Advances in Education 教育进展, 2022, 12(4), 1248-1253
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.124195

数学期望概念的教学研究

——以“离散型随机变量”为例

刘　丹

扬州大学数学科学学院，江苏 扬州

收稿日期：2022年3月18日；录用日期：2022年4月19日；发布日期：2022年4月27日

摘　要

在随机变量数学期望的教学实践中，创设情景案例激发学生学习兴趣，调动学生互动学习，通过案例问题的深入研讨获得数学期望的概念，促进学生对数学期望本质的理解，最后，运用案例教学法将生活中的两个实际问题转化为求数学期望问题，不但可以以此来检验学生的学习效果，还可以提高学生理解、分析及解决问题的综合能力，从而实现提高教学效率与教学质量的最终目标。

关键词

数学期望，离散型随机变量，案例教学法

Teaching Research on Concept of Mathematical Expectation

—Taking “Discrete Random Variables” for Example

Dan Liu

College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Received: Mar. 18th, 2022; accepted: Apr. 19th, 2022; published: Apr. 27th, 2022

Abstract

In the teaching practice of mathematical expectation of random variables, a situational case is created to stimulate students’ interest in learning and mobilize students’ interactive learning. Then, the concept of mathematical expectation is obtained through in-depth study of the situational case, which promotes students’ understanding of the nature of mathematical expectation. Finally, the case-based teaching is utilized to transform two practical problems into the issues of

文章引用: 刘丹. 数学期望概念的教学研究[J]. 教育进展, 2022, 12(4): 1248-1253.
DOI: 10.12677/ae.2022.124195

mathematical expectation, which can not only test students' learning effect, but also improve students' comprehensive ability of understanding, analyzing and solving problems, so as to achieve the ultimate goal of improving teaching efficiency and teaching quality.

Keywords

Mathematical Expectation, Discrete Random Variables, Case-Based Teaching

1. 引言

随机变量的数字特征描述着随机变量某些方面的重要特征，从而被广泛应用于工程、金融、医疗等各个领域[1] [2] [3]，具有非常重要的理论意义和应用价值。数学期望作为随机变量极为重要的数字特征之一，是方差、协方差、相关系数以及矩等数字特征的基础，可见数学期望在概率论与数理统计这门课程中占据着重要地位，学好数学期望至关重要，值得我们注意的是并非所有的随机变量的数学期望都存在，然而通过以往的教学实践发现，很多学生对数学期望的理解只停留在“形”上，只知其然而不知其所以然，并没有真正理解数学期望的本质概念，从而导致学生不能够运用所学数学知识来解决实际的应用问题，不利于培养学生的数学素养，因此在教学过程中需要给予“数学期望”更多的关注。

鉴于此，本文摒除传统教学中乏味的理论传授方式，从大家日常学习中所遇情景出发，引导学生思考平均成绩问题，逐步发现数学期望的思想，通过层层思考得到严格的数学定义，最后，运用案例教学法培养学生灵活运用所学知识来解决实际问题的能力[4]，同时也促使学生加深对数学期望内涵的理解。整个教学过程充分将“学”和“用”结合起来，摒除传统教学中无聊、枯燥的教学方式，培养学生学以致用的综合能力。

2. 引入实际案例，激发学习兴趣

2.1. 创设情景案例

通过创设实际生活中大家经常遇到的情景案例，吸引学生的注意力，基于问题驱动学生的求知欲[5]。日常学习中，考试结束后，我们需要通过考试成绩了解这个班级的学生对这门课程的学习状况，而学习状况的衡量不能只看最高分和最低分，最重要的是看平均成绩，它反映着班级的整体平均水平，此外，若知晓平均成绩，每位同学可以根据平均成绩来判断自己在班级中处于什么样的水平，那么班级平均成绩该如何计算呢？

例如，某一班级有 N 个学生，在一次数学期中考试中，用随机变量 X (分)表示学生取得的成绩，成绩统计如表 1 所示：

Table 1. Statistics on the grades of the students in the class
表 1. 该班级学生成绩的统计数据

学生成绩 X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
得分为 X 的人数	N_1	N_2	$\cdots$	N_n

其中 $N_1+N_2+\cdots+N_n=N$，求该班级这次数学期中考试的平均成绩。

2.2. 引导启发学生

通常，用全班总成绩除以全班人数便可得到平均成绩，此时引导学生从数学角度出发，选择先统计获得相同分数的学生人数，再计算总成绩，这样可以提高总成绩的运算速度，从而能够节省时间并提高效率。接下来我们来求解上述案例中班级的平均成绩。

为方便起见，我们用 μ 来表示平均成绩，则

$$\mu=\frac{x_1N_1+x_2N_2+\cdots+x_nN_n}{N},$$

将求出的平均成绩写成如下的有限和形式：

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iN_i}{N},$$

其中 x_i 表示分数，N_i 表示取得分数 x_i 的人数，再进一步转换成

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{N_i}{N},$$

其中 N_i/N 表示取得分数 x_i 的频率。

由前面章节的学习可知，当 N 不断增大时，频率具有稳定性，N_i/N 就稳定于取得分数 x_i 的概率 p_i。因此，如果用 p_i 代替 N_i/N 作为取得分数 x_i 的权重，则 μ 就是班级平均成绩的稳定值，即随机变量的均值可以用这个随机变量的所有可能取值与相应概率乘积的总和表示，是以 p_i 为权重的加权平均成绩，这正是数学期望的思想。此时，抛出问题，那么数学期望的定义是什么呢？引发学生思考与讨论。

3. 深入研讨，得到准确定义

3.1. 分析案例，得到随机变量取值为有限情形下的数学期望定义

用随机变量 X 表示学生取得的成绩，类似 $\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$ 的随机变量取值的加权平均即为数学期望，下面给出严格的数学定义。

定义 1：设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称 $\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$。

注：定义中的随机变量 X 取值为有限情形，而随机变量的取值除了有限个还可能存在无限多个，那在无限情形下的数学期望该如何定义呢？是否只需将定义 1 中的 n 改为 ∞ 即可呢？引导学生进一步深入探讨。

3.2. 深入探讨，得到随机变量取值为无限情形下的数学期望定义

若将定义 1 中的 n 改为 ∞，则涉及到无穷级数，而无穷级数未必收敛，因此，为确保数学期望存在，需增加一个条件，即级数绝对收敛。下面给出随机变量取值为无限情形时的严格定义。

定义 2：设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots$，若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$。否则，称 $E(X)$ 不存在。

注：由定义 2 可知，无穷级数需绝对收敛才能确保数学期望存在，因此，这里大家需要注意若级数仅满足收敛未必能够确保数学期望存在，可以借助下面的例子来帮助学生理解定义 2 中所加入条件的重要性。

例：设 X 为离散型随机变量，其概率分布为

$$P\left\{X=(-1)^{k-1}\frac{2^k}{k}\right\}=\frac{1}{2^k},\quad k=1,2,\cdots,$$

问随机变量 X 的数学期望存在吗？

解：由题目知，X 的取值为无穷多个，则

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k-1}\frac{2^k}{k}\times\frac{1}{2^k}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right|=\infty,$$

即原级数不绝对收敛，则 $E(X)$ 不存在。

注：我们很多同学经常会犯下面的错误，不判断级数的绝对收敛性，直接从定义 2 中的计算公式出发来计算数学期望，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^k}{k}\times\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\ln 2,$$

级数收敛，从而误认为所求结果便是数学期望。

因此，遇到随机变量取值为无穷情形时，一定要通过检验级数的绝对收敛性来判定数学期望的存在与否，如存在再按照定义中的公式计算数学期望。

4. 联系实际，巩固概念

根据数学期望的定义可知，数学期望反映了随机变量取值的“平均”特征，从而成为了判定水平高低的重要依据，数学期望也因此被广泛应用于人们的日常生活中，下面通过两个具体的实际问题来帮助学生更深入地理解并掌握数学期望。

4.1. 彩票销售问题

在有奖销售彩票活动中，每张彩票面值 2 元，共有 10,000,000 张，其中设有四个奖项，具体如表 2 所示：

Table 2. Lottery prize
表 2. 彩票奖项

奖项	一等	二等	三等	四等
奖金(元)	200,000	3000	1000	2
名额	20	1000	2000	1,000,000

求买一张彩票获奖的平均收益。

分析：要求购买一张彩票获奖的平均收益，看到平均收益自然想到数学期望的平均特征，因此求买一张彩票获奖的数学期望即可。

解：设 X 为获奖的金额，由题意可得 X 的分布律为：

Table 3. Distribution law of prize amount X
表 3. 获奖金额 X 的分布律

X	0	2	1000	3000	200000
P	$1-\frac{1003020}{10000000}$	$\frac{100}{1000}$	$\frac{2}{10000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{20}{10000000}$

根据表 3，可得 X 的数学期望为

$E(X)=2\times\frac{100}{1000}+1000\times\frac{2}{10000}+3000\times\frac{1}{10000}+200000\times\frac{20}{10000000}=1.1(\text{元})$，由此可知，买一张彩票(2 元)获奖的平均收益为 1.1 元。

4.2. 投资决策问题

小明想用 10 万元进行为期一年的投资，现有两种方案：

1) 购买股票，收益取决于经济形势(如表 4 所示)：

Table 4. Economical situation
表 4. 经济形势

经济形势	好	中等	不好
收益(万元)	4	1	−2
概率	20%	50%	30%

2) 存入银行，年利率 5%，可获息 0.5 万元

请问小明选择哪种投资方案可获得较大收益？

分析：由题意可知，存入银行的收益一目了然，但购买股票的收益取决于经济形势，在经济情势好和中等的情况下，购买股票收益较大，但如果经济形势不好，那么存入银行收益较好。然而我们事先不能确定经济形势的未来走势，因此需要根据不同经济形势出现的概率比较两种方案获利的期望大小。

解：用 X 表示购买股票的收益额，则

$$E(X)=4\times20\%+1\times50\%-2\times30\%=0.7(\text{万元})$$

因为 $0.7>0.5$，所以购买股票的期望收益比存入银行的期望收益大，应采用购买股票的方案。

通过上述两个例题，可以看出数学期望在实际生活中的广泛应用，能够让学生更直观的感受到数学期望是理性决策的基础。同时，引导学生关注收益时也要注意规避风险，学会理性决策，做任何事情都要脚踏实地，经得住诱惑，不能轻信盲从。

5. 结论

本文首先引入常见实例吸引学生的兴趣，引导学生积极参与到教学环节中，从而积极思考并探索总结数学期望的概念，再通过两个案例巩固概念，让学生感受数学期望的应用价值，将枯燥的理论知识转化为解决问题的实用工具，将老师的单向授课变为师生间的教学相长。这种教学方式有利于培养学生们发现问题并运用所学知识解决问题的综合能力，从而达到较好的教学效果。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 62103359)和江苏省高校面上项目(No. 21KJB120011)资助。

参考文献

[1] 郑金玲. 例谈数学期望在效益、利润等经济问题中的应用[J]. 数学通讯, 2003(3): 29-30.

[2] 苗慧. 论概率中数学期望在实际生活中的应用研究[J]. 中国科教创新导刊, 2012(29): 24+27.

[3] 赵小艳. 基于数学期望的新冠肺炎核酸检测方法[J]. 大学数学, 2020, 36(6): 19-22.

[4] 李英华, 梁鑫, 黄远敏. 基于案例教学的数学期望定义的教学探讨[J]. 教育观察, 2017, 6(3): 106-108.

[5] 李新娜, 陈轲. 基于问题驱动的数学期望定义的教学探讨[J]. 河南教育学院学报, 2016, 25(2): 67-69.