

人教版《三角函数》的教材分析

安瑞芳, 陈余喜

湖南科技大学, 湖南 湘潭
Email: anruifang2008@163.com

收稿日期: 2021年6月1日; 录用日期: 2021年6月26日; 发布日期: 2021年7月5日

摘要

三角函数是高中数学的一个重要内容。本文针对人教版第五章《三角函数》, 从教材的总体、教学目标、知识内容、数学思想方法的应用等方面进行了分析, 建议教师在使用本教材时要注重创设问题情境, 引导学生通过类比与数形结合来获取知识。

关键词

三角函数, 人教版教材, 数学思想

Textbook Analysis of the People's Education "Trigonometric Function"

Ruifang An, Shexi Chen

Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan
Email: anruifang2008@163.com

Received: Jun. 1st, 2021; accepted: Jun. 26th, 2021; published: Jul. 5th, 2021

Abstract

Trigonometric function is an important content of high school mathematics. This paper analyzes Trigonometric Functions in the fifth chapter of the People's Education Edition from the aspects of the overall teaching material, teaching objectives, knowledge content and the application of mathematical thinking methods, etc. It is suggested that teachers should pay attention to creating problem situations when using this textbook and guide students to acquire knowledge through

the combination of analogy and numbers and shapes.

Keywords

Trigonometric Function, PEP Edition Textbooks, Mathematical Thinking

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

三角函数为描述周期现象的十分重要的数学模型,也是高中数学的一个重要内容,并为后续进一步深造奠定必要的基础。本文对人教版《三角函数》一章进行了教材分析,通过从教学目标、教材知识内容与数学思想方法等方面的论述,提出了使用该教材的几点建议,希望能够起到抛砖引玉的作用,促进我们的教学。

2. 教材总体分析

2.1. 地位与作用

三角函数是新教材高中必修一第五章的内容,与后继内容的向量、复数、解析几何等联系紧密。在学习三角函数之前,学生应该熟悉了函数的基本概念,也掌握了幂函数、指数函数与对数函数的基本性质,具备了利用函数图像来分析函数基本性质的方法。学生在初中阶段已学过了相似图形以及单位圆的相关知识,而分析图像和代数法又是研究三角函数的主要方法,由此可见三角函数把几何和代数联系起来,并且是学习后续内容的基础。

2.2. 基本内容

人教版第五章《三角函数》的编排如下,通过介绍任意角与弧度制,借助单位圆理解和掌握任意角的三角函数的概念,进而借助函数图像了解三角函数的性质,再利用圆的对称性讨论简单的三角恒等变换,最后研究函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 性质,了解该函数中参数的变化是如何影响三角函数的图像的。

第五章三角函数总共教学时间约 18 课时,具体分配如表 1 所示(仅供参考):

Table 1. Class hour schedule

表 1. 课时分配表

章节内容	课时分配
5.1 任意角和弧度制	2 课时
5.2 三角函数的概念	3 课时
5.3 诱导公式	2 课时
5.4 三角函数的图像和性质	4 课时
5.5 三角恒等变换	2 课时
5.6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$	2 课时
5.7 三角函数的应用	2 课时
本章小结	1 课时

3. 教学目标分析

3.1. 知识与技能

理解任意角、弧度制的定义, 掌握弧度制与角度制的换算; 掌握三角函数的概念及其基本性质; 掌握并运用三角函数的诱导公式; 掌握用“五点作图法”作三角函数的图像; 学会对三角函数式进行三角恒等变换, 并能运用三角恒等变换公式进行简单的三角函数恒等变换[1]。

3.2. 过程与方法

掌握用建立坐标系的方法讨论角, 利用前面学习过的单位圆和角的终边来研究任意角的三角函数值的求解方法; 通过学习象限角领会数形结合思想方法; 让学生经历诱导公式是如何推导的, 培养学生的归纳能力和分析解决问题的能力。

3.3. 情感态度价值观

在学习本章内容过程中, 训练学生的归纳转化思维, 提高学生的数学素养和数学品质, 使学生体会到数学图形的美, 增强学生独立探究、交流合作的能力, 增强学生学习数学的兴趣。

3.4. 核心素养的体现

核心素养对学生的发展十分重要, 在人教版数学教材中无时无刻不体现着数学核心素养。课程标准提到, 必修系列的函数主题的学业要求包括重点提升数学抽象、数学建模、数学运算、直观想象和逻辑推理等核心素养。三角函数作为函数之一能够提升上述核心素养。教材中体现的关于三角函数的核心素养如表 2 所示:

Table 2. Core accomplishment manifests table

表 2. 核心素养体现表

数学抽象	获得三角函数概念并用数学语言表达三角函数的概念及其性质
直观想象	通过单位圆和函数图像研究其定义与性质, 建立数与形之间的联系
数学运算	通过同角三角函数基本关系式, 诱导公式以及三角函数的恒等变换进行计算
逻辑推理	推理证明同角三角函数基本关系式与诱导公式
数学建模	利用三角函数的性质探究周边事物的周期性

4. 教材内容分析

4.1. 知识点的分析

4.1.1. 三角函数的概念

在人教版高中数学教材中, 通过单位圆和角的终边得出任意角三角函数的概念, 再通过圆周运动“周而复始”现象强调完整的概念[2]。

4.1.2. 诱导公式, 同角三角函数的基本关系式

诱导公式, 同角三角函数的基本关系式是解三角形的基础知识, 并且也是求解三角函数数值的基本工具, 在以后做题中经常用到。

4.1.3. 三角函数的图像与性质

三角函数的图像与性质这部分内容在教材中占较大篇幅, 教材中分别对正、余弦函数以及正切函数

的图像和性质做了细致的分析, 通过对三角函数图像的观察, 分析三角函数的单调性、奇偶性、周期性等性质及最值问题。

4.1.4. 三角恒等变换

这部分内容要求学生掌握推导两角差余弦公式的方法, 并能从两角差余弦公式推导出两角和与差的正余弦、正切公式, 并且了解它们之间的内在联系。

在三角函数这一章中, 重点是掌握三角函数的概念、图像及性质, 掌握并熟练运用各种三角函数公式。难点是掌握两个变换, “图像变换”和“三角变换”。

4.2. 例题、练习和习题的设置

本章的例题是按每节而编排的例题, 本章的习题分为“练习题”与“习题”, 其中练习题是子节习题, 习题是每节后面的习题。本章各节的例题、练习题和习题数目如表 3 所示:

Table 3. Table of examples, exercises, and exercises

表 3. 例题、练习和习题数目表

章节内容	例题数目	练习题数目	习题数目
5.1 任意角和弧度制	6	11	12
5.2 三角函数的概念	7	14	18
5.3 诱导公式	5	7	10
5.4 三角函数的图像和性质	6	18	19
5.5 三角恒等变换	10	23	20
5.6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$	2	4	7
5.7 三角函数的应用	2	5	4

数学教材中的例题和习题是教材中十分关键的部分, 三角函数的每一章节中都设置了相应的例题、练习和习题, 在一些重点内容上, 设置的例题和习题较多, 层次性较丰富, 例如在三角恒等变换这一节中, 设置了 10 道典型例题、23 道练习、20 道习题, 对三角恒等变换这部分内容起到了很好的启发引导, 融会贯通, 巩固深入的作用。

例题是学生学习知识的范本, 起到探究、示范、发展思维、培养能力以及归纳知识等作用。例题都是一些典型且难度不高的题目, 并且例题与例题之间是具有联系的, 发挥正迁移作用。教师通过对例题做引导性分析, 可以使学生抓住新旧知识之间的联系, 快速通过例题掌握新知。三角函数这一章中的例题都是典型例题, 帮助学生理清知识, 明确算法。以三角函数的概念这一节中的部分例题为例, 进行以下具体分析。

例 1 求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值。

这道题目是在讲完三角函数的概念之后, 初步运用单位圆的知识来简单求解任意角的三角函数, 是紧扣新知识的基础题目, 较为简单。

例 2 如图 1, 设 α 是一个任意角, 它的终边上任意一点 P (不与原点 O 重合) 的坐标为 (x, y) , 点 P 与原点的距离为 r 。求证:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

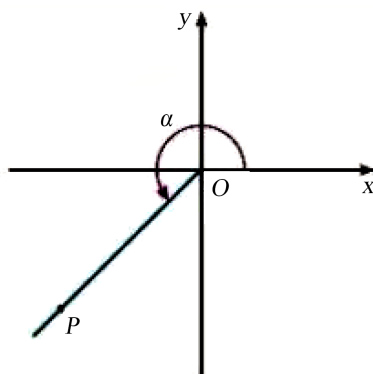


Figure 1. The appended drawings
图 1. 附图

例 2 是在例 1 基础上深入的一道典型例题, 由例 2 可知, 只要知道角 α 终边上任意一点 P 的坐标, 就可以求得角 α 的各个三角函数值, 而不仅仅局限于单位圆求解, 而且函数值是固定的, 不会随点 P 位置的移动而改变。

例 3 以知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值。

例 4 求证 $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ 。

例 3、例 4 这两个例题设置在得到同一个角的正、余弦的平方和等于 1, 并且商等于这个角的正切此结论的后面, 例 3 是针对这一结论的典型且重点的基础例题, 帮助学生理清思路, 快速学会运用同角三角函数的基本关系。例 4 是对本节知识点灵活运用的一道基础例题, 帮助学生活跃思维, 培养学生灵活解题的技能。

三角函数这一章设置了大量的练习和习题, 练习和习题最主要的作用就是复习巩固新知, 教材中编写的练习和习题是针对每节讲授内容精挑细选的练习和习题, 对每节课的知识恰到好处地进行巩固, 针对性很强。每一章节的习题按照复习巩固, 综合运用, 拓广探索三个层次设置, 具有层次性, 题目难度逐渐加大, 对知识点的运用越来越灵活。以三角函数的概念这一节中的部分习题为例, 进行以下分析:

习题 1 用定义法、公式一求下列角的三个三角函数值(可用计算工具):

$$(1) -\frac{17\pi}{3}; \quad (2) \frac{21\pi}{4}; \quad (3) -\frac{23\pi}{6}; \quad (4) 1500^\circ.$$

该习题是复习巩固板块中的第一道习题, 考察了同角三角函数的概念, 终边相同的角的同一三角函数值相等这些知识点, 有针对性地巩固了所学知识, 较为简单, 属于基础题。

习题 2 根据下列条件求函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos 2x + 3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ 的值:

$$(1) x = \frac{\pi}{4}; \quad (2) x = \frac{3\pi}{4}.$$

该习题属于综合运用中的一道习题, 把题中条件带入后, 求解 $f(x)$ 涉及到了 $\frac{\pi}{2}$, 0 , π 的正、余弦函数, 要求学生熟练掌握任意角三角函数的概念及求解方法, 很好地巩固了三角函数的概念。

习题 3 化简 $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, 其中 α 为第二象限角。

该习题属于拓广探索中的一道习题, 本题利用平方差(和)公式化简去根号, 由已知可得 $\cos \alpha < 0$,

$1 - \sin \alpha > 0$, 从而去掉绝对值, 根据同角三角函数关系式即可化简。本题考察了平方差(和)公式, 同角三角函数关系式的应用, 比前两道习题要灵活一些。

5. 数学思想方法的应用

5.1. 联系、类比

在三角函数教学中, 用到了联系、类比这些思想方法, 在学习三角函数知识之前, 学生已经学过函数的相关知识, 所以在学习三角函数的概念及其性质时, 要提示学生用一般函数概念的学习方法作为参考进行联系类比学习。例如, 三角函数这一章的章前语中指出前面我们学习过一般函数的概念, 并研究了指数函数、对数函数等, 这告诉学生, 我们在学习三角函数的概念、性质等内容时, 要学会借鉴之前建立的关于函数和其他基本初等函数的已有经验, 形成一条知识链, 从已有的知识启发到三角函数新内容的学习, 这对学生学习三角函数相关知识有很大帮助。

5.2. 数形结合

在三角函数的教学中, 认识任意角、弧度制, 探究三角函数的概念, 学习诱导公式以及分析三角函数的图像与性质, 这些内容都涉及并运用了数形结合思想。在教科书中, 三角函数这部分内容对几何直观进行了加强, 在解决数学问题时启发并引导学生运用数形结合的思想对问题进行思考。在学习任意角、三角函数的概念以及推导诱导公式时, 单位圆起了相当关键的作用。比如, 借助单位圆上一点的坐标建立正弦函数、余弦函数的概念; 利用单位圆以及三角函数线突出三角函数的本质等, 使学生体会到数形结合思想的重要性。在三角函数的图像这部分内容的学习中, 也蕴含着许多数形结合思想。比如, 在正弦函数图像的基础上, 利用诱导公式进行图像变换得到余弦函数的图像; 利用三角函数的图象学习并掌握三角函数的周期性、奇偶性、单调性、最值等性质[3]。数形结合思想贯穿在整个三角函数内容的学习中, 这也深深体现了数形结合思想在数学学习中的重要作用。

5.3. 换元法

换元思想在数学中是一个重要并且应用广泛的数学思想方法, 在三角函数这一章中尤为重要, 尤其在学习三角函数的性质时, 换元法可将原问题进行转化, 使问题变得容易理解, 使其简单化, 便于解题。研究三角函数的性质时, 经常用到令 $z = \omega x + y$, 这样换元后, 就可以将三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的函数性质与正弦函数 $y = \sin x$ 或余弦函数 $y = \cos x$ 的函数性质相关联起来, 这样就可以在求解函数的值域, 单调性, 奇偶性, 周期性, 甚至在画函数图像时都能找到更加简单的解决办法, 进而可以方便快捷地得出 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 和 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的一些性质。在教材中多次出现诸如 $z = \omega x + y$ 的形式, 即换元, 例如求最值, 求函数的递增区间或递减区间, 求周期等等, 换元法涉及到了三角函数性质的各个方面。

6. 使用教材的几点建议

6.1. 利用已有经验创设问题情境

三角函数是周期性函数, 可描述周期现象。周期现象在生活中十分常见, 我们可以通过日常生活中的一些周期现象来进行三角函数的学习。例如, 指针的旋转、车轮的旋转、季节的变化、月份的变化等都是些周期变化现象, 并且是学生熟知的日常经验, 教师在教学时可以通过它们来创设学习三角函数的问题情境, 从生活中的常见现象入手, 可使学生在开始接触三角函数内容时更便于理解和接受, 并且使数学内容更贴近生活。

6.2. 利用相关知识引导类比学习

我们在学习三角函数的概念时,是在已有的函数概念的经验上进行学习的,把三角函数的概念看成函数概念的特殊形式。教师在教学中要学会利用学生在之前学习函数概念以及指数函数、对数函数等函数时所积累的经验,通过类比,使学生明确三角函数这章需要探究的内容及其探究方法,使学生在接触三角函数的新内容时更加得心应手,使教学事半功倍。

6.3. 注重数形结合思想的运用

在三角函数这一章的教学中,数形结合思想的运用很重要,这其中单位圆的作用功不可没。例如,三角函数的概念是利用单位圆上点的坐标来定义的;诱导公式就是圆的对称性的代数表示;单位圆上点的旋转就表达为三角函数的周期性;两角差的余弦公式是利用单位圆的旋转对称导出的。可见,教师在教学三角函数时,要利用好单位圆,启发学生通过单位圆来探究三角函数的概念及其性质,在此过程中,可以通过小组讨论来利用单位圆探索三角函数的性质,加强学生的几何直观素养[4]。

基金项目

湖南省学位与研究生教育改革研究项目(2020JGYB191)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 章建跃. 为什么用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数[J]. 数学通报, 2007(1): 15-18.
- [3] 罗娅. 高中教材中的“数形结合思想”运用现状研究[D]: [硕士学位论文]. 南充: 西华师范大学, 2017.
- [4] 康利昌. 数学思想方法在高中三角函数教学中的应用研究[D]: [博士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2018.