Advances in Education 教育进展, 2023, 13(11), 9179-9183
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.13111419

以线性空间为主线的线性代数内容体系设计

朱起源

重庆科技学院数理与大数据学院，重庆

收稿日期：2023年10月22日；录用日期：2023年11月20日；发布日期：2023年11月27日

摘　要

线性代数作为一门应用广泛的工具学科，理解和掌握课程内容对于解决实际问题非常重要。但由于课时等客观因素的限制，很难充分发挥课程对学生能力和素质的培养作用。为了突出课程的核心内容，发挥课程的育人作用，本文以线性空间为主线，对课程的内容体系重新进行了梳理和设计，并在此基础上进一步讨论了课程的应用模式。希望能够为线性代数的课程教学提供有益参考。

关键词

线性代数，内容体系，线性空间

Design of Linear Algebra Content System Based on Linear Space

Qiyuan Zhu

School of Mathematics, Physics and Big Data, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

Received: Oct. 22nd, 2023; accepted: Nov. 20th, 2023; published: Nov. 27th, 2023

Abstract

As a widely used tool subject, understanding the course content of linear algebra is important for solving practical problems. However, due to the limitation of objective factors such as teaching arrangement, it is difficult to give full play to the role of curriculum in cultivating students' ability and quality. In order to highlight the core content and the role of the course, the linear space is taken as the main line, and other points are reconstructed around it. The application mode of the course is further discussed at last. It is hoped that provide useful reference for the teaching of linear algebra.

文章引用: 朱起源. 以线性空间为主线的线性代数内容体系设计[J]. 教育进展, 2023, 13(11): 9179-9183.
DOI: 10.12677/ae.2023.13111419

Keywords

Linear Algebra, Content System, Linear Space

1. 线性代数课程教学现状

随着计算机技术在线性优化与离散化数据处理等工程问题中的广泛应用，线性代数逐渐成为工程技术人员不可或缺的数学工具。同时线性代数以讨论有限维线性空间的理论和方法为主，具有较强的抽象性和逻辑性。中国科学院徐宗本院士在第五届全国“大学数学课程报告”论坛指出，大学数学课程中对学生影响最大的是“线性代数”，其次是高等数学中的多元函数微积分。因此高等院校中开设线性代数课程不仅可以使学生掌握解决实际问题的基本工具和计算方法，同时在培养学生思维能力、运算能力和分析综合能力等方面也发挥着无可替代的作用。

现行线性代数教材大多从行列式、矩阵和线性方程组开始，将线性空间和线性映射安排在最后作为选学内容或不做安排。由于行列式、矩阵和线性方程组的概念简单，以求解线性方程组作为问题主线学生容易接受，也方便在学时较少的情况下开展教学。这种课程安排能够满足工科类本科数学基础课程教学基本要求[1]，并且教学内容都是线性代数的基础知识，均可直接应用在具体的工程问题中。

线性空间和线性映射具有较强的抽象性和逻辑性而较难理解，但此部分内容正是提升学生素质最重要的载体。如果课堂上只侧重对线性代数基本概念、基本工具和基本方法的讨论，就很难发挥课程在培养学生数学素质方面的独特作用，学生运用线性代数解决复杂问题的能力也得不到进一步的激发和培养。近年来，部分文献分别以线性方程组、矩阵或线性变换等为主线，讨论了线性代数课程的结构体系[2] [3] [4]，试图将线性代数各知识模块贯穿为一个有机整体。虽然这种做法有助于培养学生集成化、多样化的思维方式，但仍未能体现线性代数的核心。为了充分发挥线性代数的理论和实用价值，有必要对课程的内容体系进行重新设计和梳理。

2. 主线与具体内容之间的关系

2.1. 线性空间和线性映射

线性代数是以讨论有限维线性空间的理论和方法为主的数学学科，应该以线性空间和线性映射为主线，将行列式、矩阵、线性方程组和特征值、特征向量等主要内容作为线性映射理论的来源、背景、例子、表示和应用加以贯穿，各主要内容之间的关系如图 1 所示。因此应该先介绍线性空间和线性映射，在此框架下对具体内容展开讨论，纲举目张形成一个相互关联的整体。

对于非空集合 V，在数域 $\mathbb{F}$ 内定义加法和数乘运算，并且这两种运算满足八条运算规律，那么非空集合 V 就是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。在线性空间的公理化定义中，非空集合 V 中的元素不论其本身性质如何，均可统称为向量。

在线性空间 V 中，如果存在 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，且 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就称为线性空间 V 中的一个基，基中向量的个数为线性空间 V 的维数，维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间，记为 V_n。如果线性空间中的向量特指有序数组，维数相同的一组向

量称为向量组，对线性运算封闭的向量组构成向量空间。向量空间可以视作线性空间的一种特殊形式，线性空间中线性运算、线性相关性和线性空间的维数等概念同样适用于向量空间。向量空间可以由向量组生成，向量组的秩即为其生成的向量空间的维数。选定V_n中一个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$后，对于任一向量$\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，总有且仅有线性表达式$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$成立，这组系数$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$这个基中的坐标。并记作$\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$。定义了坐标后，自然有$V_n$与$\mathbb{F}^n$同构，因此可将$V_n$中抽象的线性运算就可转化为向量空间$\mathbb{F}^n$中数组向量的线性运算。

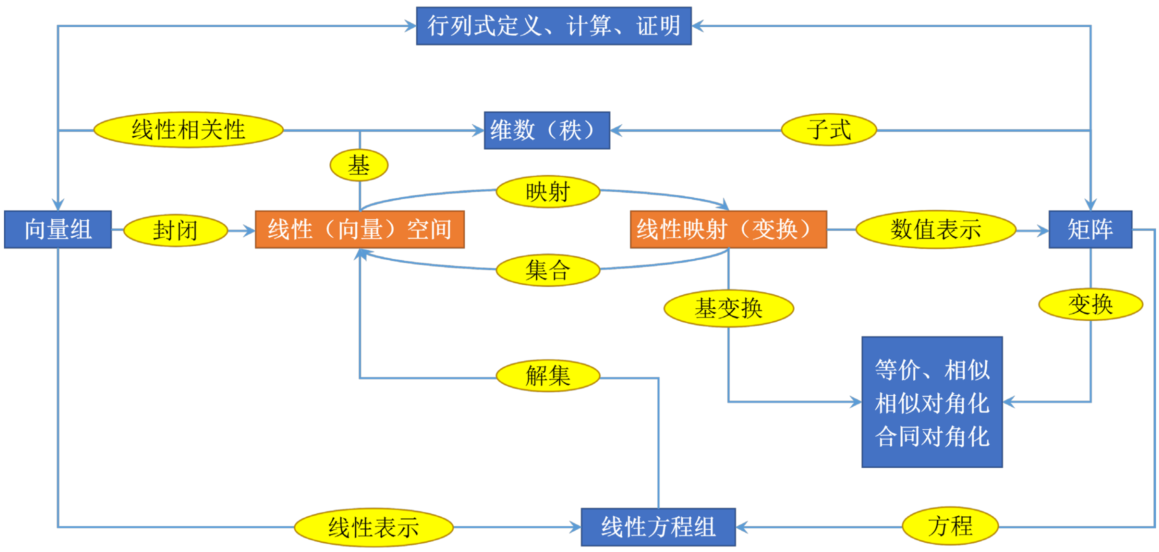

Figure 1. Diagram of the relationship between the main content line of linear algebra and each specific part
图 1. 线性代数内容主线和各部分具体内容之间的关系简图

设V_n和U_m分别是n维和m维线性空间，且$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_n$，$\lambda\in\mathbb{F}$。如果映射$T:V_n\to U_m$满足$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta})$和$T(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda T(\boldsymbol{\alpha})$两条线性性质，则$T$称为从$V_n$到$U_m$的线性映射。集合$TV=\{T\alpha|\alpha\in V\}$称为线性映射$\sigma$的值域$\mathrm{Im}T$，集合$T^{-1}(0)=\{\alpha|\alpha\in V,T\alpha=0\}$称为线性映射$T$的核$\mathrm{Ker}T$。特别地，如果$U_m=V_n$，那么$T$就是从$V_n$到自身的线性映射，称为线性空间$V_n$中的线性变换。

所有线性映射$T:V\to U$构成的集合记为$L(V,U)$，且$L(V,U)$同样定义了线性运算，也构成线性空间。值域和核的集合分别构成了线性空间T中两个重要的子空间，即线性映射T的值域空间和零空间。值域空间和零空间的维数分别称为线性映射T的秩和零度。

2.2. 具体内容

2.2.1. 矩阵和矩阵间的关系

矩阵作为线性映射的数值表示形式，它与线性映射之间存在一一对应的关系。设$T\in L(V_n,U_m)$，V_n中基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$(入口基)的像$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\in U_m$用$U_m$中的基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$(出口基)表示得矩阵$A_{m\times n}$，使得$\left[T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\right]=\left[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m\right]A_{m\times n}$这样在确定了入口基和出口基后，线性映射$T$就可以用一个矩阵$A_{m\times n}$数值表示出来了。实际上线性映射$T$完全由基映射决定。例如对于$\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，$\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\boldsymbol{x}$，则

$$T(\boldsymbol{\alpha})=\left[T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\right]\boldsymbol{x}=\left[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m\right]A_{m\times n}\boldsymbol{x},$$

即$T(\boldsymbol{\alpha})$在线性空间U_m中的坐标$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}$。当然可以用线性映射的观点理解矩阵运算。例如线性映射的

和与线性映射的复合分别对应于矩阵的加法和乘法运算，对偶映射与矩阵转置相对应，逆映射对应于逆矩阵。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩从线性映射的角度理解为线性映射 T 的秩，即线性映射 T 的像空间的维数。

两个矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{m\times n}$，如果存在 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 和 m 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{F}^{m\times m}$，使得 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{QB}$ 成立，则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 等价。如果将 $\boldsymbol{A}$ 视为 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性映射 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$，$n$ 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组视作 $\mathbb{F}^n$ 中的一个入口基，m 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量组视作 $\mathbb{F}^m$ 中的一个出口基，则两矩阵等价的定义中 $\boldsymbol{B}$ 就是线性映射 $\boldsymbol{A}$ 在这对基下的矩阵表示。矩阵的初等变换对应于在线性映射中改变了入口基和出口基，而寻找矩阵的等价“最简形”即为给定 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 上的线性变换：$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$，寻找入口基 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 和出口基 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，使得线性映射 $\boldsymbol{A}$ 在这对基下的矩阵表示最简单。

类似地，两个矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，如果存在 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，使得 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PB}$ 成立，则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似。如果将 $\boldsymbol{A}$ 视为 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换，将 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组视为 $\mathbb{F}^n$ 上的一个基，由于出口空间和入口空间均为 $\mathbb{F}^n$，可将入口基和出口基的基矩阵都选做 $\boldsymbol{P}$。则两个矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似的定义中 $\boldsymbol{B}$ 就是线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在相同的这对基下的矩阵表示。寻找矩阵的相似“最简形”即为给定 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换：$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$，寻找 $\mathbb{F}^n$ 上的基 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 同时作为出口基和入口基，使得线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在这对基下的矩阵表示最简单。

2.2.2. 特征值、特征向量和二次型

方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以看作是一个线性变换在特定基下的矩阵，方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量对应于线性变换的一维不变子空间，即线性变换的特征值和特征向量[5]。为了用矩阵研究线性变换，总是希望能够在线性空间中找到一个基，使得线性变换的矩阵具有最简单的形式。当方阵 $\boldsymbol{A}$ 所表示的线性变换有 n 个互补的一维不变子空间时，矩阵相似对角化能够使得同一线性变换的表达式变得最简单。

内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中，在标准正交基下正交变换对应的矩阵为正交矩阵，对称变换对应的矩阵为对称矩阵。实对称阵正交相似于对角阵，即对于 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$，必存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$。二次型可以理解为在线性空间 V_n 中对称双线性函数 $f\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\right)$ 的坐标表示式，它与对称矩阵之间存在一一对应关系。二次型经过适当的坐标变换可以化为平方和的形式，即合同标准形。二次型化为标准形的过程对应地就是将对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同对角化的过程。

2.2.3. 线性方程组

如果从线性映射的角度理解线性方程的求解过程，对于齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$，可以视作将 R^n 中的向量 x 线性映射到 R^m 中的零向量。求解齐次线性方程组即求线性映射的核。而非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = b$，则是已知线性映射的像求原像的过程[6]。

2.2.4. *n* 阶行列式

结合现行教材中行列式的性质，与定义线性空间的方式一样，也采用公理化形式将 n 阶行列式定义为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 个 n 维向量的反对称线性函数。这样安排一方面可以凸显以线性空间和线性映射为纲的内容结构，同时借助于向量组的线性相关性、基、可逆矩阵、分块矩阵、矩阵的秩、初等矩阵和矩阵的初等变换等概念，也可以简化行列式的定义、性质和重要定理的表达和证明[7]。

总之，线性代数各具体内容都是在线性空间和线性映射这个大的内容框架下延伸出来的，但各具体内容之间也存在密切联系。从这一内容体系安排来看，各部分都有相对独立的研究内容，但又以线性空间中的线性映射贯穿，使得线性代数的核心内容、理论方法都得以清晰地呈现。这种纲目清晰又纵横交错的内容体系，在培养学生数学思维方面发挥着独特作用，同时各具体内容也可作为数学工具直接用于解决实际问题。例如，矩阵作为一个表示工具，在将线性空间和线性映射等抽象内容具体化过程中发挥

了重要作用。另一方面矩阵又可以作为图像处理、机器学习以及通信等领域中的数学工具。

3. 课程内容教学策略

3.1. 遵循从特殊到一般，由具体到抽象的原则

线性空间和线性映射的概念相对比较抽象，可以从二维和三维向量空间入手，通过构建具体的几何图像的方式对相关内容进行直观理解，然后推广至 n 维向量空间。最后对向量的概念进行一般化处理进入线性空间和线性映射的主线中，在内容主线下对具体内容展开讨论。由具体到抽象，有助于培养学生抽象思维和逻辑分析能力；由抽象到具体，则有助于帮助学生回归实际问题，提高应用数学理论和方法解决具体问题的能力。

3.2. 遵循与传统课堂教学互补的原则

在课时较少的现实条件下，如果以线性空间和线性映射为纲开展课堂教学，无论从教学深度还是广度上都无法达到预期目标。因此线下依然以求解线性方程组为问题主线开展课堂教学，同时以线性空间和线性映射为内容主线组织在线课程资源，借助在线资源和教学工具进行线上教学[8] [9]。学生通过课堂学习掌握解决实际问题的基本知识和能力，利用在线课程培养学生的抽象思维和逻辑推理能力，加深对基本概念和方法的理解。线上线下形成优势互补。

4. 总结与展望

本文在线性空间和线性映射的框架下重新组织的教学内容。在此框架下，赋予了各部分内容具体的几何意义。虽然这种做法在一定程度上提升了课程难度，但是在此架构下讨论问题，有助于深刻理解课程的核心思想，对于提升学生数学素质和解决实际问题的能力均有积极的作用。由于难度提升必然会在教学实施过程中产生一定的障碍，在课时有限的条件下如何具体组织教学是值得探索的一个新的问题。

基金项目

重庆科技学院本科教育教学改革研究项目(以应用为导向的线性代数课程改革与实践研究，项目编号：202149)。

参考文献

[1] 高等学校大学数学教学研究与发展中心. 教指委公布最新大学数学课程教学基本要求[EB/OL]. http://cmc.xjtu.edu.cn/info/1007/1212.htm, 2015-09-18.

[2] 文军, 屈龙江, 等. “线性代数”课程内容优化研究及其在 MOOC 教学中的实践[J]. 高等教育研究学报, 2021, 44(2): 66-71.

[3] 陈丽, 白金诺. 线性代数的主线及核心应用[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2012, 12(5): 8-11.

[4] 彭司萍, 龙正平. 线性代数教学主线研究[J]. 高师理科学刊, 2016, 36(6): 75-79.

[5] 吴春生. 浅议线性变换与矩阵的特征值与特征向量的关系[J]. 连云港师范高等专业学校学报, 2004(4): 75-76.

[6] 李晓琴. 用线性映射的理论解决线性方程组问题[J]. 数学学习与研究, 2012(21): 116.

[7] 林翠琴. n 阶行列式-n 维向量的 n 重反对称线性函数[J]. 工科数学, 1998, 14(4): 83-86.

[8] 郑文彬, 林耀进, 等. 线性代数课程线上线下混合式教学模式的研究[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(2): 80-86.

[9] 吕秀敏. 基于“雨课堂”的《线性代数》课程教学改革初探[J]. 教育现代化, 2019, 6(A0): 47-48.