Advances in Education 教育进展, 2022, 12(9), 3536-3542
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.129540

Hans汉斯

微分思想在高等数学教学中的运用——不定积分教学设计

李杰森[1]，郭雅欣[1]，张鑫清[1]，何庆才[1]，董盛杰[2*]

[1]佛山科学技术学院环境与化学工程学院，广东 佛山
[2]广东白云学院教育学院，广东 广州

收稿日期：2022年8月16日；录用日期：2022年9月14日；发布日期：2022年9月23日

摘 要

在微积分的教学中，换元积分部分的内容往往是其中的难点。积分是微分的逆运算，而不管是第一类换元积分还是第二类换元积分，都与复合函数微分形式不变性有紧密关系。学习换元积分的困难往往是由于对微分理解不够透彻。微分和不定积分，是数学分析/高等数学/微积分中的重要概念，两者有着紧密联系。在微积分的教学中，应当强调微分思想，引导学生通过微分来理解链式法则，进而掌握换元积分的原理。在笔者的教学实践中发现，通过微分，能够更好地理解不定积分中相关的原理，如复合函数求导的链式法则，第一类及第二类换元积分，以及分部积分。本文介绍通过微分思想来理解不定积分的思路，并讨论在不定积分教学中如何结合微分的思想，提高教学效果。

关键词

微分，不定积分，教学设计

Ideas of Differential Used in the Teaching of Advanced Mathematics—Teaching Design for Indefinite Integral

Jiesen Li[1], Yaxin Guo[1], Xinqing Zhang[1], Qingcai He[1], Shengjie Dong[2*]

[1]School of Environmental and Chemical Engineering, Foshan University, Foshan Guangdong
[2]Faculty of Education, Guangdong Baiyun University, Guangzhou Guangdong

Received: Aug. 16th, 2022; accepted: Sep. 14th, 2022; published: Sep. 23rd, 2022

[*]通讯作者。

文章引用: 李杰森, 郭雅欣, 张鑫清, 何庆才, 董盛杰. 微分思想在高等数学教学中的运用——不定积分教学设计[J]. 教育进展, 2022, 12(9): 3536-3542. DOI: 10.12677/ae.2022.129540

Abstract

In the teaching of calculus, the integration by substitution is usually the difficult point. Integration is the inverse operation of differential, and both the substitution of the first kind and the second kind are closely related to the invariance of differential form of the composite function. The difficulty in learning an integration by substitution is often caused by the incomplete understanding of differential. Differential and indefinite integral are important concepts in mathematical analysis/higher mathematics/calculus, and they are closely related. In the teaching of calculus, the idea of differential should be emphasized, so as to guide students to understand the chain rule through differential, and thus understand the principles of integration by substitution. In authors' teaching practices, it is found that, the related principles of the indefinite integral can be better understood via the idea of differential, such as the chain rule of the composite function in differentiation, the integration by substitution of the first and the second kind, and integration by parts. In this paper, it is demonstrated that the principles of differentiation and indefinite integral can be understood based on the idea of differential, and how the teaching efficiency can be improved if the teaching of indefinite integral is combined with the idea of differentials.

Keywords

Differential, Indefinite Integral, Teaching Design

1. 引言

高等数学/微积分是理工类及经管类专业重要的基础课，而不定积分是一元微积分的重要内容，衔接着微分学与后面定积分等内容。在高等数学/微积分知识体系中，大部分内容都跟不定积分直接或间接相关。通过 Newton-Leibniz 公式，不定积分能与定积分建立起联系；而重积分大多数情况下都可根据 Fubini 定理化成累次定积分来计算；而曲线与曲面积分，通常是化为定积分或者重积分来计算。由此可见，不定积分相关的内容在数学分析/高等数学/微积分课程中有着重要地位，因此不定积分的教学在对数学分析/高等数学/微积分课程教学十分关键，有了这部分牢固的基础，能够对高等数学/微积分后面的学习带来很大的帮助。

不定积分的计算，除了个别简单的函数可以直接使用积分公式以外，往往都需要使用换元，包括第一类换元和第二类换元。因此在学习不定积分的时候，换元积分是教学中的重点。但是，学生在学习换元积分时往往会遇到困难，从而影响了后续内容的理解。由于积分是微分的逆运算，而换元积分与微分的链式法则有很紧密的联系，换元积分的基础就是微分的变换，所以微分的概念在不定积分的计算中起着重要的作用。因此笔者认为，理解换元积分遇到的困难，很有可能是由于对微分的理解不到位所引起的。

虽然，基本上所有微积分相关的教材，都会讲解微分这部分内容，但是大多都没有过多强调微分与导数之间的关系。很多教材，包括使用最为广泛的同济大学的《高等数学》教材[1]，以及菲赫金哥尔茨教授的《数学分析原理》[2]和《微积分教程》[3]，是先定义导数，然后再专门用一节来单独讲解微分。

与之相比，有些教材，例如陈纪修教授的《数学分析》[4]，以及 B. A. 卓里奇教授的《数学分析》[5]，是先引入了微分的概念，再引入导数的概念，在教材中也体现出导数与微分的紧密联系。不过，在讲解多元函数微分与导数的时候，陈纪修教授的教材则反过来，即先定义偏导数，方向导数，再引入全微分；而卓里奇教授的教材则仍然沿用“从微分到导数”的思想，从多元函数的微分来引入偏导数的定义。

对于导数与微分的教学，已有高校教师总结出一定经验，例如文献[6]从认知论的角度来设计微分的教学。对于不定积分的教学，也有类似的经验总结，例如文献[7] [8] [9]。特别地，文献[10] [11] [12] [13] [14]对换元积分的内容提出相应的教学设计方案，主要围绕着第一类换元积分中的讲解。笔者认为，在教学中更应当强调微分思想的重要性，应当把微分的思想与不定积分紧密结合，通过微分来理解不定积分。

本文根据笔者的教学实践，总结出不定积分的教学经验，并给出这部分内容的教学设计的建议。

2. 不定积分的教学设计

2.1. 微分思想的引入

在讲授导数与微分这一部分内容时，应当强化微分的概念，为不定积分的讲解做好铺垫。在教学实践中，需要让学生理解，不同变量的微分之间可以相互转换，而转换所带来的系数就是变量的相对变化率，也就是导数。例如 u 与 x 之间的变换，$\mathrm{d}u = u'_x \mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x = x'_u \mathrm{d}u = 1/u'_x \cdot \mathrm{d}u$。这一思想，可以很容易推广到多元函数，从而引出 Jacobi 矩阵，从而为多元函数微分学与多元函数积分学打下基础。为了强化这一思想，可以在讲解求导法则的时候，把对应的微分法则一同讲解，而不是等到讲解微分这一部分内容时才单独讲解。在求导时，除了常规的求导方法，还应当用微分来计算导数。以下列题目为例。

例 1：计算 $y = \sin\sqrt{2x}$ 的导数。

常规解法：

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\sqrt{2x} \cdot \left(\sqrt{2x}\right)' = \cos\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot (2x)' = \cos\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

使用微分的思想：

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\sin\sqrt{2x}\right) = \cos\sqrt{2x} \cdot \mathrm{d}\left(\sqrt{2x}\right) = \cos\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot \mathrm{d}(2x) = \cos\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2\mathrm{d}x = \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \cdot \mathrm{d}x$$

对比函数的微分

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

可知，函数的导数为

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

例 2：计算 $y = \arctan x$ 的导数

常规解法：

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{1}{(\tan y)'}\right|_{y=\arctan x} = \left.\frac{1}{\sec^2 y}\right|_{y=\arctan x} = \left.\frac{1}{1+\tan^2 y}\right|_{y=\arctan x} = \frac{1}{1+x^2}$$

使用微分的思想解题：

$$x = \tan y$$

$$\mathrm{d}x = \sec^2 y\mathrm{d}y = \left(1+\tan^2 y\right)\mathrm{d}y = \left(1+x^2\right)\mathrm{d}y$$

对比函数的微分

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

可知，函数的导数为

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

以上两个例子，通过反复使用微分，最后都能够得到 $\mathrm{d}y = \blacksquare \mathrm{d}x$ 的形式，与 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 作对比就很容易得到导数。这里实际上使用了微分形式的不变性，该思想也很容易推广到多元函数的情况，对于后续内容的讲解也是很有帮助的。在笔者的教学实践中，也有相当部分学生反映，相比于常规方法，通过微分的思想更容易理解求导的链式法则。

2.2. 通过微分来定义不定积分

在引入定积分的概念时，大部分教材，以及大部分老师，都喜欢通过导数来定义，即：如果函数 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$ 刚好与 $f(x)$ 相等，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的原函数，而 $f(x)$ 的不定积分就是 $f(x)$ 的全部原函数。也就是说，不定积分是求导运算的逆运算。虽然这样的定义比较清晰，也比较容易理解，但是对于后面换元积分以及分部积分的学习不利。例如，在讲解第一类换元，也就是凑微分时，会用到如下公式：

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C \text{ 其中 } \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

有些学生可能不明白公式中为何会多了 $u'(x)$。同样，在讲解第二类换元，也就是变量代换时，会有类似公式：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t \text{ 其中 } x = u(t)$$

有些学生也可能同样不明白公式中为何会多了 $u'(t)$。如果，我们把不定积分的定义稍微修改一下，则问题会变得更加简单。在积分号里面，$f(x)\mathrm{d}x$ 是一个微分，而进行积分运算之后就得到原函数 $F(x)$，则会存在关系 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\mathrm{d}x$。求不定积分，相当于回答"$f(x)\mathrm{d}x$ 是哪个函数的微分"的问题。由此可见，不定积分除了是求导的逆运算，同时也是微分的逆运算。有了这样的铺垫，学生应该能够更好地理解换元积分的理论。对于第一类换元积分，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，$u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}(u(x))$，就会有 $f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = f(u(x))\mathrm{d}(u(x)) = \mathrm{d}(F(u(x)))$，因此有 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C$；对于第二类换元积分，如果设 $x = u(t)$，$\mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)\mathrm{d}x = f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t$，从而 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t$。

对于第一类换元积分，可举类似于下面的例子：

例 3：计算

$$\int \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x &= \int \cos\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2\mathrm{d}x = \int \cos\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot\mathrm{d}(2x) \\ &= \int \cos\sqrt{2x}\cdot\mathrm{d}\left(\sqrt{2x}\right) = \sin\sqrt{2x} + C\end{aligned}$$

显然，例 3 与例 1 有非常密切的关系，具体来说是互为逆运算的关系。通过对比，学生能够更好地理解微分与不定积分的关系，从而更好地理解第一类换元。对于第二类换元，有了微分和变量转换的思

想，相关的公式也会比较好地理解。

2.3. 注意两个统一

不定积分的计算，最终都可以使用基本积分公式。而基本积分公式的使用，需要注意形式的统一和变量的统一。这两个要求正是来源于微分的链式法则。很多时候，学生可能会忽视了这两个统一，导致计算错误。要实现这种统一，就需要进行变量的转换。以积分

$$\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$$

为例，显然它与已知的基本积分公式

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

很像，使用时可把 x 用任意的表达式替换，即

$$\int \frac{1}{1+\blacksquare^2}\mathrm{d}x = \arctan \blacksquare + C$$

但细心观察会发现，基本积分公式中分母是$\left(1+x^2\right)$，而原式的分母为$\left(4+x^2\right)$。形式上要求分母为$\left(1+\blacksquare^2\right)$，分子为 1，其中“■”某个表达式。为了实现形式上的统一，被积函数可作如下

$$\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(x/2\right)^2}\mathrm{d}x$$

虽然形式上达到统一，但积分变量还没有统一。变量统一要求分母$\left(1+\blacksquare^2\right)$中的“■”与积分变量一致，而上式中$\blacksquare = x/2$，而积分变量为 x，还不统一，因此需要进一步转换变量

$$\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(x/2\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(x/2\right)^2}d\left(x/2\right)$$

到此，经过变换，积分式已实现了形式统一和变量统一，因此可直接使用基本积分公式，得到

$$\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(x/2\right)^2}\mathrm{d}\left(x/2\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

2.4. 分部积分的教学

用微分的思想来理解分部积分，对教学也有很大帮助。分部积分是基于积的微分，$\mathrm{d}\left(uv\right) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$，即 $u\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(uv\right) - v\mathrm{d}u$。同样，对于积分$\int u\mathrm{d}v$ 的计算，我们也可以把问题理解为，需要找到一个函数，其微分为 $u\mathrm{d}v$。

$$\int u\mathrm{d}v = \int\left(\mathrm{d}\left(uv\right) - v\mathrm{d}u\right) = \int \mathrm{d}\left(uv\right) - \int v\mathrm{d}u$$

这里就利用了微分的可加性。显然，函数 uv 的微分就是 $\mathrm{d}\left(uv\right)$，因此积分第一项为 uv，于是就得到教材中的分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

经过如图的变换，则可得到熟悉的公式

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x$$

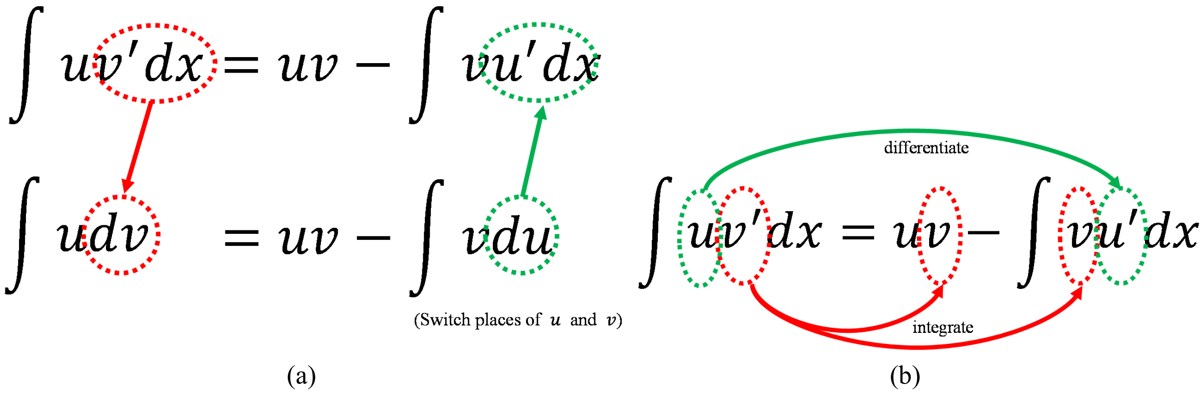

Figure 1. Schematic drawings for the procedure of integration by parts
图 1. 分部积分公式的变换过程示意图

变换过程可用图 1(a)表示，最后变换的效果如图 1(b)所示。由此可见，通过微分的思想，这些公式都变得更容易理解。

3. 结论

不定积分作为微积分的重要内容，在教学中应当重点讲解，并做好前后内容的衔接。在本文中，我们讨论了微分思想在不定积分中的体现及重要性，并提出了我们的教学设计和教学思路。在我们的教学实践中，参与学习的学生基础普遍偏弱，尽管学习态度比较端正，也有付出一定时间和精力，但是在高等数学课程中的学业表现还是一般。使用了本文的教学设计后，学生也表示能够更好理解复合函数求导的链式法则，也能够更好地理解不定积分的计算，特别是第一类和第二类换元。在后续的回访中，学生也表示，对定积分以及后面的内容都有较为透彻的理解，学习也有明显的进步。由此可见，在不定积分的教学中紧密结合微分的思想，能够很好地提高教学效果，从而为整个知识体系的学习打下坚实的基础。

基金项目

2021 年度第二批校级质量工程项目“佛科院－安安科产教融合实践教学基地”。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[2] Г. М. 菲赫金哥尔茨. 数学分析原理(第一卷) [M]. 第 9 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
[3] Г. М. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第一卷) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2005.
[4] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(上册) [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[5] B. A. 卓里奇. 数学分析(第一卷) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[6] 张冬燕, 郭从洲, 刘倩. 基于认知理论的数学概念的教学设计与实践——以微分概念为例[J]. 大学数学, 2022, 38(1): 113-117.
[7] 刘丹, 曹广福. 从不定积分概念的教学看数学课堂的思想性[J]. 高等数学研究, 2021, 24(1): 50-55, 70.
[8] 黄慎, 韩欢. 基于案例求解的高职数学混合式教学设计——以不定积分的概念及性质为例[J]. 数学学习与研究, 2021(5): 16-17.
[9] 杜先云, 任秋道. 如何讲解不定积分[J]. 数学学习与研究, 2021(1): 6-7.
[10] 周凤芹. 不定积分第一换元积分法教学探究[J]. 黑龙江科学, 2021, 12(1): 48-49.
[11] 孙杰华, 康顺光, 贾佳. 不定积分第一类换元积分法的教学探究[J]. 数学学习与研究, 2020(26): 8-9.

[12] 林美娟. 不定积分"第一换元积分法"教学三步曲[J]. 科技视界, 2012(26): 160-162.
[13] 马树燕. 不定积分"第一换元积分法"教学环节设计[J]. 文理导航(中旬), 2011(6): 75+74.
[14] 曹仲林. 微积分教学中求不定积分的方法探究[J]. 科技风, 2021(24): 73-76.