

新工科背景下的概率论与数理统计 教学改革

郭利涛

厦门理工学院应用数学学院, 福建 厦门

收稿日期: 2021年10月20日; 录用日期: 2021年11月16日; 发布日期: 2021年11月23日

摘 要

概率论与数理统计是高等院校理工科专业开设的一门重要的公共基础课。为了提高学生的数学思维及理解能力,我们对概率论与数理统计进行了教学改革,文章结合教学实践,运用现代技术手段,结合生活实例,针对教学过程中遇到的问题,提出具体的教学设计,并对实践效果进行了总结与思考。

关键词

概率论与数理统计, 课程设计, 教学改革

Teaching Reform of Probability Theory and Mathematical Statistics under the Background of New Engineering

Litao Guo

School of Applied Mathematics, Xiamen University of Technology, Xiamen Fujian

Received: Oct. 20th, 2021; accepted: Nov. 16th, 2021; published: Nov. 23rd, 2021

Abstract

Probability theory and mathematical statistics is an important public basic course for science and engineering majors in colleges and universities. In order to improve students' mathematical thinking and understanding ability, we have carried out teaching reform on probability theory and mathematical statistics. Combined with teaching practice, modern technical means and life examples, this paper puts forward specific teaching design for the problems encountered in the teaching process, and summarizes and considers the practical effect.

Keywords

Probability Theory and Mathematical Statistics, Curriculum Design, Teaching Reform

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

概率论与数理统计是一门研究随机现象统计规律性的基础课，为数学的重要分支之一，其应用已普及经济、科技、教育、管理和军事等方面，是高等院校理工科专业开设的一门重要的公共基础课[1]。在考研数学中的比重大约占 22%左右。主要内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其概率分布、参数估计和假设检验、回归分析、方差分析、马尔科夫链等内容。

学生在学习高等数学和线性代数后，对变量的认识基本上感觉和中学阶段差不多，但是概率论与数理统计的课程体系与高等数学和线性代数有很大的区别，它具有自己的独特性，最明显的就是变量具有随机性，正是这个随机性使得学生在初学时对一个问题看法有很多结果。因此，如何让学生快速从高等数学的思维方式转变到具有随机性的概率论与数理统计是教学过程中的重要任务[2] [3] [4]。

2. 存在主要问题

在教学过程中主要存在以下几个问题，1) 内容抽象，不易理解。比如古典概型的内容，计算公式很简单就是 k/n ，但是我们知道在古典概型的题中，有时候一字之差题意会有很大差别。2) 计算能力弱。现行的教材基本以计算为主，尤其是连续型随机变量，主要涉及积分和二重积分的计算，大部分学生已经忘记了如何确定积分上下限以及积分方法。

3. 教学建设

1) 在授课过程中引入有关概率的历史，使同学们加深对概率的理解。在讲授期望的时候，我们介绍了期望定义的由来：一个喜欢赌博的人梅累向法国数学家帕斯卡提出一个难题：A、B 两人有相同的赌博水平，一天，两人闲来无事，本着小赌怡情的精神，提出赌钱娱乐一下，每个人拿出 50 法郎，规定每次必须有胜负，规定，哪一个人先胜了另一个人三局就拿到 100 法郎。此时 A、B 胜局为 2:1，突然有事情发生，赌博要停止。那么如何分 100 法郎比较合理呢？帕斯卡就这个问题和法国数学家费马写了一系列信。很自然可以得出下面两种方法：a) A 得 100 (1/2)法郎，B 得 100 (1/2)法郎；b) A 得 100 (2/3)法郎，B 得 100 (1/3)法郎。我们来分析一下这两种方法，a) 没有考虑到 A、B 胜局为 2:1 这一个现实，显然，对 A 是不公平的。b)比 a)更好一些，然而，b)没有考虑到如果继续赌下去会发生什么情形。那么，还有第三种分法吗？

经过分析可知，假如能继续下去的话，最多有两次就可以分出胜负。我们来求出在这两局中 A 胜利的概率。如果 A 在第四次胜利，则概率为 1/2，A 得到 100 法郎；如果 B 在第四次胜利，还要再比第五局，A 在第五局胜利的概率为 $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ 。若设 A 的最终所得为 X，则 $P(X = 100) = 1/2 + 1/4 = 3/4$ 。于是，X 的分布律见表 1。

Table 1. Distribution law of X
表 1. X 的分布律

X	0	100
P	1/4	3/4

从而 A 的“期望”所得应为 $0(1/4) + 100(3/4) = 75$ 法郎；B 的“期望”所得应为 $100 - 75 = 25$ 法郎。第三种方法考虑到了已有结果，又体现了再赌下去的一种“期望”，比前两种方法更公平合理，使 AB 两人都易于接受。这就是“数学期望”这个名称的由来。

2) 针对不容易理解的概念，引入一些有趣的例子加深学生的认识，启发他们的学习积极性。《概率论与数理统计》这门课第一节就是引入样本空间——随机试验的所有的可能出现的结果组成的集合。从集合的观点来看，样本空间相当于“全集”，我们在做题的时候首先要明确样本空间是什么，比如古典概型和几何概型的题。为了加深学生对样本空间重要性的理解，我们引入一个有趣的例子——贝特朗奇论。

贝特朗奇论

一圆内任取一条弦，问其长度超过该圆内接等边三角形边长的概率是多少？

解法一

如图 1 所示，在垂直于三角形任意一边的直径上随机取一个点，并通过该点做一个垂直于该直径的弦。

由圆内接正三角形的性质可得，在该红点位于半径中点的时候弦长度等于三角形的边长度，当红点离圆心的距离小于 $r/2$ 时弦长度大于三角形边长。因此，所求概率为 $1/2$ 。

此时，直径上的点组成了样本空间 Ω_1 。

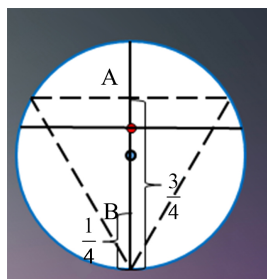


Figure 1. Solution I

图 1. 解法一

解法二

如图 2 所示，通过三角形任意一个顶点做圆的切线，因为等边三角形内角为 60° 。由该顶点做一条弦，弦的另一端在圆上任意一点。由图可知弦与切线成 60° 角到 120° 角之间的时候弦长度大于三角形边长。

所求概率为 $1/3$ 。

此时，圆周上的点组成样本空间 Ω_2 。

解法三

如图 3 所示，当弦的中点在阴影标记的圆内时，弦的长度大于三角形的边长。而大圆的弦中点一定在圆内，大圆的面积是 πr^2 ，小圆的面积是 $\pi(r/2)^2 = \pi r^2/4$ 。概率为 $1/4$ 。

此时，大圆内的点组成样本空间 Ω_3 。

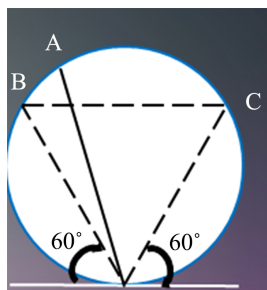


Figure 2. Solution II

图 2. 解法二

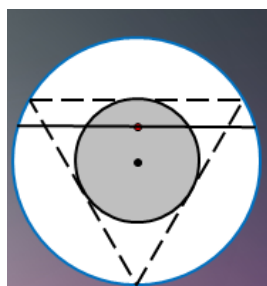


Figure 3. Solution III

图 3. 解法三

看完这个题，学生觉得不可思议啊！一道数学题居然有三个答案，颠覆了他们对数学认识啊！然后让他们讨论问题出在哪里？调动了学习积极性，活跃了课堂气氛。接下来我们总结一下，指出问题所在。

解法一：假定弦的中点在直径上均匀分布，直径上的点组成样本空间 Ω_1 。

解法二：假定弦的另一端在圆周上均匀分布，圆周上的点组成样本空间 Ω_2 。

解法三：假定弦的中点在大圆内均匀分布，大圆内的点组成样本空间 Ω_3 。

总结：通过不同解法，我们看到同一个问题有三种不同答案，原因在于圆内“取弦”时规定尚不够具体，不同的“等可能性假设”导致了不同的样本空间。可见，上述三个答案是三个不同的样本空间引起的，它们都是正确的。所以，在求解概率时要事先明确指出样本空间是什么。

我们通过用贝特朗奇论的三种解法，引起学生们的怀疑精神，激发他们的学习能动性，加深对样本空间概念的理解。

3) 加入动画演示，增加学习乐趣。棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理表明二项分布的极限分布是正态分布，但是也很抽象不易理解，我们知道二项分布是离散型分布，正态分布是连续型分布，离散分布的极限是连续分布，学生理解起来有些困难。我们用 MATLAB 绘制图像，动画演示当 n 增大的时候，二项分布的散点图与正态分布的图形越来越接近，通过直观感受来理解定理内容。类似的动画还有高尔顿钉板试验等。

4) 与实际生活结合。抽签问题是生活中经常遇到的事情，有人觉得先抽中的概率大，是不是这样呢？我们给出如下问题让同学们运用所学知识解答。某地要举行一场球赛，5 个球赛爱好者只有一张入场券。大家都想去，只好用抽签的方法来解决。准备 5 张相同的卡片，将“入场券”写到某一张上，其他四张什么也没写，将 5 张洗匀混在一起，让 5 个人依次抽取。然后让大家利用乘法公式计算出每个人抽中的概率都是 $1/5$ ，和先后顺序无关。既解决了同学的疑问又使同学熟悉了乘法公式。

5) 增加有关积分的练习题。高等数学是一年级的课程，概率论与数理统计是二年级的课程，大部分

学生忘记了积分运算的方法，适当增加一些本章节和积分有关的习题，并让学生课堂讲解，计入成绩。不但提高了学生的积极性，而且让学生回忆起积分计算方法。

4. 结束语

新时代教学背景下，教学手段多样化和教学内容丰富化，教学过程中不断地探索与改进，提高了学生学习的积极性和能动性，学生反映良好。作为任课教师，将继续加强育人意识，提高育人能力，结合本专业领域前沿和发展，继续挖掘价值塑造素材，理论联系实际，提高应用创新能力。

基金项目

本文由福建省自然科学基金资助。

参考文献

- [1] 欧启通. 概率论与数理统计[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2014.
- [2] 曹秀娟, 王言英, 鞠圣会. 新时代教育理念下的课堂教学实践探索[J]. 教育教学论坛, 2021(11): 105-108.
- [3] 黄超. 概率统计课程学生应用能力培养研究与实践[J]. 科教文汇, 2021(13): 65-66.
- [4] 郭淑妹, 郭杰, 刘楠. 以学生为中心的混合式教学设计与实践[J]. 课程教学, 2021(9): 140-141.