Advances in Education 教育进展, 2022, 12(12), 5664-5668
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.1212861

三对角型行列式的计算方法探讨

张小华[1]**，孟红云**[2]**，曹向海**[1]

[1]西安电子科技大学，人工智能学院，陕西 西安
[2]西安电子科技大学，数学与统计学院，陕西 西安

收稿日期：2022年11月21日；录用日期：2022年12月22日；发布日期：2022年12月29日

摘 要

三对角型行列式是一类典型的行列式，其计算方法灵活多样。本文在对三对角型行列式的通用特征值计算方法优缺点分析的基础之上，针对具体的三对角型行列式给出几种不同的计算方法，以加深学生对各种行列计算方法的理解，其思想方法对于一般的高阶行列式的求解具有一定的参考意义。

关键词

三对角型行列式，特征值法，递推公式法

Discussion on Calculation of the Tridiagonal Determinant of Larger Matrix

Xiaohua Zhang[1]**, Hongyun Meng**[2]**, Xianghai Cao**[1]

[1]School of Artificial Intelligence, Xidian University, Xi'an Shaanxi
[2]School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi

Received: Nov. 21st, 2022; accepted: Dec. 22nd, 2022; published: Dec. 29th, 2022

Abstract

Tridiagonal determinant is a kind of typical determinant, and its calculation methods are very flexible and diverse. Based on the analysis of the advantages and disadvantages of the general eigenvalue method of the tridiagonal determinant, this paper discusses several different calculation methods for the specific tridiagonal determinant, and deepens the understanding of determinant computation methods. The idea of the listed methods has certain reference significance for the calculation of the general determinant of larger matrix.

文章引用: 张小华, 孟红云, 曹向海. 三对角型行列式的计算方法探讨[J]. 教育进展, 2022, 12(12): 5664-5668.
DOI: 10.12677/ae.2022.1212861

Keywords

Tridiagonal Determinant, Eigenvalue Method, Recurrence Formula Method

1. 引言

行列式计算是线性代数中的重要内容之一，计算行列式时可根据行列式的定义、性质、代数余子式的性质及利用某些特殊行列式来计算，常见的计算方法[1] [2] [3] [4] [5]有：定义法、化三角形法、利用行列式性质化简法、目标法(即利用已知行列式(如范德蒙行列式)进行计算)、降阶法、升阶法、加边法、递推法、数学归纳法和特征值法[1] [2] [4] [5] [6] [7]等。

2. 三对角型行列式特征值通用计算方法

当一个 n 阶行列式 $|A|$ 非零元集中在主对角线(即行标 i 和列标 j 满足：$i-j=0$)、低对角线(即行标 i 和列标 j 满足：$i-j=1$)和高对角线(即行标 i 和列标 j 满足：$i-j=-1$)上时，称此类行列式为三对角型行列式或带状行列式。三对角型行列式是一类典型的行列式，相关习题在各类教材的例题和习题中多次出现，其计算是线性代数学习中的难点之一。本文主要研究以下三对角型行列式(主对角线上元素全为 a，低对角线元素全为 c，高对角线元素全为 d，且 $cd\neq 0$)的计算问题：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & d & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix} \tag{*}$$

显然，当 $n=1$ 时，$D_1=a$；$n=2$ 时，$D_2=a\times a-c\times d=a^2-cd$；当 $n=3$ 时，按第一行展开

$$D_3=\begin{vmatrix} a & d & 0 \\ c & a & d \\ 0 & c & a \end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix} a & d \\ c & a \end{vmatrix}-d\times\begin{vmatrix} c & d \\ 0 & a \end{vmatrix}=a\left(a^2-cd\right)-dca$$

一般地，计算 n 阶行列式时，可按照第一行展开可以得到递推关系：

$$D_n=aD_{n-1}-cdD_{n-2} \tag{1}$$

即

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta\left(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}\right),\quad D_n-\beta D_{n-1}=\alpha\left(D_{n-1}-\beta D_{n-2}\right) \tag{2}$$

这里 $\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=cd$，$D_1=a$，$D_2=a^2-cd$。于是，求行列式值的问题转化为求参数 α,β 的问题，而 α,β 又可看作一元二次方程 $x^2-ax+cd=0$ 的两个根。

当判别数 $\Delta=a^2-4dc>0$ 时，$x^2-ax+dc=0$ 有两个相异的实根

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-cd}}{2},\quad \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-cd}}{2}$$

此时，由(2)反复递推得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}\left(D_2-\alpha D_1\right),\quad D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}\left(D_2-\beta D_1\right) \tag{3}$$

联立(3)解得

$$D_n=\frac{\beta^n\left(D_2-\alpha D_1\right)}{\beta\left(\beta-\alpha\right)}+\frac{\alpha^n\left(\beta D_1-D_2\right)}{\alpha\left(\beta-\alpha\right)} \tag{4}$$

当判别数 $\Delta=a^2-4dc=0$ 时， $x^2-ax+dc=0$ 有两个相等根 $\alpha=\beta=\frac{a}{2}$。此时由式(3)有

$$D_n=\alpha D_{n-1}+\alpha^{n-2}\left(D_2-\alpha D_1\right) \tag{5}$$

$$D_n=\beta D_{n-1}+\beta^{n-2}\left(D_2-\beta D_1\right) \tag{6}$$

对(5)反复递推有

$$\begin{aligned}D_n&=\alpha D_{n-1}+\alpha^{n-2}\left(D_2-\alpha D_1\right)\\&=\alpha\left[\alpha D_{n-2}+\alpha^{n-3}\left(D_2-\alpha D_1\right)\right]+\alpha^{n-2}\left(D_2-\alpha D_1\right)\\&=\cdots=\left(\frac{D_2-\alpha D_1}{\alpha^2}n+\frac{2\alpha D_1-D_2}{\alpha^2}\right)\alpha^n\end{aligned} \tag{7}$$

对(6)反复递推有

$$D_n=\left(\frac{D_2-\beta D_1}{\beta^2}n+\frac{2\beta D_1-D_2}{\beta^2}\right)\beta^n \tag{8}$$

当判别数 $\Delta=a^2-4dc<0$ 时， $x^2-ax+dc=0$ 有一对共轭的复根

$$\alpha=\frac{a+i\sqrt{cd-a^2}}{2},\quad \beta=\frac{a-i\sqrt{cd-a^2}}{2} \tag{9}$$

此方法称为特征值法[1] [2]，它是一类典型的三对角行列式计算方法。此方法的优点在于计算方法具有一定的通用性，不论 a,b,c 取何值都可用统一的方法求得行列式的值，其缺点在于计算过程比较复杂且难以理解，而且忽略了三对角型行列式对角线元素本身的特点。事实上，在实际计算中，针对具体的三对角型行列可以采用多种灵活的计算方法，如递推公式法、数学归纳法和化三角形行列式法等。以下结合一个具体的行列式来说明三对角行列的计算方法。

3. 特定三对角型行列式其它计算方法

例[3]计算 n 阶行列式。

$$\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix} \tag{10}$$

解法 1 (特征值法)该矩阵的特点是主对角线上元素都是 2，次对角线上元素都为 1。记该 n 阶行列式的值为 D_n，相当于行列式(*)中 $a=2,c=1,d=1$，容易计算 $D_1=2$，$D_2=2\times 2-1\times 1=3$。又 $\Delta=a^2-4dc=2^2-4\times 1\times 1=0$，故对应的一元二次方程 $x^2-ax+cd=0$ 有两个相等实根 $\alpha=\beta=\frac{a}{2}=1$。由式(9)有该行列式的值

$$D_n=n\left(D_2-D_1\right)+2D_1-D_2=\left(n-1\right)D_2+\left(2-n\right)D_1=3\left(n-1\right)+2\left(2-n\right)=n+1$$

注：此题目用特征值法求解，首先需推导出 D_n 的递推关系式，然后再由一阶、二阶行列式的值代入求得 n 阶行列式的值为 D_n。

解法 2 (递推公式法)记该 n 阶行列式的值为 D_n，为了找出 D_n 的递推关系式，可将该行列式按照第一行展开，有

$$D_n=2D_{n-1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

再将上式右端第二项按第一列展开有

$$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$$

移项得 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$，知 $\left\{D_n-D_{n-1}\right\}$ 是首项 $D_2-D_1=3-2=1$，公差为 0 的等差数列，$D_n-D_{n-1}=1\left(n\geq 2\right)$，求前 $n-2$ 项的和有

$$\left(D_n-D_{n-1}\right)+\left(D_{n-1}-D_{n-2}\right)+\cdots+\left(D_2-D_1\right)=D_n-D_1=\left(n-2\right)\times 1=n-2$$

所以 $D_n=n-2+D_1=n-2+3=n+1$。

注：此法根据矩阵的特点，按某一行或某一列利用行列式的计算方法，得到递推公式，最后通过递推关系进而求得 n 阶行列式的值。

解法 3 (化三角形行列式法)记该 n 阶行列式的值为 D_n，将第一列乘以 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 加到第二列，再将第二列乘以 $\left(-\frac{2}{3}\right)$ 加到第三列，$\cdots$，依次类推，将第 $\left(n-1\right)$ 列乘以 $\left(-\frac{n-1}{n}\right)$ 加到第 n 列，有

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix}=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}=n+1 \tag{12}$$

注：此法运用行列式的运算性质，将所给行列式化为三角型行列式，从而求得行列式的值。

解法 4 (数学归纳法)记该 n 阶行列式的值为 D_n，为了计算 D_n，先计算 D_1, D_2, D_3，看能否找出规律？

$$D_1 = \left|2\right| = 2 = 1+1，\quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - 1\times 1 = 3 = 2+1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\times\left(2\times 2 - 1\times 1\right) - \left(1\times 2 - 0\times 1\right) = 2\times 3 - 2 = 4 = 3+1$$

一般地，$D_k = k+1$。以下用数学归纳法证明 n 阶行列式的值 $D_n = n+1$ 成立，计算 D_{n+1} 时按照第一列展开，

$$D_{n+1} = 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2} \qquad (13)$$
$$= 2n - \left(n-2+1\right) = n+1$$

综上知，n 阶行列式的值 $D_n = n+1$。

注：此法先计算一阶、二阶和三阶行列式的值，观察规律，进而运用数学归纳法求得该 n 阶行列式的值。

4. 结语

计算行列式时没有固定的方法，同一题目可以采用不同计算方法，而不同行列式非零元的取值和分布不同，在计算过程中可以巧妙地根据行列式特点选择恰当的方法，会使高阶行列式的计算变得更简单，同时有时需要多种方法综合使用。总而言之，高阶行列式的计算方法比较灵活，对于行列式的计算，首先应该仔细观察行列式构造上的特点，然后采用合适的计算方法，从而达到有效求解行列式的目的。

基金项目

西安电子科技大学研究生核心课程项目(HXKC2203)、西安电子科技大学杭州研究院研究生教学改革项目(1022121000210)和国家自然科学基金面上项目(61877066)。

参考文献

[1] 关晋瑞. 一类三对角行列式的计算方法[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2020, 29(3): 39-41.
[2] 卢潮辉. 三对角行列式的计算[J]. 漯河职业技术学院学报, 2010, 9(2): 51-53.
[3] 王世儒, 马华, 等. 线性代数学习指导与例题分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社.
[4] 王建红. 行列式计算方法的研究[J]. 黄山学院学报, 2021, 23(3): 11-14.
[5] 高淑萍, 杨威, 张剑湖, 马建荣. 线性代数及应用[M]. 第二版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2020.
[6] 陈丽珍, 关汉奎. 行列式的计算方法研究[J]. 长治学院学报, 2020, 37(2): 1-3.
[7] 谭俊艳, 邹辉, 吕学琴. 高阶行列式计算方法解析[J]. 教育教学论坛, 2020(9): 262-265.