Advances in Education 教育进展, 2019, 9(6), 683-687
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2019.96111

Some Explorations on Undergraduate Teaching of Differential Geometry

Yadong Wu

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: wydmath@163.com

Received: Oct. 12th, 2019; accepted: Oct. 28th, 2019; published: Nov. 5th, 2019

Abstract

In this paper, we first propose some problems on the teaching of the undergraduate course of differential geometry, and then give some advice on the teaching of the course. Our advice mainly includes: enhancing the interdisciplinary knowledge and the applications of new theory, enhancing the ability of computations and graphic method, and adding contents and hours to the course.

Keywords

Differential Geometry, Exploration of Teaching

本科微分几何教学的一些探索

吴亚东

江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: wydmath@163.com

收稿日期：2019年10月12日；录用日期：2019年10月28日；发布日期：2019年11月5日

摘 要

本文先对本科微分几何课程的教学提出了一些问题，再给出了教学上的一些具体建议。主要建议包括加强知识交叉和新理论的运用，加强计算能力和图形思考，增加课时和课程内容。

关键词

微分几何，教学探索

文章引用：吴亚东. 本科微分几何教学的一些探索[J]. 教育进展, 2019, 9(6): 683-687.
DOI: 10.12677/ae.2019.96111

1. 引言

微分几何的历史源远流长，尤其在近现代它得到了蓬勃发展，微分几何跟其他学科的联系也更为紧密，现在已成为数学领域的一个主流方向。随着这门学科在内容和方法上的不断更新，迫切需要本科生除了掌握古典微分几何的知识外，尽可能地熟悉一些现代微分几何的理论方法。本文我们从几年的课程教学中提出一些看法，再探索下微分几何教学的一些方法。

2. 存在的问题

近几年我们先后使用了两个教材，一个是梅向明和黄敬之编著的《微分几何》[1]，另一个是彭家贵和陈卿编著的《微分几何》[2]。在这两本教材的教学中，我们发现学生在学习微分几何时碰到不少困难。下面是学生在课程学习中普遍遇到的几个问题：

1) 缺乏微分几何与其他课程的联系

微分几何的很多理论建立在其他学科的基础上，但很多学生在学习时，知识是断裂的，不能灵活运用其他理论到微分几何中去，比如证明曲面第一基本形式正定性时想不到解析几何中的 Lagrange 恒等式。在展开曲面论时，不能熟练运用二元微积分中的求导、极值原理等。讨论曲线论基本定理时不能利用常微分方程组解的存在唯一性，证明曲面论基本定理时理解不了偏微分方程组解存在的可积性条件，恰好是曲面的 Gauss 方程和 Codazzi 方程。

2) 缺乏抽象理论与具体实践的结合

随着课程的深入，一些数学概念变得越来越抽象，以致学生们经常会遇到这样的问题：学了一大堆抽象的理论，但遇到具体的曲线和曲面时不会计算。比如计算双曲抛物面的主曲率、平均曲率、高斯曲率，并计算这个曲面沿一条曲线的法曲率、测地曲率时，学生对这么多概念非常迷惑，分不清它们之间的关系。一方面是学生对概念的理解不够深入，还有就是对具体的曲线曲面缺少计算，遇到具体问题就无从下手。

3) 计算能力和几何直观能力不足

古典微分几何的主要工具是向量运算与微积分，向量运算中的一个主要问题是不能利用 Frenet 标架的正交性，在多次求导后公式变得很复杂，从而不能简化公式得出结论。微分几何学习时要不断的求导，要出来好结果必须熟练计算高阶导数。又由于曲面有两个参数，就要用到多元微积分，学生在多元函数的高阶导数计算上，能力明显不足。微分几何处理的是曲线与曲面，其图形各有特点，曲线与曲面上的几何量也需要根据图形来理解。学生没有养成作图的好习惯，也不善于作合适的图，只有死记硬背公式，缺少通过图形来分析的能力。

4) 几何课程与课时显少

微分几何教学只有每周 4 个课时，一方面要包括古典微分几何的重要内容，又要较快引入了“活动标架”、“外微分”、“协变微分”等现代内容，以致部分内容不能更详细的展开，正如彭家贵和陈卿在[2]中提到“一些局部理论的内容放在习题中，是作为正文内容的一个补充”。数学系本科生的几何课程也很少，只有解析几何与微分几何。因此学生的几何意识不浓，认为几何只是数学的一个小方向，不用重视。学生学了解析几何后，以为用代数方法处理简单的曲线曲面就够了，等碰到微分几何用微积分来研究复杂的曲线曲面时感到很不适应。

3. 一些教学探索

微分几何具有它自身的特点，一方面它跟微积分、代数、方程、拓扑等课程发生紧密联系[3] [4]。因此需要学生有扎实的数学基础，尤其是深厚的分析功底。另一方面它提出许多新的思想及方法，这对学生的知识消化提出新的挑战。下面浅谈下本科微分几何的教学体会。

3.1. 加强知识交叉及新理论运用

曲面论涉及到二元函数的求导，单纯计算不仅复杂而且很难提取出关键的信息。因此一个方法是引入线性代数的矩阵理论来处理微分几何的内容。比如把曲面的第二基本形式写成矩阵形式

$$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = (du, dv)\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

来推导就非常方便。让学生学会通过 Jacobi 矩阵来验证一些几何量不依赖于参数的选择，通过矩阵描述它们在不同标架下的形式及其相互关系。

研究曲面几何时，要让学生学会利用张量分析、活动标架、外微分这些新的方法。在讨论曲面基本论定理时，让学生熟练运用张量符号的运用与推导。通过张量形式的计算呈现出 Gauss 绝妙定理，自然而然地让学生体会到新方法的威力。在讨论曲面的运动方程和结构方程时，用自然标架和正交标架这两种手段，让学生能感受到它们各自的特点，及用外微分工具来描述所带来的简洁性与灵活性。讨论主曲率为常数的曲面分类中，采用活动标架法，让学生学会怎样利用现代的工具来解决问题。引进外微分形式时可以引入数学分析中的二重积分的参数变换。当二重积分换元时多出个 Jacobi 行列式：

$$\iint g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint g\left(x(u,v), y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其实积分积的不只是被积函数，而是这个对象 $g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，上式的积分符号后面就是这个对象在不同参数下的形式。考虑到行列式符号的变化性质，把它写成 $g(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 更合适，这就是二阶外微分形式。

3.2. 加强实践及计算能力

课堂教学中，不宜侧重于抽象的理论，要更关注于具体的几何对象。微分几何内容的一个特点是复杂的导数计算，课堂时间训练不够，布置课后练习让学生培养出对待复杂公式的计算能力。

介绍曲线局部理论时，让学生利用圆柱螺线这个典型例子来计算它的弧长参数、Frenet 标架与 Frenet 公式、曲率与挠率。这相当于通过这个例子把曲线论中的所有几何量及公式都复习一遍，以让学生理解其中的公式及其相互关系。在曲面论中让学生会计算常见曲面的两个基本形式、法曲率、主曲率、Gauss 曲率、运动方程和结构方程等，这相当于又把曲面论中的理论验算了一遍。引导学生通过具体的计算来理解曲面的特点，比如通过计算球面的两个基本形式，发现它们成比例，马上想到球面沿任意方向的法曲率相等都为常数，因此球面的主曲率相等，是全脐点曲面。柱面、旋转曲面等其他曲面也要逐个计算。

3.3. 加强几何直观

学生做题时，经常感到学了不少公式却无从下手。一方面原因是对几何对象的空间感不够，因此一定要让学生在旁边先画图，根据图形来思考。比如在讲解曲面沿其上一条曲线的测地曲率和法曲率时，很多学生就弄不清它们之间的各种关系。这个问题的关键的是画好图 1。取一个正交标架(曲线切向量 t，曲面法向量 n，及跟它们垂直的向量 e)，再画上曲率向量及它在这个正交标架上的投影，这样所有的信息都可由这张图得到。

DOI: 10.12677/ae.2019.96111

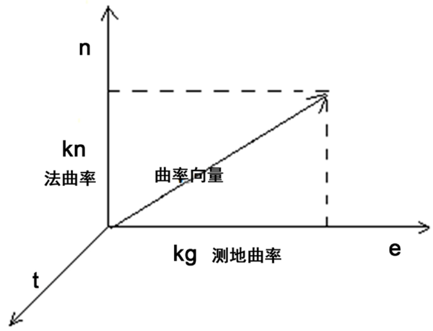

Figure 1. The orthogonal frame of surface
图 1. 曲面上的正交标架

在计算及证明中，选取好的坐标及参数可以简便不少。微分几何中的很多情形是第一步走好了，就迎刃而解，下面我们举一个例子来说明。

例：若曲面 S 与平面 X 相交于 o 点，且 S 位于 X 的同一侧，证明 X 是曲面 S 在 o 点的切平面。

分析：学生碰到这样没图形且没公式的题目，感觉无从下手。那首先画一个曲面 S 和一个平面 X。为了容易计算，想到选取一个直角坐标系：使 S 与 X 的交点 o 为原点，平面 X 作为坐标系的 xoy 平面，且由题设不妨设 S 位于 xoy 平面的上面，参看图 2。这样曲面在 o 点附近可以由某个函数 $f(x,y)$给出，题目的假设就蕴含函数 $f(x,y)$在 o 点达到了极小值，因此由二元函数的极值原理得出曲面在 o 点的切向量落在了 xoy 平面上，因此 X 就是 S 在 o 点的切平面。

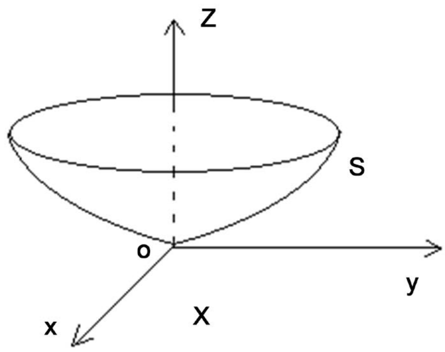

Figure 2. The surface S and its tangent plane X
图 2. 曲面 S 与它的切平面 X

3.4. 增加课时与课程内容

对待学生如何学好微分几何的一个措施是增加课时与教学内容，这能提高这门学科在学生心中的重要性，也能让学生更系统更扎实的学习。一学期课程建议每周 5 个课时，教学首先要包括曲线及曲面论中的大部分内容，同时为了适应微分几何发展的需要，要求尽量介绍现代微分几何的新理论。以彭家贵和陈卿编著的《微分几何》[2]为例，教学内容包括前五章。在曲线论的正文中，可增加空间曲线在普通参数下的曲率与挠率公式。教师也可介绍下一般的 Stokes 公式及它与数学分析中相关公式的联系，由此可培养出学生的几何兴趣。

致　谢

非常感谢审稿专家和编辑对本文提出的宝贵意见。

参考文献

[1] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[2] 彭家贵, 陈卿. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[3] Opera, J. 微分几何及其应用[M]. 陈智奇, 李君, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[4] 孙和军, 赵培标, 陈大广. 微分几何的教学地位与方法[J]. 高等数学研究, 2011, 14(1): 101-103.