Advances in Education 教育进展, 2021, 11(6), 2105-2109
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.116326

Hans汉斯

基于问题驱动法的多元函数偏导数教学

孙　林[1]**，罗朝阳**[2]

[1]岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江
[2]昌吉学院，新疆 昌吉

收稿日期：2021年10月3日；录用日期：2021年11月1日；发布日期：2021年11月8日

摘　要

根据高等数学高度抽象的特点，以问题驱动为导向的高等数学课程的教学方式受到越来越多的关注。本文将以高等数学中多元函数偏导数为引例，充分讨论了适当引入问题是提高学生课堂学习效率的有效方法之一。问题驱动下的教学方式就是要求教师根据课堂内容精心组织一系列问题，引导学生积极思考，深刻理解课堂内容的本质特点与核心思想，同时反过来，学生通过思考，再提出问题。这样一个良性循环的教学模式不仅有利于提高课堂教学效率，而且在一定程度上可以激发和增加学生自主自觉求知的动力。

关键词

高等数学，问题驱动教学方法，有效问题，思考

The Partial Derivative Teaching of Multivariate Functions Based on the Problem-Driven Method

Lin Sun[1]**, Zhaoyang Luo**[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong
[2]Changji College, Changji Xinjiang

Received: Oct. 3rd, 2021; accepted: Nov. 1st, 2021; published: Nov. 8th, 2021

Abstract

According to the characteristics of high abstraction of advanced mathematics, more and more attention has been paid to the problem-driven teaching method of advanced mathematics curricu-

文章引用: 孙林, 罗朝阳. 基于问题驱动法的多元函数偏导数教学[J]. 教育进展, 2021, 11(6): 2105-2109.
DOI: 10.12677/ae.2021.116326

lum. In this paper, the partial derivative of multivariate function in advanced mathematics is taken as an example to fully discuss that posing proper questions is one of the effective methods to improve students' learning efficiency in class. The problem-driven teaching method requires teachers to carefully organize a series of questions according to the teaching content, and guide students to think positively and deeply understand the essential characteristics and core ideas of the teaching content. At the same time, students ask questions through thinking. Such a virtuous circle of teaching mode is not only conducive to improve the efficiency of classroom teaching, but also to a certain extent can stimulate and increase the motivation of students to consciously seek knowledge.

Keywords

Advanced Mathematics, The Problem-Driven Teaching Method, Effective Problem, Think

1. 引言

就高等数学本身来看，其中充斥着较多的概念、定理、性质及其证明等，而且书本上呈现的知识大多依赖于形式化的符号及符号规则下的推理过程。这种严谨准确的数学专业表达方式的美让大部分学生不能感受到，反而觉得晦涩难懂。同时学生在学习这些高度抽象的知识过程中，往往是还没有透彻领悟一个概念的真正含义，就要囫囵吞枣似的硬行接受与之相关的新概念、新定理和性质及其证明。在“知识爆炸”的今天，素质教育背景下思考和创新能力的提高显得尤为重要[1]。所以在教学过程中，要洞察和理解学生在学习中遇到的困难，并以此改进教学策略。

长期的应试教育使得中国数学教学随之注重培养学生看例题、做习题、答考题，很少通过问题引导和激发学生回味反思，从而积极地提出问题。没有问题驱动的数学教育，创新思维的培养就无从谈起。近几年，问题驱动下的大学教学引起了越来越多人的关注[2] [3] [4]。在今后的教学过程中，教育者应有目的地组织一系列有效问题，激发学生积极思考，引导学生理解问题驱动下的数学知识。这个过程也会优化学生的认知结构。所谓认知结构，就是指学生现有知识的数量、清晰度和组织方式，它是由学生能回想出的事实、概念、命题、理论等构成的[5]。在这篇文章中，我们主要通过问题驱动[6]的方法，让学生能在课堂上高效率地接收和理解知识点，并能积极思考提出问题，从而获得自觉自主学习的动力。

在课堂上，教师要让学生的思路始终跟着自己走，就必须有策略地设计一系列关键问题，抓住学生的注意力，把握好教学内容的讲解顺序和节奏。这种可称之为“问题链”的教学方式并不仅仅是纯粹的启发式教学，而是引导和推动学生有效课堂学习的进程，有目的地实现课堂教学中老师与学生的互动，最终达到教与学的良好效果。以下将通过多元函数偏导数的教学过程，展现问题驱动为导向的教学方式。多元函数的偏导数的知识是第二学期的内容，第一学期所学的一元函数相关知识是基础。由于近两年本人主要的授课班级是工商管理的本科学生，所以在涉及到实际问题时，多数是以经济问题模型来进行叙述。

2. 讲解课堂新知识之前，适当提出问题，激发学生思考，从而理解课堂新知识

学习课堂新知识之前的提问方式一般是从学生的所接触到实际问题或者学生以前所学过的理论知识

为出发点，引导学生积极思考。思考的结果一般是改进以前的方法或者是创造新的方法，大多数情况下需要有新的数学结构。在这样的引导下，学生接受起来也不会觉得非常抽象。因此，在问题驱动下的数学教学把隐藏在“冰冷的形式”后面的数学思想之斑斓就自然而然地呈现出来了。

2.1. 教师设置问题

在讲解多元函数偏导数的概念时，我们通常以二元函数为例，如果直接给出偏导数的概念，就如同大家所说的，简直像“天上掉下个林妹妹”，学生云里雾里地摸不着头脑。如果我们按以下方式提出问题，概念的引入就自然多了。

问题 2.1 现有一个住房需求量 Q 的数学模型。在影响住房需求量的众多因素中，我们只考虑最主要的两个因素，房子的价格 p 和当地居民的收入 r。根据数据调查分析，得到住房需求函数 $Q=Q(p,r)$。现在问在价格为 p_0 和收入为 r_0 时，需求 Q 分别对价格 p 和收入 r 的偏弹性。

问题 2.2 一元函数 $y=f(x)$ 中所对应的经济问题中，在 x_0 处，商品的需求量 y 对价格 x 的弹性是怎么解决的？

2.2. 学生自己产生疑问

对于问题 2.1 时，学生会接受为什么我们要研究多元函数的变化率问题，对于问题 2.2，学生会调取头脑中所学过的关于弹性分析的数学知识。在面对这两个问题时，还有些学生会陷入一种思考：

学生问题 2.3 多元函数的变化率问题和一元函数的是一样的么？

如果学生自主地进入问题 2.3 的思考，那么问题 2.1 和问题 2.2 抛砖引玉的作用就充分体现出来了。问题 2.1 中，涉及到弹性分析，学生知道一元函数的弹性分析就是在 x_0 处，需求量变化量 Δy 和价格变化量 Δx 的比值在 Δx 趋近于 0 时的极限，即变化率的问题。那么问题 2.1 中，在价格为 p_0 和收入为 r_0 时，需求 Q 对价格 p 的偏弹性就是只考虑需求和价格的关系，也就是此时将收入变量看成常量 r_0。在这样的理解下，我们将两个变量的情况看成一个变量，那么就可以用一元函数的弹性分析的方法讨论二元函数中仅对一个变量进行弹性分析的情况，即设 $T(p)=Q(p,r_0)$。所以，问题 1.1 中，在价格为 p_0 和收入为 r_0 时，需求 Q 对价格 p 的偏弹性可写为

$$\lim_{\Delta p\to 0}\frac{T(p_0+\Delta p)-T(p_0)}{\Delta p}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{Q(p_0+\Delta p,r_0)-Q(p_0,r_0)}{\Delta p}$$

又因为 $T'(p_0)=\lim_{\Delta p\to 0}\dfrac{T(p_0+\Delta p)-T(p_0)}{\Delta p}$，所以有

$$T'(p_0)=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{Q(p_0+\Delta p,r_0)-Q(p_0,r_0)}{\Delta p}$$

从以上三个问题可看出，多元函数的导数问题只能是一次只考虑一个变量，而其他变量都看成常数，所以被视为变量的变量是偏重的变量，相应的变化率也被称之为偏导数。通过三个问题的层层递进的引入，最终得到二元函数乃至 n 元函数($n\geq 3$)在某个固定点处偏导数的概念。

2.3. 激发学生进一步深入思考

随之而来的进一步问题就是求多元函数偏导数的计算问题。此时，在上述问题引入以及分析的过程中，大部分同学已经直觉感受到求偏导数的过程和一元函数求导过程几乎一样，唯一不一样的就是每次求偏导数都要有偏重的变量，而其他变量在求导过程中都看成与之无关的常数。所以计算问题就迎刃而解了。

在这个问题提出过程中，我们从两方面来设置题目，问题 2.1 是从特殊应用背景出发的，问题 2.3 是从已有的知识储备的相似性来设置的，问题 2.1 相对直观易懂，问题 2.3 相对抽象。问题 2.1 所代表的类型是经典提问方式，即从问题情景出发，建立数学模型，刻画数学骨架，从而上升为新概念，在很多情况下这种方式能达到较快的效果。但是，大学中的数学有很多知识是很抽象的，要找到合适的应用背景难度较大，如 n 阶行列式的定义等。在这种情况下，就要在已学习的知识基础之上，提出能揭示数学新概念规律性的、本质的、能启发学生认知推广和演绎且能体现知识内在结构之间联系的问题，从而达到有效推进课堂进度、让学生自然而然地接受和理解抽象的新概念、新思想的目的。

3. 在概念基础之上，适当提出问题，引导学生深入理解相关性质定理

在学习了新概念和解决了基本计算问题之后，很多学生还处于茫然的状态，主要特征就是感觉好像学会了，又感觉好像没学会多少。这主要的问题就在于，没有将新概念和以前所学过的知识联系起来，新学的知识如同一座孤岛，自然会觉得心里不踏实。同时在讲解多元函数偏导数时，我们已经将此概念和一元函数的导数概念联系在了一起，有些善于思考且基础较好的同学也会想导数和连续的关系是什么呢。所以根据以上情况，在讲解完多元函数偏导数定义和基本运算以后，教师将提出以下问题：

问题 3.1 一元函数可导和连续的关系在多元函数中成立么？

此时，学生会自主地将上学期学习的一元函数可导和连续的知识调取出来。对于一元函数可导一定连续，连续不一定可导，那么这种充分性和必要性在多元函数中相应地成立么？同时，根据导数有几何意义这个直观性的特点，可以考虑以下问题。

问题 3.2 从几何的层面上来看，一元函数 $z=f\left(x,y_0\right)$ 与 $z=f\left(x,y\right)$ 是什么关系呢？

对于以上问题，可以引导学生从曲面上和曲线上点的切线方向的区别去分析，正是因为二元函数所表示的曲面上任一点处的方向有无数多个，而求两个偏导数所对应的两个一元函数只是代表着两个特殊方向。从曲面和曲线的区别去理解多元函数的偏导数存在与连续的关系，让学生在抽象的定义和几何直观意义的共同作用下理解多元函数的偏导数存在的重要性质。

4. 回顾已学知识，引导学生拓宽思路并提问

学生接收和理解新知识是课堂教学的重点，但是同时也要引导学生拓宽思路，要将新学到的知识和已储备的知识进行联系比较，将新学知识所涉及的范围逐步扩大，此时发散思维占了主导作用，而这正是促进学生去思考去创新的动力，逐渐让学生头脑中的知识活跃起来，生硬的抽象理论也会变得鲜活丰富。

讲完多元函数的偏导数定义、基本求导运算以及偏导数和连续的关系以后，让学生回顾上学期一元函数的导数讲完以后我们又讲了与之相关的哪些主要内容。在回顾的过程中，学生就会思考一元函数中可导是微分学的核心，相应的还学习了可导和可微的关系，那对于多元函数还会出现什么不一样的情况呢。

学生提问 4.1 多元函数的偏导数存在并不能决定连续的结论，会影响多元函数偏导数存在与可微的关系么？

这个问题为下节课讲解多元函数的全微分做了很好的铺垫，同时也会促使学生提前预习下一节课的内容，为良好的学习习惯打下了基础。同时，教师还可以引导学生回忆一下，一元函数只有一个变量，这一个变量变化就能引起函数的变化，而多元函数的值是由多个变量决定的，我们讲的多元函数的导数也是要偏重于某个变量。那有没有“不偏心”的情况呢？其实在讲多元函数的偏导数的定义时，也许就会有同学脑子里产生这样的问题了。

学生提问 4.2 对于多元函数有没有所有变量都给一个变化量，然后考虑函数变化量和所有自变量变化量的关系？

对于学生提的这个问题，其实已经涉及到多元函数全增量的问题，除了给学生说明下节课讲的全微分和全增量有关系以外，还可以引导学生课下去查资料，了解多元函数方向导数的概念。这种学生思考并提问题的方式，让本节课的偏导数知识扩展到全增量、全微分和方向导数这些新的知识点，很大程度上拓宽了学生的思路。同时在老师适当的解答和引导之下，让学生在提问的过程中体会到成就感，学生自豪地认为原来自己提的问题是有意义的，最重要的是自己提问自己探索的过程极大地激发了学生求知和自学的主动性，最终达到“授人予渔”的良好效果。

综上所述，上好一堂高等数学课，离不开老师的精心组织，而设置一系列有效问题是实现好课堂的有效方法之一。恰当有序的问题促使学生积极思考，深刻理解课堂内容，反过来，学生通过思考，提出问题。在这样一个良性循环的教学模式中，能提高学生学习高等数学的积极性和热情，表面上看似枯燥可畏的数学知识也会变得鲜活起来。所以，好的课堂教学方法是教学的精髓，探索高效可行的教学方法是高校数学老师的重要任务。

致　谢

感谢各位审稿人为此文章的改进所付出的辛勤劳动。

基金项目

新疆高校本科教育教学研究和改革项目“促进数学师范生教师核心素养生成与发展的改革与实践”(新教函[2019] 762 号)。

参考文献

[1] 梁利端, 陈科委. 素质教育下线性代数教学法的实践和研究[J]. 黑龙江科技信息, 2008(16): 138.

[2] 赵慧斌. 问题驱动是线性代数有效的教学法之一[J]. 高等数学研究, 2008(11): 91-94.

[3] 李尚志. 从问题出发引入线性代数概念[J]. 高等数学研究, 2008(9): 6-15.

[4] 李尚志. 线性代数精彩应用案例(之一) [J]. 大学数学, 2006, 22(3): 1-8.

[5] 施良方. 学习论[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.

[6] 张奠宙, 张荫南. 新概念: 用问题驱动的数学教学[J]. 高等数学研究, 2004, 7(3): 8-11.