**Advances in Education** 教育进展, 2022, 12(9), 3349-3354
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.129513

# 实变函数教学探讨

**江舜君**

南京工业大学，江苏 南京

收稿日期：2022年8月9日；录用日期：2022年9月8日；发布日期：2022年9月15日

## 摘 要

本文通过研究数学分析和实变函数共有的完备性，给出了一个类比，即相较于数学分析是把有理数系$Q$推广到完备的实数系$R$，实变函数则是把一个不完备$Riemann$积分集类推广到完备的$Lebesgue$积分集类，从而构建了一座从数学分析到实变函数的认知桥梁，使学生更容易接受实变函数这门课程。同时我们还提出了要把晦涩的分析概念用简单直白的方式讲解给学生的观点，并举了一些与完备性密切相关的例子。

## 关键词

数学分析，实变函数，完备性，课程过渡，教学效果

# Discussion on Teaching Real Variable Function

**Sunjun Jiang**

Nanjing University of Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Aug. $9^{th}$, 2022; accepted: Sep. $8^{th}$, 2022; published: Sep. $15^{th}$, 2022

## Abstract

**This paper gives an analogy by mining the completeness of mathematical analysis and**

文章引用: 江舜君. 实变函数教学探讨[J]. 教育进展, 2022, 12(9): 3349-3354.
DOI: 10.12677/ae.2022.129513

**real variable functions, that is, compared with mathematical analysis, which extends the rational number system $Q$ to the complete real number system $R$, real variable function extends an incomplete *Riemann* integral set class to the complete *Lebesgue* integral set class, thus we build a cognitive bridge from mathematical analysis to real variable functions. It is easy for students to accept the course of real variable function. At the same time, we also put forward the view that we should explain the obscure analytical concepts to students in a simple and straightforward way, and give some examples with completeness.**

## Keywords

**Mathematical Analysis, Real Variable Functions, Completeness, The Transition of Courses, Results in Teaching**



## 1. 前言

“实变函数”历来是大学数学本科生难学的课程之一。一方面，实变函数课程中的*Lebesgue*函数是数学分析中*Riemann*函数的延续，另一方面，*Lebesgue*积分事实上为泛函分析课程提供了$L^P$函数类 [1–3]，使得泛函分析不至于成为没有研究对象的空架子。因此实变函数是从经典微积分到现在分析学的一个重要的过渡桥梁，它是许多重要的数学学科，如：泛函分析，变分理论，微分方程理论的基础，是近代数学的十分重要的内容之一。它的概念抽象，定理不易理解，证明思想不易掌握，习题多为证明题，而解题思路不容易入手。特别所学内容，不象微积分那样容易感觉到它的用处，因此学生缺乏学习“实变函数”的目的和动力。因此，教师需要让学生知道学习“实变函数”的目的，激发学习的动力和兴趣，了解实变函数理论的特点，通过对习题的分析，全面了解和掌握实变函数的基本概念和理论。

很多作者从不同的角度对实变函数的教学工作进行了研究，如等通过构造反例 [4, 5]，使学生加深了实变函数中概念的认识；通过数学分析与实变函数中理论框架的构建对比 [6, 7]，让学生领悟两门课程的联系与区别。作者在南京工业大学教授数学分析、实变函数，在教学过程中，我们试图从一个独特的角度–这两门课程共有的完备性概念入手，建立两门课程的联系，自然而然地从数学分析过渡到实变函数，帮助学生更深入的认识实变函数。

文章节安排如下：在第二节，我们指出实数$R$是有理数$Q$的完备化空间，并且引出一般的完备性概念；在第三节，我们说明到$Lebesgue$积分本质上是$Riemann$积分的完备化，从而将完备性这一概念从数学分析过度到实变函数；在第四节，我们给出了把晦涩的分析概念用简单直白的方式讲解给学生的观点，并举了一些与完备性密切相关的例子；第五节与第六节分别为总结与致谢。

# 2. 数学分析中的完备性

## 2.1. 第二次数学危机

在微积分的理论建立起来之后，虽然在应用上取得了非凡的成就，但是也引发很多悖论，触发了很多反对的声音。最著名的莫过于17世纪Berkeley [8]称无穷小是“已死的幽灵”，进而引起了第二次数学危机。这里面主要的原因是作为微积分的基础-极限的概念并没有完全建立起来，从而引发很多争议。当然，这也让很多数学家开始思考如何构建起具有严格逻辑的极限-微积分体系。被称之为“现代分析之父”的德国大数学家Weierstrass最终完成了这一构建，他摆脱了几何的直观，在实数系上严格的构建了数学分析的体系 [9,10]。因此，数学分析的所有理论、概念和定理都可以通过实数的运算描述出来，我们熟悉的极限$\varepsilon - N$定义即源于此体系。

## 2.2. 实数的完备性

在人类历史长河中，数系是按照自然数$N$-整数$Z$-有理数$Q$-实数$R$的顺序扩展的。它的每一次扩展，都对人类文明的进步起了重要的作用。为何从有理数$Q$-实数$R$的扩展会对微积分起了决定性作用？我们给学生举两个例子，让他们体会二者的不同。

**例1.** 有理数$Q$的极限是否还是有理数？

**证明：** 否！事实上$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \notin Q$。

**例2.** 实数$R$的极限是否还是实数？

**证明：** 是的！事实上这就是数学分析教材 [3,4]上实数完备化定理。

从上面两个例子里面，同学们发现在有理数$Q$中，甚至连极限都会不存在，更别提微积分了，因此在17世纪微积分才会引发如此多的的争议。而Weierstrass在实数$R$ 上建立起数学分析体系，正是因为实数$R$有这种非常好的封闭性。那么这个性质的本质是什么？这就是实数的完备性!

## 2.3. 更一般的完备性

数学分析 [3,4]中对实数的完备性定理（包括六种等价的表示形式：确界定理、单调有界定理、区间套定理、有限覆盖定理、聚点定理以及柯西收敛准则定理）有详细的描述与证明，基于此建立起了由极限-导数与微分-$Riemann$积分的一整套微积分理论。为了从数学分析引出实变函数，我们还需要更明确、更一般的完备性定义。

**距离空间的定义：** 设$X$是一个非空集，$d$是$X$上的二元函数，即$d:(x,y)\to d(x,y)$ 是$X\times$

$X$到$R^1$的映射。如果$d$满足:

(1)$d(x,y) \geq 0$, 且$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

(2) $d(x,y)=d(y,x), \forall\ x,y \in X$,

(3) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z \in X$,

则称$d$是$X$的一个距离，称$(X,d)$为距离空间。

**基本列的定义:** 设$\{x_n\}$为$X$中的点列，如果$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0$,使当$m,n > N$时恒有$d(x_m,x_n) < \varepsilon$,则称$\{x_n\}$为距离空间$(X,d)$中的基本列。

**收敛的定义:** 设$\{x_n\}$为$(X,d)$中点列, $x_0 \in X$. 如果$d(x_n,x_0) \to 0\ \ (n \to \infty)$, 则称$x_n$在$(X,d)$中收敛于$x_0$.

**完备空间的定义:**如果$(X,d)$中的任意基本列都收敛，则称距离空间$(X,d)$是完备的。

我们用上述完备性定理重新证明例1-2.

**例1′.** 有理数$Q$的极限是否还是有理数？

**证明：** 否！ 事实上$(1+\frac{1}{n})^n \in Q$, $(1+\frac{1}{n})^n$是基本列，显然极限是$e$, 但是在$e \notin Q$。

**例2′.** 实数$R$的极限是否还是实数？

**证明：** 是的！ 由这个定义，实数集$R^1$在距离$d(x,y)=|x-y|$下是完备的。

由上述两个例子，我们发现有理数集$Q$没有完备性，对于定义在$Q$上的函数，是不可能建立我们熟悉的微积分理论的；而实数集的完备性是微积分理论的基础，没有实数的完备性，就没有微积分理论。一般来说，我们说实数$R$是有理数$Q$的完备化空间。

有了完备性的严格定义，我们就可以带着学生从数学分析很自然的过渡到实变函数。

## 3. 数学分析到实变函数的过渡

数学分析的研究对象是实数中的变量，它的定义域是有理数$Q$的完备化空间实数$R$。当然，数学分析最重要的成果是给出了$Riemann$可积函数的的理论框架。一个很自然的问题是，$Riemann$可积函数是否可以推广？是否像理数$Q$到实数$R$那样完备化？“实变函数”理论的一个重要目的是推广$Riemann$积分，那么为什么要推广$Riemann$积分呢？我们从以下几个方面来说明：

从形式上看，$Riemann$积分的一些极限运算的性质不够理想。例如求极限和求积分交换次序的条件太强，应用不方便。实变函数理论是把$Riemann$积分推广到$Lebesgue$积分。对$Lebesgue$积分来说，求积分与求极限的交换次序问题就容易得多，在很弱的条件下就可以交换它们的次序。然而，这只是推广$Riemann$积分的表面原因。进一步问：为什么要较弱的条件下交换积分和极限次序呢？从数学理论上来说，这是与“完备性”有关的问题。

同样考虑$[a,b]$上的$Riemann$可积函数组成的集合

$$R=\{f(t)|f(t)\text{在}[a,b]\text{上}Riemann\text{可积.}\}$$

定义$d(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt$. 容易验证$(R,d)$ 为距离空间, 但不是完备的。而在一些数学问题中需要研究定义在$(R,d)$上的泛函(详细的定义见泛函分析 [1]内容)。由于$(R,d)$的不完备性，我们无法很好地研究这些泛函的性质。

利用实变函数得到的$Lebesgue$积分，若令$L=\{f(t)|f(t)在[a,b]上Lebesgue可积\}$. 则$(L,d)$是完备的，这样就为研究一些数学问题提供了必要的理论基础。可以说，没有实变函数的$Lebesgue$积分理论，泛函分析、变分理论中的结论只是一个空架子，也就不可能有现代偏微分方程理论。

现在我们可以从理论上回答为什么要学“实变函数”。实变函数理论是把黎曼可积函数类推广到$Lebesgue$可积函数类，其目的类似于把有理数系推广到实数系，把一个不完备的集类扩充成完备的集类。由此可见实变函数理论的重要性和实数理论的重要性一样。没有实数理论就没有经典的微积分学理论，而没有实变函数理论就没有现代的数学分析理论。

## 4. 深入了解实变函数

一旦学生理解了数学分析与实变函数的联系–完备性之后，下面就需要让学生认识到实变函数的内容比数学分析的内容广阔的多，因此在课上，教师要重点讲解实变函数中一些特有的概念、结论，这样才能让学生更深入的了解这门课程。由于分析类课程概念比较简洁晦涩，所以简单的抄写概念、念PPT，教学效果也不会很好。因此，我们会用简单容易易懂的语言，把抽象的概念给学生解释清楚，让学生能够真正理解概念。限于篇幅，我们挑选几例重要概念，描述如下。

**例3. Lebesgue可测**

这个概念追溯到求几何图形的面积。如果一个图形可以分割成有限个已经熟悉的图形，如矩形或三角形，则可以求出这个图形的面积。有了微积分的工具，可以求更广一类图形的面积。例如由连续闭曲线围成的图形的面积就是它的特征函数在这个区域上的二重积分。

再进一步推广，如果一个区域上的特征函数的二重积分存在且有限，则这个图形的面积是可求的。在这种意义下，可求面积的图形构成的点集称为$Jordan$可测。从直观上看，在$Jordan$意义下可测的图形已具有一般性，或者说在实际问题中已够用。然而在理论上$Jordan$可测有一个严重的缺点，它不具有可列可加性。即如果$A_1,A_2\cdot\cdot A_n\cdots$为一列$Jordan$ 可测集，且$A_i\bigcap A_j=\emptyset,i\neq j$，但是$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$在$Jordan$意义下不一定可测。

$Jordan$测度的这个缺点称为测度不具有完备性。实变函数理论的一个重要内容就是把$Jordan$测度推广到一个完备的测度, 即$Lebesgue$测度。$Jordan$测度和$Lebesgue$测度的根本区别在于测度的可列可加性或完备性。

**例4 Lebesgue积分**

Lebesgue积分是比$Riemann$积分更广的一类积分，它需要我们从更一般的角度来审视已习惯的$Riemann$积分，找到刻画积分更好的方法。因此我们首先从测度概念入手，把$Riemann$ 积分意义下的$Jordan$测度推广到$Lebesgue$测度，然后来定义一种更广的$Lebesgue$ 积分。$Lebesgue$ 积分定义的关键在于对函数定义域的分划。$Riemann$ 积分的分划是一种连续的有限的分划，而$Lebesgue$积分分划是一种不连续的无限的分划。这两种有限的分划和无限的分划导致了两种有着根本不同

的$Riemann$积分和$Lebesgue$ 积分。

## 5. 结尾

最后，我们要跟学生强调，强调学习$Lebesgue$积分的目的只是数学理论的需要。在以后的学习中我们需要的是$Lebesgue$积分有关性质，而不是要计算$Lebesgue$积分。涉及到的计算问题，往往还是归结到$Riemann$积分的计算。所以实变函数的习题主要是有关理论证明的问题，而没有具体计算的问题，这也是学生感到实变函数难学的原因所在。为了让学生更好地学习这门课程，在教学过程中，我们通过建立起与数学分析的联系，让学生不怕学习；强调实变函数中特有的概念，让学生有的放矢，抓住学习重点。

## 致　谢

作者感谢东南大学数学系徐君祥教授提供写作思路以及在实变函数完备性方面有益的讨论；感谢东南大学数学系张福保教授对实数系发展、完备性的介绍以及富有启发性的探讨。

## 基金项目

本论文受到南京工业大学校级教改项目20191184的支持。

## 参考文献

[1] 程其襄, 张奠宙, 魏国强. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 周明强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[3] 徐君祥. 实变函数[M]. 南京: 东南大学出版社, 2019.

[4] 范洪福, 范子杰. 实变函数反例研究(I) [J]. 大学数学, 2018, 34(6): 52-55.

[5] 程庆, 汪远征. 实变函数中的反例[M]. 郑州: 河南大学出版社, 1989.

[6] 王丽. 比较教学法在《实变函数》教学中的应用—与《数学分析》比较浅析[J]. 教育教学论坛, 2019(9): 180-182.

[7] 费明稳. 普通高等学校数学类课程的教学理念和教学方法—以”数学分析”和”实变函数”课程为例[J]. 当代教育理论与实践, 2017, 9(3): 34-37.

[8] 张福保, 薛星美. 数学分析研学[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

[9] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[10] 陈纪修, 於崇华, 金路, 等. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.