

# 培养高阶思维的习题课样例学习设计

## ——以概率论与数理统计课程为例

祖煜然, 杨春雨, 闫盼盼

海军潜艇学院, 山东 青岛

收稿日期: 2022年7月11日; 录用日期: 2022年8月11日; 发布日期: 2022年8月17日

---

### 摘要

针对习题课题目重复单一、教学效果不佳等问题, 以概率论与数理统计课程中的条件概率和独立性习题课为例, 通过样例学习理论进行教学设计, 帮助学员掌握基本知识, 提高学员的知识迁移能力。同时在样例学习的过程中, 创设问题情境, 学员自主学习并针对样例的问题背景和应用进行相互讨论交流, 培养学员创新、问题求解等高阶思维能力。

### 关键词

习题课, 样例学习, 教学设计, 高阶思维

---

# Design of Worked Example Learning for Cultivating Higher-Order Thinking

## —Taking Probability Theory and Mathematical Statistics as an Example

Yuran Zu, Chunyu Yang, Panpan Yan

Navy Submarine Academy, Qingdao Shandong

Received: Jul. 11<sup>th</sup>, 2022; accepted: Aug. 11<sup>th</sup>, 2022; published: Aug. 17<sup>th</sup>, 2022

---

### Abstract

In view of problems such as single repetition of topics in practice courses and poor teaching effect, taking the conditional probability and independence exercises in probability theory and mathematical statistics courses as an example, the teaching design is carried out through worked example theory to help students master basic knowledge and improve their knowledge transfer ability.

At the same time, in the process of sample learning, create problem situations, students learn independently and discuss and communicate with each other about the problem background and application of the samples, so as to cultivate students' higher-order thinking skills such as innovation and problem solving.

## Keywords

Practice Courses, Worked Example Learning, The Teaching Design, Higher-Order Thinking

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

当前的习题课存在一些问题,如单纯的题目罗列,题目之间联系性较弱,学员不能通过练习达到形成知识系统的目的;题目多来源于教材课后习题,题目类型不具多样性,与学员专业贴合度较低,不能体现课程内容的实际应用特点;题目的讲解过于注重解题的步骤,不能对知识的内在逻辑进行深入分析;在思维培养上,传统的习题课主要培养学员记忆和理解等方面的低阶思维,忽视了对分析、评价和创造等高阶思维的培养,这与人才培养目标的达成有一定距离。

本文基于样例学习理论,对概率论与数理统计中的条件概率和独立性习题课进行了教学设计,通过习题课巩固条件概率和独立性基本概念和理论,对样例进行学习和分析,将理论知识与实际应用相结合,由此培养学员的高阶思维能力。

## 2. 高阶思维和样例学习

### 2.1. 高阶思维

高阶思维是在较高认知水平上发生的心智活动或认知能力,分析、综合、评价和创造是高级思维在教学目标分类中的表现,高阶思维能力是指创新能力、问题求解能力、决策力和批判性思维能力[1]。杨晓等总结了高阶思维生成的三种方法,分别为创设积极思维的空间,激发学生的思维意识;高质量问题教学,树立高效的思维方法;构建学习共同体,发展学生的思维能力[2]。本文在教学设计上借助该方法理论,在样例设计中创设问题情境,让学员在情境中加深对知识的认识和理解。选择与学员专业背景或热点事件有关的问题,并建立问题之间的联系,引发学员不断深入思考。学员先自学,再小组之间或师生之间进行讨论和评价,通过表达不同的观点产生思维的交织和碰撞,从而在样例学习过程中形成学习共同体,发展学员思维。

### 2.2. 样例学习

样例是一种利用例题进行教学的教学工具,其形式是逐步呈现题目和解题步骤,目的是为学习者提供解决专业问题的方法。样例学习,是学习者对题目进行观察和思考获得知识的一种学习过程[3]。在数学的教与学中,数学样例是将数学问题内容以及解答过程组合形成的整体,或者是一个数学概念、公式或原理的一个具体“实体”对象[4]。本文的教学设计中采用概率论与数理统计的问题和解题过程作为样例。

研究发现,和“做中学”比,通过分析研究样例所进行的学习所需时间短,同时具有较好的迁移效果,减轻学习者在学习时的认真负荷[5]。Reed和Bolstad在1991年研究发现,在教学设计中,多个样例的设计优于单个样例设计[6]。本文根据多个样例设计的原则,即样例在结构特征上要同一,在表面特征上要变化[5],精选了多个具有典型性的样例。

根据样例解释效应[7],本文在概率论与数理统计习题课教学设计中,引导学员对样例进行自我解释,深入理解样例中的知识联系与逻辑,同时使样例与学员的专业进行融合,体会知识在实际专业问题中发挥的重要作用。在学员自我解释后,教员讲解样例的解题方法和知识逻辑,并对学员的自我解释进行评价,学员从而得到样例学习过程的反馈,加深对样例的理解。最后,教员对样例体现的深刻意义进行解释,借助样例进行思政,达到立德树人、培根铸魂的教学效果。

### 3. 习题课教学设计

#### 3.1. 教学分析

##### 3.1.1. 教学内容分析

条件概率和事件的独立性习题课部分教学内容节选自浙江大学编写,高等教育出版社出版的教材《概率论与数理统计》第五版。在概率论与数理统计课程中,条件概率和事件的独立性是概率论部分非常重要的概念,其中条件概率在概率论整个知识体系中起着承上启下的作用,概率论与数理统计中的很多内容都是在独立的前提下讨论的。条件概率和事件的独立性是教材第一章的内容,对于学员而言,学好这部分内容对后面的学习是十分重要的。

##### 3.1.2. 教学目标分析

根据《概率论与数理统计》的教学大纲,以及条件概率和事件的独立性在整个课程中的地位和作用,教学目标确定为:

###### 1) 知识与技能目标

- a) 会灵活运用条件概率和事件的独立性的概率计算公式;
- b) 会用概率计算公式解决实际问题。

###### 2) 过程与方法目标

通过样例渗透正向、逆向和发散思维的数学思想方法,学员自学培养其自主学习能力、问题求解能力,小组之间讨论分析培养合作探究能力、分析归纳能力。

###### 3) 情感态度与价值观目标

a) 体会条件概率和事件的独立性在制定疫情防控措施上的应用,理解国家防疫政策的科学性,培养学员的家国情怀;

- b) 通过军事样例,培养学员学以致用和探索研究的精神,激发学习兴趣;

##### 3.1.3. 教学重难点及学情分析

条件概率和独立性是处理随机变量等问题的有力工具,对于军校学员而言,条件概率和独立性对作战数据分析预测有着重要作用,条件概率和独立性也本次教学的重点。

教学难点确定为条件概率和独立性的实际应用。在以往的教学过程中发现,学员对前面基础知识的掌握程度较好,但是知识迁移能力较差,尤其是条件概率问题,只能完成跟例题类似题型的求解,因为条件概率不同于之前所学习的一般概率,条件概率是讨论在某一事件发生的基础上,另一个事件发生的概率,事件之间的关联性增加了理解的难度,而且在很多实际问题中,条件概率的意义不易理解,需要学员具备一定的逆向思维。

### 3.1.4. 教法与学法分析

1) 教法采用启发式教学和练习法, 通过样例所创设的情境, 启发学员深入思考, 激发学员内在的学习动力。设置练习题, 巩固知识, 引导学员将知识应用于实际。

2) 学法采用自主学习法、探究学习法、合作学习法。在课堂教学中始终以学员作为主体, 学员自主学习样例, 以小组的形式进行合作探究解决问题。

## 3.2. 教学策略

在样例学习前, 回顾总结上节课所学内容, 对样例中用到的知识点进行分析和强调。

依据样例学习理论, 结合习题课教学内容, 设置贴合学员专业、生活实际的样例。徐章韬在研究教学环节中的样例配置中指出, 从训练思维的角度而言, 习题课要从正向思维、逆向思维、发散思维的角度配置习题, 体现学员思维的多向性[5]。为了达成习题课的教学目标, 培养学员用已学知识解决实际问题的能力, 本文习题课配置了以上三种思维角度的习题。

在样例学习过程中, 通过样例自身的背景特点进行课程思政和专业融合。特大洪水问题引导学生认识到地球极端化的表现, 认识到人类迫切需要改善环境。利用录取率问题, 说明辛普森悖论处处存在, 引导学生考虑问题时要整体、部分多方面分析。通过鱼雷攻击目标和深水炸弹击沉潜水艇问题, 让学员体会所学知识在军事中的重要作用, 要学以致用、融会贯通, 以及实战中的决策是要经过科学合理的计算与周密的计划的。通过新冠病毒核酸检测问题, 回顾自新冠疫情爆发以来, 我们国家采取了很多的防疫和治疗政策、方案等, 体会正是在国家正确的决策下, 我们的生活生活才得以正常运转, 由此提高学员对国家认同感。

## 3.3. 教学实施

### 3.3.1. 知识点回顾

主要是条件概率和独立性的定义, 以及乘法定理、贝叶斯、全概率公式。引导学员思考条件概率和独立性之间的关系, 将所学知识进行连接, 形成知识系统。

### 3.3.2. 条件概率实际应用样例

1) 样例 1: 特大洪水问题

假设某地区历史上从某次特大洪水发生以后的 20 年内发生特大洪水的概率为 80%, 在 30 年内发生特大洪水的概率为 85%, 该地区先已无特大洪水 20 年了, 在未来 10 年内也不会发生特大洪水的概率是多少?

解: 设  $A = \{\text{该地区从某次特大洪水发生以后 20 内无特大洪水}\}$ ,

$B = \{\text{该地区从某次特大洪水发生以后 30 内无特大洪水}\}$ , 由题意可知:

$$P(A) = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$P(AB) = P(B) = 1 - 0.85 = 0.15$$

由条件概率公式有

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75$$

所以未来 10 年内不会发生特大洪水的概率为 75%。

2) 样例 2: 新冠病毒核酸检测问题

自新冠疫情爆发以来, 新冠病毒核酸检测成为判断是否被感染的有力方式。而判断是否被感染一般

需要进行多次核酸检测，一方面原因是病毒具有潜伏期，另一方面原因是核酸检测的准确率并不能达到百分之百。假设被感染的人经过一次核酸检测后呈阳性的概率为 50%，未被感染的人经过一次核酸检测后呈阳性的概率为 10% [8]。

问题(1)若某人进行一次核酸检测后是阳性，则该人被感染的概率是多少？

解：假设  $A_1 = \{\text{被感染者第一次核酸检测阳性}\}$ ， $B_1 = \{\text{未被感染者第一次核酸检测阳性}\}$ ， $Y_1 = \{\text{一次核酸检测呈阳性}\}$ ， $U = \{\text{该人已被感染}\}$ ， $V = \{\text{该人未被感染}\}$ 。

则由全概率公式可知

$$\begin{aligned} P(Y_1) &= P(Y_1|U)P(U) + P(Y_1|V)P(V) \\ &= P(A_1)P(U) + P(B_1)P(V) \\ &= 0.5 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

再由贝叶斯公式，

$$P(U|Y_1) = \frac{P(Y_1|U)P(U)}{P(Y_1)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.3} = 0.833$$

所以一次核酸检测后是阳性，则该人被感染的概率是 83.3%。

实施方法：呈现样例 1 和样例 2 呈现给学员，学员自主学习样例 1，小组讨论学习样例 2。经过学习，分别对两个样例进行自我解释，包括题目的分析、解题过程，以及对样例的理解。教员对样例进行解释，讲解样例的解题步骤间的逻辑关系和样例的用途以及深刻意义。最后学员对两个样例的知识点内容及实际应用进行总结，并对学习过程中对样例的理解进行评价。

设计目的：样例 1 是条件概率应用的基础题目，主要使学员学会条件概率公式的应用。样例 2 是结构特征变异的题目，在计算条件概率时用到了全概率公式和贝叶斯公式。在理解样例 1 的基础上，利用样例 2 提高学员的远迁移问题能力。样例 1 和样例 2 均为逆向思维习题，习题计算结果与人的一般认知不同，需要学员用逆向思维体会样例 1 中未来 10 年不会发生特大洪水的概率很大；样例 2 中被感染人核酸检测出阳性的事件与一次核酸检测呈阳性则被感染的事件是两种不同事件，这两个事件概率计算的条件概率公式表示的实际含义是不同的。同时使学员明白，虽然核酸检测正确率仅为 50%，在进行核酸检测筛查时，被检测人是否是感染是未知的，从量化的角度看若核酸检测呈阳性，则其被感染的可信度是很高的。通过两个样例的学习，将学员的思维进行发散，体会本次课知识点的广泛应用。

### 3) 练习 1：录取率问题

实施方法：该练习由学员运用条件概率和全概率公式自主完成。

设计目的：通过练习 1 检验学员样例学习效果，使学员熟练应用条件概率。由该练习引出辛普森悖论进行思政，让学员体会从部分和整体两个角度计算录取率的结果是不同的，认识到数据会说谎，在大数据时代，辛普森悖论处处存在，引导学生考虑问题时要整体、部分多方面考虑。在实战中，一般会依据数据进行决策，而对于决策者来说，如果不了解辛普森悖论，盲目解读数据结果，会对决策产生不利影响。在思维培养上，学员将样例学习中的得到经验运用在练习题中，提高其问题解决能力。

### 3.3.3. 独立性实际应用样例

#### 1) 样例 3：鱼雷攻击目标问题

假设三艘潜艇对一个特殊目标分别发射一枚鱼雷，潜艇 A 击中目标的概率为 50%，潜艇 B 击中目标的概率为 45%，潜艇 C 击中目标的概率为 40%，现在三艘潜艇同时向目标发射一枚鱼雷，则目标被击中



的概率是多少？如果要提高命中目标的概率到 90% 以上，那至少还需要发射几枚击中目标概率为多少的鱼雷？

解：设  $M = \{\text{目标被击中}\}$ ， $M_1 = \{\text{潜艇 A 击中目标}\}$ ， $M_2 = \{\text{潜艇 B 击中目标}\}$ ， $M_3 = \{\text{潜艇 C 击中目标}\}$ 。则由题意可知：

$$P(M_1) = 0.5, P(M_2) = 0.45, P(M_3) = 0.4$$

$$P(\bar{M}_1) = 1 - P(M_1) = 0.5, P(\bar{M}_2) = 1 - P(M_2) = 0.55, P(\bar{M}_3) = 1 - P(M_3) = 0.6$$

因为这三艘潜艇发射鱼雷命中目标的事件是相互独立的，所以

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \\ &= 1 - P(\bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3) \\ &= 1 - P(\bar{M}_1)P(\bar{M}_2)P(\bar{M}_3) \\ &= 0.835 \end{aligned}$$

三艘潜艇同时发射鱼雷命中目标的概率为 83.5%，命中几率大大提升，因此在实战中，要根据目标情况，发射一定数量的鱼雷。

实施方法：该样例的第一个问题由学员自主学习，教员对样例进行分析解释后，问题二由学员小组讨论。

设计目的：样例 3 第一问为正向思维习题，主要让学员学会事件独立性的应用方法；第二问为发散思维习题，解答结果多样性，但需要学员意识到问题的实质是鱼雷个体命中率与鱼雷个数共同作用影响目标被击中的概率，它们之间存在一定的函数关系。样例 3 只展示了第一问的解题步骤，是不完整样例，学员获取第一个问题的解决方法后，启发其以该方法为基础思考第二个问题，小组讨论探究不同的解题思路，培养学员的创新思维。

## 2) 样例 4：深水炸弹击沉潜水艇问题

深水炸弹通常装有不同体制的引信，引信的体制不同反潜命中率不同，相应的反潜效能不同，常见的有定深引信，在投入水中后下沉到一定深度引爆以杀伤目标。影响反潜效能主要有命中率和毁伤两个因素，一枚深水炸弹一般不一定击沉潜水艇，往往需要多枚炸弹共同作用，才可能击沉潜水艇，请结合学习的概率知识，研究施放深水炸弹的数量对反潜效能的影响，即深水炸弹击沉潜水艇的概率与施放深水炸弹的数量关系如何？

解：问题的认识：考虑一枚深水炸弹，投放后存在三种可能结果，一是击沉目标，二是击伤目标，三是击不中目标。每一种可能结果，即简单事件，都有一定的概率，为了提高击沉潜水艇的概率，就需要投放多枚深水炸弹，因此击沉潜水艇目标这个事件是一个复合事件，可以分解为简单事件的和事件，即本问题本质上是一个求和事件的概率问题。

假设：

- 1) 每一枚深水炸弹的命中概率是相同的；
- 2) 炸弹命中潜水艇后，每一种结果造成的毁伤概率相同；
- 3) 击伤两次会导致潜水艇下沉。

设一枚深水炸弹击不中一艘潜水艇的概率为  $p_1$ ，击沉的概率为  $p_2$ ，则击伤的概率为  $1 - p_1 - p_2$ 。

记  $A = \{m \text{ 枚深水炸弹都击不中潜水艇}\}$ ， $B = \{\text{一枚深水炸弹击伤潜水艇，其他 } m-1 \text{ 枚深水炸弹击不中潜水艇}\}$ ，则有

$$\begin{aligned}
& P(\text{施放 } m \text{ 枚深水炸弹击沉潜水艇}) \\
&= P(\text{至少有一枚击沉潜水艇或至少两枚击伤潜水艇}) \\
&= 1 - P(m \text{ 枚都击不中}) - P(\text{只有一枚击伤潜水艇}) \\
&= P(\text{至少有一枚击沉潜水艇或至少两枚击伤潜水艇}) \\
&= 1 - P(m \text{ 枚都击不中}) - P(\text{只有一枚击伤潜水艇}) \\
&= 1 - P(A) - P(B) \\
&= 1 - p_1^m - C_m^1 p_1^{m-1} (1 - p_1 - p_2) \\
&= 1 - p_1^m - m p_1^{m-1} (1 - p_1 - p_2)
\end{aligned}$$

由上式可见，总的击沉概率为  $m$ ， $p_1$  和  $p_2$  的三元函数。随着击不中概率的增大，如果想达到一定的击沉概率，需要更多的深水炸弹，这说明击中的概率高，只需要小量的深水炸弹即可达到较高的击沉概率。

实施方法：小组学习样例 4，体会样例 4 数学建模过程，由小组代表进行分析解释，主要阐述概率问题的建模步骤。

设计目的：样例 4 为发散思维题目，主要培养学员的数学建模能力，教员通过小组代表发言，了解学员的思维水平，引导其深入思考，拓展其思维角度。通过结果分析深水炸弹数量对命沉概率的影响，借助这该问题让学员从量化的角度，体会实战决策的合理性和科学性。

### 3.3.4. 综合应用练习

练习 2：新冠病毒核酸检测问题进一步思考

被感染者和未被感染者检测两次后，两次都呈阳性、两次都呈阴性、一次阴性一次阳性的概率分别为多少？分别计算，当核酸检测准确率提高到 60%、80% 时，某人一次核酸检测后是阳性，则该人被感染的概率是多少？并思考：

方式一提高核酸检测准确性且只做一次核酸检测，若呈阳性，则确定被检测者被感染；

方式二核酸检测准确性不变且进行两次核酸检测，若两次都呈阳性，则确定被检测者被感染。这两种方式哪一种更科学？

实施方法：学员对该练习的题目进行解释分析，并自主完成，小组讨论最后练习中的最后一个问题。教员分析解释练习，对学员的自我解释进行评价。

设计目的：该练习是条件概率和独立性的综合应用，对学员的样例学习效果进行巩固。根据计算结果，提高核酸检测准确性并不如进行两次核酸检测。很多防疫政策要求进行多次核酸检测，通过以上的分析可以验证防疫政策的科学性。教员以此进行课程思政，自新冠疫情爆发以来，我们国家采取了很多的防疫和治疗政策、方案等，例如《新型冠状病毒肺炎诊疗方案》已经发布了试行第九版，正是在国家正确的决策下，我们的生活才得以正常运转，而国家的每一个决策都是有科学依据的。

### 3.3.5. 课堂小结

总结实际问题的分析方法，以及知识运用的具体步骤，并强调要抓住实际问题中的逻辑关系和表现出的多层次含义。

## 3.4. 教学反思

在样例学习过程中，学员能充分地发挥主观能动性，积极主动地思考问题，不仅从样例中获得解题的方法，也加深对知识运用的理解。样例自身的背景特点能够潜移默化地将课程与专业进行融合，同时

有利于课程思政的实施。在教学的各个环节中注重培养学员的高阶思维,使得学员能以更高的角度审视所学内容,激发探究新知识、新领域的兴趣。

教学设计中包含不同类型和层次的题目,学员的知识消化能力也不同,虽然多采用小组讨论的形式,让所有学员参与分析思考,但是学员的理解程度有差异,使得教学效果不能完全达到,因此还需要后期进行针对性的教学。

#### 4. 总结

样例学习习题课不以知识点的掌握作为唯一的教学目标,注重学员在学习过程中的高阶思维的养成,打破了传统的习题课教学模式,以学员为主体,发挥学员的主动性,培养自主学习和自我解释的能力。样例和习题以实际问题为主,贴近学员的专业,促进专业融合;贴近社会时事,体现知识的应用性;挖掘数学问题反映的深刻道理,从量化和科学性的角度培养学员严谨认真的工作态度。

#### 参考文献

- [1] 钟志贤. 如何发展学习者高阶思维能力? [J]. 远程教育杂志, 2005(4): 78.
- [2] 杨晓, 毛秀荣. 高阶思维的内涵, 生成与评价[J]. 教学与管理, 2020(30): 22-25.
- [3] 林洪新, 于洋. 样例学习研究与样例教学原则[J]. 鲁东大学学报, 2012, 29(6): 80-84.
- [4] 马俊青. 数学样例学习与学生数学知识形成关系的研究[J]. 数学教育学报, 2009, 18(4): 68-70.
- [5] 王小明. 国外有关样例学习的研究[J]. 外国中小学教育, 2007(1): 48-51.
- [6] Reed, S.K. and Bolstad, C.A. (1991) Use of Examples and Procedures in Problem Solving. *Journal of Experimental Psychology Learning Memory & Cognition*, **17**, 753-766. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.17.4.753>
- [7] 徐章韬. 论基于样例学习理论的习题课教学设计[J]. 数学教育学报, 2015, 24(1): 48-51.
- [8] CSDN 技术社区. 冠状病毒检测概率[EB/OL]. <https://blog.csdn.net/strangerOK/article/details/104698392/>, 2020-03-06.