其中$i \in [2,4]$，由命题5(1)可得$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$连通。由于$|F_1| = 2$，则$B_4^1 - F_1$或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，或者有两个分支，每个连通分支顶点数大于等于2。若$B_4^1 - F_1$中有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v，若F_c与v关联或$F_2 = \{v^+\}$，则$B_4 - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。否则$B_4 - F$连通，矛盾；若$B_4^1 - F_1$有两个分支，每个连通分支顶点数大于等于2，根据命题5(1) 可得每两个子图B_4^i之间有2 条独立的交叉边，而$|F_c| \leq 1$，所以$B_4 - F$连通，矛盾。

情况3： $|F_1| = 3$。

此时，$|F_2| = |F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，由于$B_4^i \cong B_3$，根据命题4和5(1)可得$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$连通。由于$|F_c| = 0$，根据定义$B_4$中每个点都有一个外部邻域，故$B_4 - F$连通，矛盾。

综上，引理得证。

引理4.5 设$F \subseteq E(B_n)$且$|F| \leq 2n-5, n \geq 4$。如果$B_n - F$不连通，则$B_n - F$有两个分支其中一个分支是一个孤立点。

证明： 当$n = 4$时，根据引理4.4结论是成立的。假设当$n \geq 5$，该结论对B_{n-1}成立，即若F是B_{n-1}的边割且$|F| \leq 2n-7$，则$B_{n-1} - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

假设$n \geq 5$且$B_n - F$是不连通的。令$F_i = F \cap E(B_n^i), i \in [1,n]$ 且$|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$。令$C$是$B_n$中所有的交叉边且$F_c = F \cap C$。

情况1： $|F_1| \leq n-3$。

此时，$|F_i| \leq n-3, i \in [1,n]$。根据命题4和$B_n^i \cong B_{n-1}$可知$B_n^i - F_i$是连通的。当$n \geq 5$ 时，由于$|E_{i,j}(B_n)| = (n-2)! > 2n-5 \geq |F_c|, i,j \in [1,n], i \neq j$，因此$B_n - F$是连通的，矛盾。

DOI: 10.12677/aam.2024.133107

情况2：$n-2 \le |F_1| \le 2n-7$。

此时，$|F_i| \le n-3, i \in [2,n], |F_c| \le n-3$，根据命题4和$B_n^i \cong B_{n-1}$可知$B_n^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,n]$。由于$(n-2)! > (n-3)$，通过命题5(1)可得$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)] - F_c$ 是连通的。因为$n \ge 5$时，$|E_{i,j}(B_n)| = (n-2)! > n-3 \ge |F_c|$，其中$i,j \in [2,n], i \ne j$，所以$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。因为$n-2 \le |F_e^1| \le 2n-7 = 2(n-1)-5$，由归纳假设及$B_n^i \cong B_{n-1}$可知若$B_n^1 - F_e^1$不连通，则$B_n^1 - F_e^1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。假设$B_n^1 - F_e^1$是连通的，当$n \ge 5$时，$(n-2)! > n-3 > 0$，故$B_n - F$是连通的，矛盾；假设$B_n^1 - F_e^1$不连通，则它有两个分支，其中一个分支是一个孤立点$v$。因为$(n-2)! - 1 > n-3, n \ge 5$，所以$B_n[V(B_n^1 - v - F_1) \cup V(B_n^2 - F_2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。因此$B_n - F$是连通的（矛盾）或$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

情况3：$2n-6 \le |F_1| \le 2n-5$。

此时，$|F_c| \le 1, |F_3| = |F_4| = \cdots = |F_n| = 0, |F_2| \le 1$。根据命题4和$B_n^i \cong B_{n-1}$可知$B_n^i - F_i$是连通的，再由命题5(1)可知$B_n[V(B_n^2 - F_2) \cup V(B_n^3 - F_3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n)] - F_c$是连通的。由于$2n-6 \le |F_1| \le 2n-5$，因此若$B_n^1 - F_1$ 连通，由命题5(1)可得$B_n - F$连通，矛盾。若$B_n^1 - F_1$不连通，有一个分支是孤立点v。假设$|F_c| = 1$且与v关联，根据命题5(1)，$(n-2)! - 1 > 0$，故$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。否则，由于$|F_c| \le 1$，则$B_n - F$连通，矛盾。

引理4.6 对于任何正整数$n \ge 3, n\lambda(B_n) = 2n-4$。

证明：令$u = (1), v = (12)$，并且令$F = \{ux : x \in \{(i, i+1) : 2 \le i \le n-1\}\} \cup \{vx : x \in \{(i, i+1) : 2 \le i \le n-1\}\}$。由命题2得，$B_n$没有奇圈。因此，对于$x \in V(B_n - F), d_{B_n - F}(x) \ge n-2 \ge 1$，所以$F$是$B_n$的一个自然边割，所以$n\lambda(B_n) \le 2n-4$。

令F是B_n的一个最小自然边割，根据引理4.5，$|F| \ge 2n-4$。结合$n\lambda(B_n) \le 2n-4$，则有$n\lambda(B_n) = 2n-4$。

如果连通图G的每个最小自然边割F都能孤立出一条边，则图G是超自然$|F|$边连通的。

引理4.7 对于任何整数$n \ge 4$，B_n是超自然$(2n-4)$边连通的。

证明：令F是B_n的最小自然边割，根据定理4.6得$|F| = 2n-4$。令$F_i = F \cap E(B_n^i), i \in [1,n]$且$|F_1| \ge |F_2| \ge \cdots \ge |F_n|$。设$C$ 是B_n的所有交叉边构成的集合，同时令$F_c = F \cap C$。

(1) $n = 4$

当$n = 4$时，$|F| = 4, B_4^i \cong B_3$。

情况1：$|F_1| \le 1$。

此时，$|F_i| \le 1, i \in [1,4]$。由命题4可得，$B_4^i - F_i$是连通的，$i \in [1,4]$。由命题5(1)可得任意两个不同子图B_4^i之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，注意$|F| = 4$，所以$|F_c| \le 4$。不失一般性，我们假设$|F_c \cap [V(B_4^1), V(B_4^2)]| = 2$。因为$|F_c| \le 4$，则至少存在一个$j \in [3,4]$使得$B_4[V(B_4^1 - F_1) \cup V(B_4^j - F_j)] - F_c$是连通的。同样地，我们也能得到$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^j - F_j)] - F_c$是连通的，故$B_4 - F$ 连通，矛盾。

情况2： $|F_1| = 2$。

此时，$|F_i| \le 2, i \in [2,4]$且$|F_c| \le 2$。

情况2.1： $|F_2| \le 1$。

此时，$|F_i| \le 1, i \in [2,4]$，由命题4可得$B_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [2,4]$。根据命题5(1)可得$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由于$|F_1| = 2$，则$B_4^1 - F_1$或者有两个分支其中一个分支是孤立点，或者有两个分支，其中一个分支是一条孤立边，或者有两个分支，每个连通分支顶点数大于2。假设$B_4^1 - F_1$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v。因为$|F_c| \le 2$，根据命题5(1)可得$B_4[V(B_4^1 - F_1 - v) \cup V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。因此$B_4 - F$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，矛盾。假设$B_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是一条孤立边，结合$|F_c| \le 2$可得$B_4 - F$连通（矛盾）或者有两个分支，其中一个分支是一条孤立边。假设$B_4^1 - F_1$有两个分支，每个连通分支顶点数大于2，由于$|F_c| \le 2$，故$B_4 - F$连通，矛盾。

情况2.2： $|F_2| = 2$。

此时，$|F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，由命题4可得$B_4^i - F_i$是连通的，其中$i \in [3,4]$。由于$|F_1| = |F_2| = 2$，因此若$B_4^1 - F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点$v$，$B_4^2 - F_2$有两个分支，其中一个分支是孤立点$u$，假设$uv \in E(B_4)$，则$B_4 - F$有一条孤立边。否则，由于$|F_c| = 0$，则$B_4 - F$不会出现有孤立边的情况，矛盾。

情况3： $|F_1| = 3$。

此时$|F_i| \le 1, i \in [2,4], |F_c| \le 1$。由命题4可得$B_4^i - F_i$是连通的，$i \in [2,4]$。由命题5(1)可知任意两个不同子图$B_4^i$之间有$(n-2)! = 2$条独立的交叉边，而$|F_c| \le 1$，所以$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由于$|F_1| = 3$，则$B_4^1 - F_1$或者有三个分支，其中两个分支是孤立点，或者有三个分支，其中一个分支是孤立点，其余分支顶点数大于等于2，或者有三个分支，每个分支顶点数等于2。若$B_4^1 - F_1$有三个分支，其中两个分支分别是孤立点u和v，由于$|F_c| \le 1$，则$B_4 - F$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是孤立点，矛盾。若$B_4^1 - F_1$有三个分支，其中一个分支是孤立点v，其余分支顶点数大于等于2，则$B_4[V(B_4^1 - F_1 - v) \cup V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$连通，故$B_4 - F$连通或者有一个孤立点，矛盾。若$B_4^1 - F_1$有三个分支，每个分支顶点数等于2，结合$|F_c| \le 1$，则$B_4 - F$连通，矛盾。

情况4： $|F_1| = 4$。

此时$|F_2| = |F_3| = |F_4| = |F_c| = 0$，同理可得$B_4[V(B_4^2 - F_2) \cup V(B_4^3 - F_3) \cup V(B_4^4 - F_4)] - F_c$是连通的。由定义可知$B_4^1 - F_1$中每个点都有一个外部邻域在$B_4^i$ 中，$i \in [2,4]$，结合$|F_c| = 0$，则$B_4 - F$连通，矛盾。

(2) $n \ge 5$

对于$n = 4$时结论成立，我们对n进行归纳假设。假设$n \ge 5$时，对于B_{n-1}结果成立，即若F是B_{n-1}的最小自然边割且$|F| = 2n - 6$，则$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是孤立边。

情况1： $|F_1| \le n - 3$。

此时，$|F_i| \le n - 3, i \in [1,n], |F_c| \le 2n - 4$。由命题4可得$B_n^i - F_i$是连通的。根据命题5(1)可

知任意两个不同的子图B_n^i之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。当$n \geq 6$，由于$(n-2)! > 2n-4$，因此$B_n[V(B_n^1-F_1)\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，即$B_n-F$连通，矛盾。当$n=5$时，由于$(n-2)!=6=2n-4=|F_c|$。不失一般性，我们假设$|F_c\cap[V(B_5^1),V(B_5^2)]|=6$，由命题5(1)可知$B_5[V(B_5^1-F_1)\cup V(B_5^j-F_j)]-F_c$是连通的，其中$j\in[3,5]$。类似地，我们有$B_5[V(B_5^2-F_2)\cup V(B_5^j-F_j)]-F_c$ 是连通的。因此B_5-F是连通的，矛盾。

情况2： $|F_1|=n-2$。

情况2.1： $|F_2|\leq n-3$。

此时，$|F_i|\leq n-3, i\in[2,n], |F_c|\leq n-2$。由命题4，$B_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[2,n]$。根据命题5(1)，任意两个不同子图$B_n^i$之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。因为$n\geq 5$，$(n-2)!>n-2$。因此$B_n[V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。根据$B_n^1\cong B_{n-1}$和引理4.5可知$B_n^1-F_1$是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。假设$B_n^1-F_1$是连通的，当$n\geq 5, (n-2)!>n-2$，因此$B_n[V(B_n^1-F_1)\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，即$B_n-F$连通，矛盾。假设$B_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点$v$。当$n\geq 5, (n-1)!-1>n-2$，所以$B_n[V(B_n^1-F_1-v)\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，所以$B_n-F$是连通的或者$B_n-F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，与$F$是$B_n$的最小边割矛盾。

情况2.2： $|F_2|=n-2$。

此时，$|F_3|=|F_4|=\cdots=|F_n|=|F_c|=0$。由命题4可知$B_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[3,n]$。由于$|F_c|=0$，所以$B_n[V(B_n^3-F_3)\cup V(B_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。根据引理4.5，$B_n^1-F_1$与$B_n^2-F_2$或者是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。若$B_n^1-F_1$与$B_n^2-F_2$中有一个是连通的，另一个是不连通的，不失一般性，假设$B_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是孤立点v，$B_n^2-F_2$是连通的。因为B_n中每个点都有一个外部邻域且$|F_c|=0$，所以B_n-F是连通的，矛盾。若$B_n^1-F_1$ 与$B_n^2-F_2$都是连通的，由于$|F_c|=0$，则B_n-F是连通的，矛盾。若$B_n^1-F_1$与$B_n^2-F_2$都不连通，则$B_n^1-F_1$与$B_n^2-F_2$ 各有一个孤立点，分别记作u和v。若$uv\notin E(B_n)$，由于$|F_c|=0$，则B_n-F是连通的，矛盾。若$uv\in E(B_n)$，由于$|F_c|=0$，所以B_n-F孤立出来一条边。

情况3： $n-1\leq|F_1|\leq 2n-7$。

此时，$|F_i|\leq n-3, i\in[2,n], |F_c|\leq n-3$。由命题4可知$B_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[2,n]$。根据命题5(1)我们可以得到任意两个不同子图$B_n^i$之间有$(n-2)!$条独立的交叉边，因为$n\geq 5, (n-2)!>n-3$，所以$B_n[V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。根据引理4.5，$B_n^1-F_1$是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。若$B_n^1-F_1$是连通的，由于$(n-2)!>n-3$，所以B_n-F是连通的，矛盾。若$B_n^1-F_1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v，因为$n\geq 5, (n-2)!-1>n-3$，所以$B_n[V(B_n^1-F_1-v)\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，因此$B_n-F$是连通的，或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点，与F是B_n的最小边割矛盾。

情况4： $2n-6\leq|F_1|\leq 2n-5$。

此时$|F_i|\leq 2, i\in[2,n], |F_c|\leq 2$。由命题4可得$B_n^i-F_i$是连通的，其中$i\in[2,n]$。由命题5(1)可

知任意两个不同子图B_n^i之间有$(n-2)!$ 条独立的交叉边。由于$(n-2)!>2$，所以$B_n[V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$ 是连通的。由于$2n-6\le|F_1|\le 2n-5, B_n^1\cong B_{n-1}$，根据定理3.3和定理4.6可知，$B_n^1-F_1$是连通的，或者有一个孤立点，或者有两个孤立点，或者孤立出一条边。若$B_n^1-F_1$是连通的，由于$(n-2)!>2$，所以B_n-F连通，矛盾。若$B_n^1-F_1$有一个孤立点v，根据命题5(1)，$B_n[V(B_n^1-F_1-v)\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的，因此$B_n-F$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是孤立点，与$F$是$B_n$最小自然割矛盾。若$B_n^1-F_1$有两个孤立点$u,v$，此时$|F_1|=2n-5$，所以$|F_c|\le 1$，因此$B_n-F$是连通的，或者有孤立点，与$F$是$B_n$最小自然割矛盾。若$B_n^1-F_1$孤立出一条边$uv$，根据命题5(1)，$B_n[V(B_n^1-F_1-\{u,v\})\cup V(B_n^2-F_2)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$是连通的。由于$|F_c|\le 2$，所以$B_n-F$是连通的（矛盾）或者孤立出一条边。

情况5：$|F_1|=2n-4$。

此时$|F_2|=|F_3|=\cdots=|F_n|=|F_c|=0$。同理可得$B_n[V(B_n^2-F_2)\cup V(B_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(B_n^n-F_n)]-F_c$ 是连通的。因为B_n中每个点都有一个外部邻域，而$|F_c|=0$，所以B_n^1中每个点都有一个外部邻域在B_n^i中，$i\in[2,n]$，因此B_n-F是连通的，矛盾。

引理4.8 对于$n\ge 4$，令$F\subseteq V(B_n)\cup E(B_n)$且$|F|\le 2n-5$。如果$B_n-F$是不连通的，则$B_n-F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

证明：当$n\ge 4$时，若$F\subseteq V(B_n)$且$|F|\le 2n-5$，根据引理4.2得，如果B_n-F不连通，则B_n-F有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。若$F\subseteq E(B_n)$且$|F|\le 2n-5$，根据引理4.5得，如果B_n-F不连通，则B_n-F有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。因此，在这两种情况下结论成立。现假设$F\subseteq V(B_n)\cup E(B_n)$且$|F|\le 2n-5$，其中$F\cap V(B_n)\ne\emptyset, F\cap E(B_n)\ne\emptyset$，同时令$B_n-F$是不连通的。令$F_i=F\cap V(B_n^i), F_e^i=F\cap E(B_n^i), i\in[1,n]$且$|F_1\cup F_e^1|\ge|F_2\cup F_e^2|\ge\cdots\ge|F_n\cup F_e^n|$。设$C$是$B_n$中所有的交叉边构成的集合，同时令$F_c=F\cap C$。因此$1\le|F_1|+|F_2|+\cdots+|F_n|\le 2n-6, 1\le|F_e^1|+|F_e^2|+\cdots+|F_e^n|+|F_c|\le 2n-6$。

(1) $n=4$

当$n=4$时，$|F|\le 3, B_4^i\cong B_3$，根据定理3.1，若B_4-F是不连通的，则$|F|=3$。再根据定理3.4，若B_4-F不连通，则B_4-F有两个分支，其中一个分支是孤立点。

(2) $n\ge 5$

对于$n=4$时结论成立，我们对n进行归纳假设。当$n\ge 5$时，假设该结论对B_{n-1}成立，即若$|F|\le 2n-7$，当$B_{n-1}-F$不连通时，$B_{n-1}-F$有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况1：$|F_1\cup F_e^1|\le n-3$。

此时$|F_i\cup F_e^i|\le n-3, i\in[1,n], |F_c|\le 2n-6$。根据定理3.1可知，对所有的$i\in[1,n]$，$B_n^i-F_i-F_e^i$是连通的。由命题5(1)，我们可以得到在任意两个不同子图B_n^i之间有$(n-2)!$条独立的交叉边。由于$n\ge 5$，所以$(n-2)!>2n-5>|F_c|$。因此，$B_n[V(B_n^i-F_i-F_e^i)\cup V(B_n^j-F_j-F_e^j)]-F_c$是连通的，其中$i,j\in[1,n]$且$i\ne j$，即$B_n-F$是连通的，矛盾。

情况2：$n-2\le|F_1\cup F_e^1|\le 2n-7$。

此时$|F_2\cup F_e^2|+|F_3\cup F_e^3|+\cdots+|F_n\cup F_e^n|+|F_c|\le n-3$。根据定理3.1可得，对于$i\in$

$[2,n], B_n^i - F_i - F_e^i$ 是连通的。由命题5(1)，当$n \geq 5$时，$(n-2)! > n-3$，故$B_n[V(B_n^2 - F_2 - F_e^2) \cup V(B_n^3 - F_3 - F_e^3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n - F_e^n)] - F_c$是连通的。由于$B_n^1 \cong B_{n-1}$，由归纳假设$B_n^1 - F_1 - F_e^1$是连通的或者有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。假设$B_n^1 - F_1 - F_e^1$是连通的，当$n \geq 5$时，$(n-2)! - (2n-5) > 0$，故$B_n - F$ 是连通的，矛盾。假设$B_n^1 - F_1 - F_e^1$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点v。由于$(n-1)! - (2n-7) - 1 > 2, n \geq 5$，所以$B_n[V(B_n^1 - F_1 - F_e^1 - v) \cup V(B_n^2 - F_2 - F_e^2) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n - F_e^n)] - F_c$是连通的。因此$B_n - F$是连通的（矛盾）或$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

情况3： $2n-6 \leq |F_1 \cup F_e^1| \leq 2n-5$。

此时$|F_2 \cup F_e^2| + |F_3 \cup F_e^3| + \cdots + |F_n \cup F_e^n| + |F_c| \leq 1$。根据定理3.1和命题5(1)有$B_n[V(B_n^2 - F_2 - F_e^2) \cup V(B_n^3 - F_3 - F_e^3) \cup \cdots \cup V(B_n^n - F_n - F_e^n)] - F_c$是连通的。若$B_n^1 - F_1 - F_e^1$是连通的，根据命题5(1)可知，$B_n - F$是连通的，矛盾。若$B_n^1 - F_1 - F_e^1$是不连通的，结合$|F_2 \cup F_e^2| + |F_3 \cup F_e^3| + \cdots + |F_n \cup F_e^n| + |F_c| \leq 1$，则$B_n - F$是连通的（矛盾）或者$B_n - F$有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

定理4.9 对于任何整数$n \geq 3$，$n\kappa\lambda(B_n) = 2n-4$。

证明： 令F是B_n的一个最小强自然割。根据引理4.8，$|F| \geq 2n-4$。令$u = (1), v = (12)$，并且令$F = \{ux : x \in \{(i,i+1), 2 \leq i \leq n-1\}\} \cup \{vx : x \in \{(i,i+1), 2 \leq i \leq n-1\}\}$。由命题2得，$B_n$没有奇圈。因此，对于$x \in V(B_n - F), d_{B_n - F}(x) \geq n-1-(n-2) = 1$，所以$F$是$B_n$的一个自然割。故$n\kappa\lambda(B_n) \leq 2n-4$。结合$|F| \geq 2n-4$，则有$n\kappa\lambda(B_n) = 2n-4$。

5. 结论

在这篇文章中，我们主要研究了n维泡型图B_n当$g = 0$和$g = 1$时的强连通性，证明了当$g = 0$时，对任意整数$n \geq 2$，$\kappa\lambda(B_n) = n-1$。还证明了对于任意整数$n \geq 3$，当$g = 1$时，$n\kappa\lambda(B_n) = 2n-4$。本文没有对$g \geq 2$进行研究，这在将来是一个值得研究的课题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (61772010)，山西省基础研究计划 (202203021221128)。

参考文献

[1] Araki, T. and Kikuchi, Y. (2007) Hamiltonian Laceability of Bubble-Sort Graphs with Edge Faults. *Information Sciences*, **177**, 2679-2691. https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.01.017

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, New York.

[3] Feng, Y., Hao, R. and Zhou, J. (2017) On Computing of a Conditional Edge Connectivity of Alternating Group Network. *Linear and Multilinear Algebra*, **65**, 2494-2507. https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1277689

[4] Kikuchi, Y. and Araki, T. (2006) Edge-Bipancyclicity and Edge-Fault-Tolerant Bipancyclicity of Bubble-Sort Graphs. *Information Processing Letters*, **100**, 52-59. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2006.05.012

[5] Shi, L. and Wu, P. (2017) Conditional Connectivity of Bubble Sort Graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **33**, 933-944. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0708-8

[6] Wang, S. and Yang, Y. (2012) Fault Tolerance in Bubble-Sort Graph Networks. *Theoretical Computer Science*, **421**, 62-69. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.11.016

[7] Wang, M., Yang, W., Guo, Y. and Wang, S. (2016) Conditional Fault Tolerance in a Class of Cayley Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, **3**, 67-82.

[8] Wang, Y. and Wang, S. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Graphs. *AIMS Mathematics*, **6**, 13210-13221. https://doi.org/10.3934/math.2021763

[9] Zhou, S., Wang, J., Xu, X. and Xu, J. (2013) Conditional Fault Diagnosis of Bubble Sort Graphs under the PMC Model. Intelligence Computation and Evolutionary Computation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, **180**, 53-59. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31656-2_8

[10] Gu, M., Hao, R., Tang, S. and Chang, J. (2020) Analysis on Component Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs and Burnt Pancake Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **279**, 80-91. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.018

[11] Guo, J. and Lu, M. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **297**, 109-119. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.03.006

[12] He, S., Hao, R. and Cheng, E. (2018) Strongly Menger-Edge-Connectedness and Strongly Menger-Vertex-Connectedness of Regular Networks. *Theoretical Computer Science*, **731**, 50-67. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.04.001

[13] Li, X., Liu, M., Yan, Z. and Xu, J. (2019) On Conditional Fault Tolerance of Hierarchical Cubic Networks. *Theoretical Computer Science*, **761**, 1-6. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.07.021

[14] Wang, S. and Wang, M. (2019) The Strong Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *The Computer Journal*, **62**, 1-15.

[15] Wang, S., Wang, Z. and Wang, M. (2017) The 2-Good-Neighbor Connectivity and 2-Good-Neighbor Diagnosability of Bubble-Sort Star Graph Networks. *Discrete Applied Mathematics*, **217**, 691-706. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.09.047

[16] Wang, S., Wang, Z. and Wang, M. (2016) The 2-Extra Connectivity and 2-Extra Diagnosability of Bubble-Sort Star Graph Networks. *The Computer Journal*, **59**, 1839-1856. https://doi.org/10.1093/comjnl/bxw037

[17] Akers, S.B. and Krishnamurthy, B. (1989) A Group Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. *IEEE Transaction on Computers*, **38**, 555-566. https://doi.org/10.1109/12.21148

[18] 徐敏, 经衿. Bubble-Sort网络的连通度和超连通度[J]. 应用数学学报, 2012(5): 789-794.